高等学校教材

高等几何

周建伟 编著

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

高 等 几 何

周 建 伟 编著

高等教育出版社

内容简介

本书以变换群的观点为指导思想，以一些重要定理为主线，介绍了平面射影几何的基本知识，努力展示射影、仿射、欧氏、双曲、椭圆等多种几何的丰富内容和内在联系。内容包括：射影平面、射影映射、二次曲线的射影理论、仿射几何与欧氏几何、平面双曲几何、平面椭圆几何等。

本书可供高等师范院校数学系作为教材，也可用作自学。

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/周建伟编著.—北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7-04-011878-5

Ⅰ.高… Ⅱ.周… Ⅲ.高等几何-高等学校-教材 Ⅳ.018

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第013757号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
排　　版　高等教育出版社照排中心
印　　刷　北京市朝阳区北苑印刷厂

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2003年6月第1版
印　　张	9.75	印　　次	2003年6月第1次印刷
字　　数	240 000	定　　价	13.70元

序

数学专业有三门传统的基础课程——“三高”,即高等微积分,高等代数和高等几何,因此,高等几何自然地是高等师范院校数学专业的三门基础课程之一.但是随着时代的推移,前两门课程的面貌有了很大的变化,高等微积分发展成今天的数学分析,无论从内容的深度上和思想方法上与传统的高等微积分有了很大的变化;高等代数也是一样,有关群、环、域的概念和线性代数的内容都是传统的高等代数课程内容中所没有的.但是遗憾的是高等几何的内容多少年来没有突破性的改变,似乎有些与历史的进步脱节.我一直指望有一本内容新颖的高等几何教材,使它到了21世纪还能够在奠定数学专业基础上充分发挥作用.我阅读了周建伟教授的《高等几何》教材,尽管传统的内容还是教材的主要部分,但是有了新意,教材的最后部分讲述了二维双曲几何和椭圆几何的基本内容,使学生学习了这些内容以后,能够突破传统的欧几里得几何的框架,去想象和思索新的几何领域.我希望这本《高等几何》教材能受到广大高等师范院校数学专业的师生的欢迎.

梅向明

2000年4月25日于首都师范大学

前　　言

几何是研究空间形式的重要数学分支，而高等几何是研究射影、欧氏、双曲、椭圆等几何及它们的相互关系的学科．本书以Klein的变换群观点为指导思想，以一些重要定理为主线，介绍了平面射影几何的基本知识，努力展示射影、仿射、欧氏、双曲、椭圆等多种几何的丰富内容和内在联系．本书可供高等师范学院数学系作为教材，也可用作自学．

本书在教学内容的选取和编排上作了一些努力，对一些命题给出新的、简洁的证明，力求做到叙述正确、条理分明．通过双曲与椭圆几何的学习可以对古典几何有一个全面的了解，也能接触一些近代数学思想(如覆盖空间、Gauss－Bonnet公式等)，这对提高学生学习兴趣、培养数学修养及对今后的学习都有好处．

本书采用综合法与解析法并重的写法，主要概念的定义与讨论尽可能采用几何方法进行，以帮助读者建立空间直观，能很好地理解这些概念．写作时也注意解题技巧以及利用作图帮助解题，以增强能力的培养．书中选编了较多的例题和习题，其中一部分与中学平面几何有关，以突出射影几何对中学几何的指导作用．这些习题也是本书的重要组成部分，它们对于巩固与加深对内容的理解是很有必要的．

阅读本书应该具有解析几何及线性代数方面的知识，如果学过一些群论那更好，第五章在介绍双曲弧长与面积时要用到一些简单的微积分．

苏州大学数学科学学院对本书的编写与试用给予了大力的支持．梅向明教授审阅了教材并提出了很好的修改意见．本书曾由苏

州大学出版社出版，管兆宁编辑做了许多工作.在此，特向他们表示衷心感谢.作者也十分感谢高教社李陶同志与张爱和同志，李陶同志为本书的出版做了很多前期工作，张爱和同志仔细地审阅了书稿，提出了许多改进意见.

作者相信，这本书的出版对于高等几何的教学改革与建设是有益的.

限于本人的水平和经验，书中不当之处在所难免，恳请读者指正.

周建伟

2003年2月于苏州

郑重声明

责任编辑　张爱和

封面设计　于　涛

责任绘图　宗小梅

版式设计　王艳红

责任校对　夏　晔

责任印制　杨　明

目　　录

第一章 射影平面

本书研究实射影几何及其相关的几何.射影平面有几种等价的定义方法,这里采用在普通欧氏平面上添加无穷远点以及无穷远直线,将平面扩充为拓广平面,以拓广平面为模型来定义射影平面.采用这种定义的好处是较为直观,并且这一构造直接给出了将射影几何结论运用于欧氏几何的方法.在§1.1,我们讨论拓广平面上点与直线的齐次坐标表示,利用这一表示可以得到射影平面上点与直线的解析表示.这种解析表示也可用来定义射影平面.本章还将介绍射影平面的一些基本但重要的概念,如射影坐标,对偶原理,交比等.

§1.1 拓广欧氏平面

我们以 ξ,η 等希腊字母表示直线,用大写英文字母 A,B,C 等表示点.如果 A,B 是不同的两点,用 AB 表示过 A,B 的直线.两直线 ξ 与 η 的交点用 $\xi\times\eta$ 表示,$P\in\xi$ 表示点 P 在直线 ξ 上.在这一节我们通过改造欧氏平面,得到射影平面的一个模型.

1.1.1 中心射影

先讨论两条共面直线之间的中心射影.

定义 1.1.1 设 ξ,η 是共面的两相异直线,O 是两直线外一点.对于直线 ξ 上任一点 A,设 A' 是直线 OA 与 η 的交点,则由 $A\longrightarrow A'$ 定义的直线 ξ 上点与 η 上点的对应叫直线中心射影,简称为中心射影,O 是射影中心.

按照定义,中心射影的逆对应也是中心射影.如图 1-1-1 所示,如果 ξ 与 η 平行,那么中心射影是一个既单且满的映射,我们称为是一一映射.而如图 1-1-2,如果直线 ξ 与 η 相交,那么交点 D 是中心射影的不变点.这时直线 ξ 上存在一点 P 使得直线 OP 与 η 平行,根据中心射影的定义,ξ 上这样的点 P 没有像.另一方面直线 η 上也有一点 Q,OQ 与 ξ 平行,Q 不是 ξ 上任何点的像.P 与 Q 都叫做中心射影的影消点.出现这一情形的原因是欧氏空间中平行的直线不相交.因此如果 ξ 与 η 相交,那么 ξ 与 η 之间的中心射影不是通常意义下的映射.

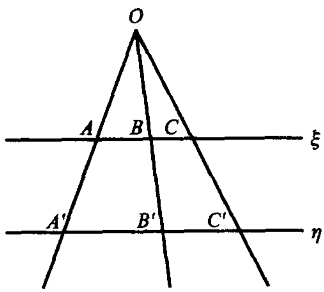

图 1-1-1

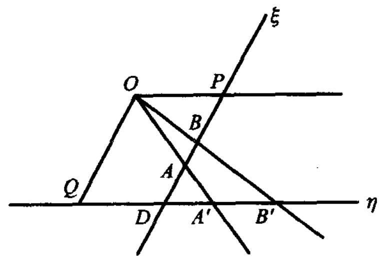

图 1-1-2

下面讨论平面之间的中心射影.

定义 1.1.2 设 π 与 π' 是欧氏空间中两个不同的平面,点 O 不在 π 上也不在 π' 上,对于平面 π 上任一点 A,如果直线 OA 交 π' 于 A',则记为 $A'=\varphi(A)$.这样定义的平面 π 与 π' 之间的对应 $\varphi:\pi\longrightarrow\pi'$ 叫平面中心射影,也简称为中心射影,O 是射影中心.

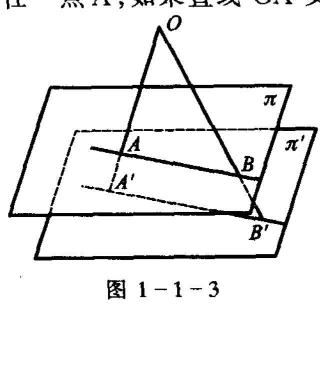

图 1-1-3

与直线之间的中心射影一样,平面中心射影的逆对应也是中心射影.如图 1-1-3,如果平面 π 与 π' 平

行，那么对于平面 π 上每一点都有 π' 上的点作为它的像．不难知道，这时中心射影 $\varphi:\pi \longrightarrow \pi'$ 是一一映射．中心射影 φ 把平面 π 上的直线变成 π' 上直线，把相交直线变成相交直线，平行直线变为平行直线．限制 φ 于平面 π 上某一条固定直线就得到直线之间的中心射影．

如果平面 π 与 π' 相交，那么两平面的交线上每一点在中心射影下是不变的．如图 1－1－4 所示，一般地 φ 仍把平面 π 上直线变为 π' 上直线，把相交直线变为相交直线．但是有例外情况，在图 1－1－4 中，设 ξ 是平面 π 上直线，使得过射影中心 O 与直线 ξ 的平面与 π' 平行，这时直线 ξ 上任一点在中心射影下没有像．这样的直线 ξ 叫做影消线．同样平面 π' 上也有直线 ξ'，过 ξ' 上任一点与 O 的连线平行于 π．易见 ξ' 上任一点都不是中心射影的像，ξ' 也叫平面 π' 上的影消线．因此在 π 与 π' 相交时，中心射影不是通常意义下的映射，原因与直线之间中心射影类似：平行平面、平行直线都不相交．

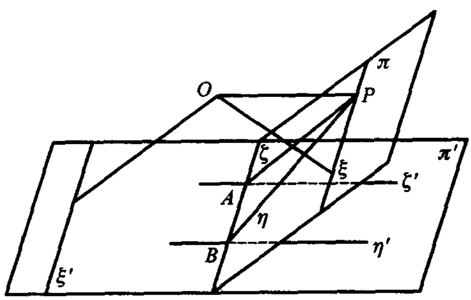

图 1－1－4

尽管中心射影有些缺憾，它还是有一些有趣的性质．下面举一些例子．

例 1 平行直线在中心射影下可以变成相交直线．

证 如图 1－1－5，设 O 是相交平面 π 与 π' 外一点，$ABCD$

是平面 π 上平行四边形，其一边 AD 在两平面交线上，四边形 $AB'C'D$是平行四边形 $ABCD$ 在以 O 为中心的中心射影下的像．如果 $AB'C'D$ 也是平行四边形，则线段 AD，BC，$B'C'$互相平行且相等，这样 $BCC'B'$也是平行四边形，这与 BB'，CC'交于 O 矛盾．所以必有 AD 与 $B'C'$相交或AB'与 DC'相交．这证明了中心射影下平行直线可变成相交直线．进一步讨论可以证明 AD 与 $B'C'$平行，而 AB'与 DC'相交．

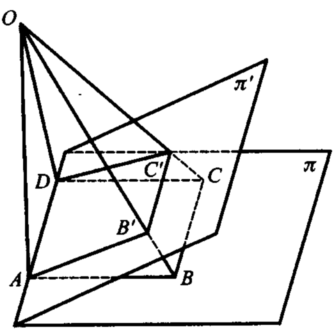

图 1－1－5

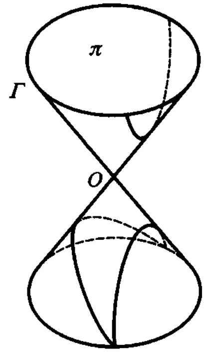

图 1－1－6

下面证明在图 1－1－4 中平面 π 上过影消线 ξ 上点的直线在中心射影下变成平行线．设 P 是 ξ 上一点，ζ，η 是平面 π 上过 P 的直线，它们分别交 π 与 π'的交线于 A，B．设 ζ 与 η 在中心射影下的像是 ζ'，η'．从中心射影作法知道，直线 ζ'，η'分别与 OP 平行，因此 ζ'与 η'平行．

例 2　中心射影可以把一个平面上的圆变成另一个平面上的双曲线、椭圆或者抛物线．

如图 1－1－6，设 Γ 是平面 π 上的圆，点 O 是平面 π 外一点．过 O 与 Γ 上所有点的连线构成以 O 为顶点的一个椭圆锥面．椭圆锥面与平面相交可以得到椭圆，也可以得到双曲线或者抛物线．例如，不过锥面顶点而平行于锥面的某一条母线的平面与锥面相

交得抛物线.变动此平面可得到双曲线或椭圆.

例 2 的严格证明可采用空间直角坐标,这时椭圆锥面是二次曲面,它与平面相交得二次曲线.而非退化的二次曲线只能是椭圆,抛物线,双曲线之一.

容易看出,在平面之间的中心射影下,两点之间的距离,两直线的夹角一般都是要改变的.所以中心投影下等边三角形或直角三角形的像一般不再是等边三角形或直角三角形.由前面讨论知道,三角形在中心射影下的像甚至可以不是三角形.例如,三角形的一个顶点在影消线上.

如果把点之间的距离,直线之间的夹角等叫做图形的度量性质,那么我们可以说,中心射影不保持图形的度量性质.

1.1.2 拓广欧氏平面

上面定义的直线与直线,平面与平面之间的中心射影一般不是一一的,并且有些点甚至没有确定的像.出现这种情况的原因是平行直线不相交.下面改造欧氏直线与平面,使得在改造以后的直线与平面上中心射影可以自然地扩充为一一的映射.

我们约定,对于每一条直线加上一个点,称为直线上的*无穷远点*;普通直线加上无穷远点以后称为*拓广直线*.添加的无穷远点把直线的左右两端连接起来,所以拓广直线可看成圆一样的封闭图形,如图 1-1-7.实际上可以按照图 1-1-8 的方式建立拓广直

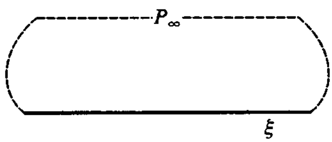

图 1-1-7

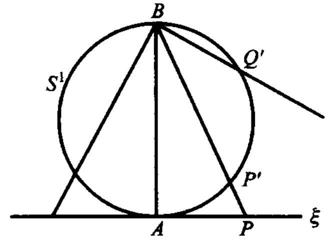

图 1-1-8

线与圆之间的一一对应．如图 1－1－8，设圆 S^1 与直线 ξ 相切于点A，点 B 是A 的对径点（即 AB 是圆的直径）．建立圆与拓广直线的中心射影，圆上点 P'与B 的连线与 ξ 的交点P 就是P'在此中心射影下的像，B 是射影中心．当 Q'在圆 S^1 上离 B 越来越近时，Q'的像Q 在直线 ξ 上离A 越来越远，自然地我们可以定义圆 S^1 上点 B 的像是直线 ξ 上的无穷远点．这样的中心射影建立了圆与拓广直线的一一对应，这样的对应是连续的．因此圆可以看成是拓广直线的一个直观模型．拓广直线与普通直线是不同的：拓广直线上一点不能把拓广直线分成不连通的两段；而拓广直线上的两普通点把它分成两段，其中一段包含无穷远点，另一段就是原来直线上的线段．

普通欧氏平面加上平面上所有直线的无穷远点以后称为*拓广欧氏平面*；也简称为*拓广平面*．这样，拓广欧氏平面上的点由两部分组成，一部分是原来平面上的点，称为普通点，另一种是添加的无穷远点．上面定的拓广直线也是拓广平面上的直线．关于添加的无穷远点以及它们与原有的普通点之间的关系，我们约定：

（ⅰ）拓广平面上任意两条拓广直线如果作为普通直线平行，那么此两拓广直线上的无穷远点相同，否则不同；

（ⅱ）拓广平面上所有的无穷远点构成一条直线，它上面没有普通点，这条直线称为*无穷远直线*．

从这些约定立即得出：普通平面上两条直线平行的充要条件是它们的拓广直线在拓广平面上交于无穷远点；一组平行直线相交于同一个无穷远点．这样，拓广平面上的直线也有两种：一种是添加无穷远点以后的拓广直线，此种直线上除一点外都是普通点；另一种是无穷远直线，这样的直线在拓广平面上只有一条．

下面的定理 1.1.1 与 1.1.2 给出了拓广欧氏平面上点与直线之间关系的重要性质．

定理 1.1.1　拓广平面上任意两点决定一条直线．

证　拓广平面上两点有三种情况：(1) 两个普通点；(2) 两个