分形混沌与矿产预测

申 维 著

地质出版社

国家自然科学基金项目

49472165.40172099.49873027 研究成果

分形混沌与矿产预测

地质出版社

· 北 京 ·

内 容 简 介

本书简述了分形理论的基本概念、分维数的定义与计算方法、数学分形和统计分形；讨论了地质现象中的分形表现和性质；提出了一般分形模型、一般分维数和多重分形模型的概念，认为许多地质模型是一般分形模型的特例；分形模型在矿床中的应用；分形成矿（矿物富集）模型；"$p100-q100$"律及其应用；提出了信息维分析基本原理，对信息维进行了模拟研究，并将它应用于地学实例；提出了多维自仿射分布的概念，论证了多维自仿射分布在截尾条件下具有尺度不变的分形性质，将分形理论研究推广到多维情况．通过实例，说明多维自仿射分布在实际中应用的方法和步骤，并解释了分维数的实际意义．该方法不仅适用于地球化学金元素和银元素数据，而且还可能适用于其他元素和地质数据，具有普遍的意义．书中论述了混沌理论的基本概念、讨论了地质现象中的混沌表现与性质和矿化富集的混沌动力学．

本书可供数学地质、矿产勘查、矿床地质和地球化学等方面的研究人员、工程技术人员以及高等院校有关专业的教师和高年级学生以及研究生参考阅读．

图书在版编目(CIP)数据

分形混沌与矿产预测/申维著．-北京：地质出版社，2002．5
ISBN 7-116-03559-1

Ⅰ．分… Ⅱ．申… Ⅲ．①分形理论-应用-成矿预测②混沌学-应用-成矿预测
Ⅳ．P612

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 021903 号

责任编辑：王仁铎 郁秀荣
责任校对：王素荣
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083
电　　话：(010)82324508(邮购部)
网　　址：http://www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@gph.com.cn
传　　真：(010)82310759
印　　刷：北京印刷学院实习工厂
开　　本：787×1092 1/16
印　　张：9
字　　数：213 千字
印　　数：1—800 册
版　　次：2002 年 5 月北京第一版·第一次印刷
定　　价：28.00 元
ISBN 7-116-03559-1/P·2261

前　言

现代科学已进入非线性科学时代，非线性科学是目前世界性的热门课题，其内容之丰富，应用之广泛几乎是前所未有的.它已应用在自然科学和社会科学之中.地学研究在理论上遇到的非线性问题以及在实践中遇到的复杂现象正是非线性科学研究的对象.因此，把非线性科学引入地学研究中不仅具有重大的理论意义，而且也有很大的现实意义.利用非线性科学研究地学问题时间不长，虽然取得了一些进展，但还有许多工作要做.可以预见，非线性科学的引入，将对地学研究工作起到很大的推动作用.

世界正经历着深刻而巨大的变化，崭新的科学概念和思潮不断涌现.并形成各具特色的新学科，以迎接世界向着未来发展所面临的挑战.分形论诞生在以多种概念和方法相互冲击和汇合为特征的当代，人们把分形论、耗散结构和混沌称为20世纪70年代科学上的三大发现.十多年来的发展趋势表明，分形论正被众多学科竞相引入，这一驱动力推动各学科的新发展.不同领域现象之间存在惊人的相似性，因此，分形论有可能成为联结现代各学科的纬线.分形的研究受到如此广泛重视的原因可归结为：一是它具有广泛而巨大的实用价值；二是它有着重大的理论价值.分形给人们展示了一类具有标度不变对称性的新世界，在世界中可能存在着新的物理规律和特征.

地学中的许多事物都十分复杂，是非线性和不规则的，只有利用非线性地质学(包括分形、混沌和自组织理论等)才能得以解决.由于人类社会和自然界中广泛存在着无序、混乱、不规则和不光滑的复杂现象，传统的理论只能是简化或定性地刻画它们.非线性地质学的提出为揭示隐藏于混乱复杂现象中的精细结构和定量地刻画描述它们提供理论基础.

非线性科学近年的发展最重要的两个体系是分形理论和混沌理论，这两个理论体系既有相对的独立性，又相互联系.分形理论创立于20世纪70年代中期，其研究对象为自然界和社会活动中广泛存在的无序(无规则)而具有自相似性的系统.分形论借助于自相似性原理，洞察隐藏于混乱现象中的精细结构；为人们从局部认识整体，从有限认识无限提供新的方法论；为不同学科发现规律性提供崭新的语言和定量的描述；为现代科学技术提供新思想新方法.由于世界本质的非线性特征，事物和现象的分形，正好表征了世界的这种基本特征，拓展了洞察复杂现象的新视野，成为人们深入认识世界的一种新方法.

混沌理论揭示出客观世界系统结构或系统行为有序与无序的相对性，认为

在系统结构或系统行为无序的宏观表面下面，仍有着严格的秩序.费根鲍姆常数、标度性、自相似性等等，便说明无序中蕴含着的有序性.另一方面，确定性的方程本身是描述严格有序现象的，但即使在没有任何外部随机因素的影响下，系统经过多次映射后却出现不可预测性.从而说明有序中也蕴含着无序.有序与无序不是绝对分离的两极，它们往往相互包含，互为因果，正是由于有序与无序互补，才能客观地描述客观世界.这一结论无论是对自然科学研究还是社会科学研究，均有重要的方法论价值.

以分形、混沌和自组织等为主题的非线性科学引起了人们广泛的注意.在包括物理、化学、数学、生物、材料和气象等相对独立的领域内获得了一大批成果，国内外一些学者也为此做出了重要贡献.地学中非线性科学研究起步较晚，其研究成果也远非尽如人意，并且缺乏系统性.只是在近几年才开始不断有非线性地质学研究成果的报道，如地质分形数据结构及混沌动力学解释、分形估值、构造变动的非线性动力学解释等等.

地质矿产中的许多重大基础问题的研究也不可回避非线性问题.如显微构造可以提供变形机制、变形环境、构造的动力学，直至变形史方面的信息，这是自相似的表现.各种成矿控制因素与成矿事件之间大多不是简单的线性关系，而迄今各种定量预测模型大多以线性理论和方法为基础，迫切需要引入非线性科学的理论和方法.在找矿上，当今人们将视线重点移到数量少但占资源总量比例很大的大型超大型矿床上，而这类矿床往往赋存于很少出现的超常规的地质环境之中，要发现这类矿床，常规的成矿规律是难以奏效的，必须以非线性科学加以指导，特别是对于地质演化的初始条件和临界状态问题，地质学研究中历来不太注意，而这正是问题的关键所在.

正如美国著名物理科学家惠勒所说："可以相信，明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人"，这也许并不夸大.总之，在世界正经历着深刻而巨大变化的当今，分形论将为人们开拓视野，启迪思维，更新观念，激发智慧的强烈愿望做出应有的贡献.

本书作者在博士研究生学习和博士后（第一期和第二期）工作期间，得到了导师赵鹏大院士、王世称教授和李朝阳研究员悉心指导和热心帮助，开展了分形、混沌理论及其在地学中的应用研究工作，承担了中国博士后科学基金项目《非线性地质学研究及其应用》、国土资源部科技项目《矿产预测中的非线性新模型研究》（编号 B7-10）、国家自然科学基金项目《地质现象的分形统计学及混沌动力研究》（批准号 49472165）、国家自然科学基金项目《矿产预测中的非线性新模型基础研究》（批准号 40172099）、国家自然科学基金项目《低温成矿作用的非线性地球化学与动力学》（批准号 49873027）、国土资源部"九五"基础研究重点项目《矿产定量预测的勘查评价新理论研究》和中国科学院重大项目《我国西

南地区低温成矿域研究》(编号 K2951-131-411)等研究任务.发表了一系列关于分形混沌地学方面的论文,其科研报告《非线性地质学研究及其应用》被专家委员会评为国际先进水平.

本书大多数内容是在上述研究成果基础上编写而成的.全书共分六章.第一章简述了分形理论的基本概念、分维数的定义与计算方法、数学分形和统计分形.第二章讨论地质现象中的分形表现和性质.第三章提出了一般分形模型、一般分维数和多重分形模型的概念,认为许多地质模型是一般分形模型的特例,根据非线性回归模型参数估计的方法,提出了求分维数的新方法,该方法具有许多优点.通过在计算机上产生随机数对分形统计模型进行模拟研究以及应用实例说明分形统计模型在实际问题中应用的方法及步骤,并解释了分维数的实际意义.内容包括方位-分维估值法的改进、分形模型在矿床中的应用、分形成矿(矿物富集)模型、"$p100/q100$"律及其应用、布朗运动与 R/S 分析和相关函数与功率谱密度.第四章提出了信息维分析基本原理,对信息维进行模拟研究,并将它应用于地学实例.第五章提出了多维自仿射分布的概念,论证了多维自仿射分布在截尾条件下具有尺度不变的分形性质,将分形理论研究推广到多维情况.通过实例,说明多维自仿射分布在实际问题中应用的方法和步骤,并解释了分维数的实际意义.该方法不仅适用于地球化学金元素和银元素数据,而且还可能适用于其他元素和地质数据,具有普遍的意义.第六章简述了混沌理论的基本概念,讨论了地质现象中的混沌表现与性质和矿化富集的混沌动力学.

赵鹏大院士对本书的初稿提出宝贵的修改意见,王仁铎教授仔细地阅读了本书的全文,对文字、公式和有关数据都做了认真的核对,并提出了许多宝贵的意见.在此,对他们所付出的辛勤劳动表示衷心感谢.

目　　录

前　言

第 1 章　分形理论……(1)

1.1　引言……(1)

1.2　分形理论简述……(2)

1.3　分维数的定义与计算……(5)

1.4　数学分形和统计分形……(7)

第 2 章　分形与地质现象……(8)

2.1　标度(尺度)不变性……(8)

2.2　地震……(10)

2.3　地貌……(12)

2.4　碎形与断裂……(13)

2.5　矿床(体)分布与品位和储量……(16)

2.6　地球化学景观的自相似……(18)

第 3 章　分形统计模型……(19)

3.1　自相似与自仿射……(19)

3.2　分形不变分布……(24)

3.3　分形统计模型……(27)

3.4　方位-分维估值法的改进……(34)

3.5　多重分形模型……(37)

3.6　分形模型与金矿床……(45)

3.7　分形成矿(矿物富集)模型……(52)

3.8　“$p100/q100$”律及其应用……(54)

第 4 章　信息维分析……(60)

4.1　信息维分析基本原理……(60)

4.2　信息维的模拟研究……(60)

4.3　应用实例……(61)

第 5 章　多维分形模型……(64)

5.1　多维分形模型……(64)

5.2　多维自仿射(self-affine)分布函数……(65)

第 6 章　混沌理论……(69)

6.1　混沌理论简述……(69)

6.2　混沌与地质现象……(71)

6.3　生态模型与 Logistic 映射……(75)

6.4　矿化富集的混沌动力学研究……(78)

参考文献 …………………………………………………………………………………… (84)
附录 A： 非线性模型简述 …………………………………………………………………… (89)
附录 B： 名词简释 ………………………………………………………………………… (92)
英文摘要 …………………………………………………………………………………… (94)

CONTENTS

Preface

Chapter 1 Fractal ······ (1)

1.1 Introduction ······ (1)

1.2 Brief fractal theory ······ (2)

1.3 Definition and calculation of fractal dimension ······ (5)

1.4 Mathematical fractal and statistical fractal ······ (7)

Chapter 2 Fractal and geological phenomena ······ (8)

2.1 Scale invariance ······ (8)

2.2 Earthquake ······ (10)

2.3 Geomorphology ······ (12)

2.4 Fragmentation and faults ······ (13)

2.5 Ore grade, tonnage and deposit distribution ······ (16)

2.6 Self-similarity of geochemical areas ······ (18)

Chapter 3 Study of statistical fractal model ······ (19)

3.1 Self-similarity and Self-affine ······ (19)

3.2 Fractal invariable distribution ······ (24)

3.3 Statistical fractal model ······ (27)

3.4 Improve on method of direction-fractal dimension ······ (34)

3.5 Multifractals model ······ (37)

3.6 Fractal model and gold mineral deposits ······ (45)

3.7 Fractal mineralization enrichment model ······ (52)

3.8 "p100/q100" law with application ······ (54)

Chapter 4 Analysis of information dimension ······ (60)

4.1 Fundamentals of information dimension Analysis ······ (60)

4.2 Simulation study on information dimension ······ (60)

4.3 Example: Au data of boreholes ······ (61)

Chapter 5 Study of multidimensional fractal model ······ (64)

5.1 Multidimensional fractal model ······ (64)

5.2 Multidimensional self-affine distribution function ······ (65)

Chapter 6 Chaos ······ (69)

6.1 Brief chaos theory ······ (69)

6.2 Chaos and geological phenomena ······ (71)

6.3 Zoological model and logistic map ······ (75)
6.4 Chaos dynamics on mineralization enrichment ······ (78)
References ······ (84)
Appendix A: Brief nonlinear regression model ······ (89)
Appendix B: Glossary of terms ······ (92)
Abstract in English ······ (94)

第1章　分形理论

1.1　引言

由于人类社会和自然界中广泛地存在无序、混乱、不规则和不光滑的复杂现象，传统的理论只能是简化或定性地刻画它们.分形理论的提出为揭示隐藏于混乱复杂现象中的精细结构和定量地刻画描述它们提供理论基础.

分形理论创立于20世纪70年代中期，其研究对象为自然界和社会活动中广泛存在的无序(无规则)而具有自相似性的系统.分形论借助于自相似性原理洞察隐藏于混乱现象中的精细结构；为人们从局部认识整体，从有限认识无限提供新的方法论；为不同学科发现规律性提供崭新的语言和定量的描述；为现代科学技术提供新思想新方法.分形理论不但为复杂的现象提供了一种简便的定量描述工具，而且它还是一种辩证思想方法和认识方法.部分与整体的相似性使得部分是整体的相对缩影，含有整体的信息，因而人们可以通过认识部分来认识整体.分形提供一种有用的经验公式，它提供对观测现象进行外推和解释的理性方法.我国古代就已具有朴素的分形思想："见瓶水之冰而知天下寒"，"见微而知著"，"察今则可以知古，察己则可以知人，古今一也，人与我同乐".

世界正经历深刻而巨大的变化，崭新的科学概念和思潮不断涌现，并形成各具特色的新学科，以迎接世界向着未来发展中面临的挑战.分形论诞生在以多种概念和方法相互撞击和汇合为特征的当代，人们把分形论、耗散结构和混沌称为20世纪70年代科学上的三大发现.十多年来的发展趋势表明，分形论正被众多学科竞相引入，其驱动力推动各学科的新发展.不同领域现象之间存在惊人的相似性，因此，分形论有可能成为联结现代各学科的纬线.分形的研究受到如此广泛重视的原因可归结为：一是它具有广泛而巨大的实用价值；二是它有着重大的理论价值，分形给人们展示了一类具有标度不变对称性的新世界，在世界中可能存在着新的物理规律和特征.

科学上有这样一个传统认识："地球科学的研究是会产生基础性的且对所有学科有影响的新概念，这些概念将不断革新我们对于自然界的认识".

分形论作为一种新理论要进一步发展，更加臻于完善.分形作为一种可以应用于众多领域的新方法，必将为更多的人所认识，得到更加广泛的应用.将分形理论应用于地球科学中必将产生深远的影响和巨大的作用.

正如美国著名物理科学家惠勒所说："可以相信，明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人"，这也许并不夸大.总之，在世界正经历着深刻而巨大变化的当今，分形论将为人们开阔视野，启迪思维，更新观念，激发智慧的强烈愿望作出应有的贡献.

1.2 分形理论简述

分形几何(Fractal Geometry)的概念是由曼德布罗特(B. B. Mandelbrot. 1975)在 1975 年首先提出的. 几十年来,它已经发展成为一门新型的数学分支. 这是一个研究和处理自然与工程中不规则图形的强有力的理论工具,它的应用几乎涉及自然科学的各个领域,甚至于社会科学,并且实际上正起着把现代科学各个领域连接起来的作用,分形是从新的角度解释了事物发展的本质.

分形(fractal)一词最早由 B. B. Mandelbrot 于 1975 年从拉丁文 fractus 创造出来,《自然界中的分形几何》(Mandelbrot, 1982)为其经典之作. 最先它所描述的是具有严格自相似结构的几何形体,物体的形状与标度无关,子体的数目 $N(r)$ 与线性尺度(标度 r)之间存在幂函数关系,即 $N(r) \propto 1/r^D$. 分形的核心是标度不变性(或自相似性),即在任何标度下物体的性质(如形状,结构等)不变. 数学上的分形实际是一种具有无穷嵌套结构的极限图形,分形的突出特点就是不存在特征尺度,描述分形的特征量是分形维数 D. 不过,现实的分形只是在一定的标度范围内呈现出自相似或自仿射的特性,这一标度范围也就称为(现实)分形的无标度区,在无标度区内,幂函数关系始终成立.

分形理论认为,分形内部任何一个相对独立的部分,在一定程度上都是整体的再现和相对缩影(分形元),人们可以通过认识部分来认识整体. 但是分形元只是构成整体的单位,与整体相似,并不简单地等同于整体,整体的复杂性远远大于分形元. 更为重要的是,分形理论指出了分形元构成整体所遵循的原理和规律,是对系统论的一个重要的贡献.

从分析事物的角度来看,分形论和系统论体现了从两个极端出发达到对事物全面认识的思路. 系统论从整体出发来确立各部分的系统性质,从宏观到微观考察整体与部分的相关性;而分形论则是从部分出发确立整体性质,沿着从微观到宏观的方向展开. 系统论强调部分对整体的依赖性,而分形论则强调整体对部分的依赖性,两者的互补,揭示了系统多层次面、多视角、多方位的联系方式,丰富和深化了局部与整体之间的辩证关系.

分形论的提出,对科学认识论与方法论具有广泛而深远的意义. 第一,它揭示了整体与部分之间的内在联系,找到了从部分过渡到整体的媒介与桥梁,说明了部分与整体之间的信息"同构". 第二,分形与混沌和现代非线性科学的普遍联系与交叉渗透,打破了学科间的条块分割局面,使各个领域的科学家团结在一起. 第三,为描述非线性复杂系统提供了简洁有力的几何语言,使人们的系统思维方法由线性进展到非线性,并得以从局部中认识整体,从有限中认识无限,从非规则中认识规则,从混沌中认识有序.

分形理论与耗散结构理论、混沌理论是相互补充和紧密联系的,都是在非线性科学的研究中所取得的重要成果. 耗散结构理论着眼于从热力学角度研究在开放系统和远离平衡条件下形成的自组织,为热力学第二定律的"退化论"和达尔文的"进化论"开辟了一条联系通道,把自然科学和社会科学置于统一的世界观和认识论中. 混沌理论侧重于从动力学观点研究不可积系统轨道的不稳定性,有助于消除对于自然界的确定论和随机论两套对立描述体系之间的鸿沟,深化对于偶然性和必然性这些范畴的认识. 分形理论则从几何角度,研究不可积系统几何图形的自相似性质,可能成为定量描述耗散结构和混沌吸引子这些复杂而无规则现象的有力工具,进一步推动非线性科学的发展.

分形理论是一门新兴的横断学科,它给自然科学、社会科学、工程技术、文学艺术等极广泛的学科领域提供了一般的科学方法和思考方式.就目前所知,它有很高程度的应用普遍性.这是因为,具有标度不变性的分形结构是现实世界普遍存在的一大类结构,该结构的含义十分丰富,它不仅指研究对象的空间几何形态,而是一般地指其拓扑维(几何维数)小于其测量维数的点集,如事件点的分布,能量点的分布,时间点的分布,过程点的分布,甚至是意识点、思维点的分布.

分形思想的基本点可以简单表述如下:分形研究的对象是具有自相似性的无序系统,其维数的变化是连续的.从分形研究的进展看,近年来,又提出若干新的概念,其中包括自仿射分形、自反演分形、递归分形、多重分形、胖分形等等.有些分形常不具有严格的自相似性,正如定义所表达的,局部以某种方式与整体相似.

分形理论的自相似性概念,最初是指形态或结构的相似性,即在形态或结构上具有相似性的几何对象称为分形,研究这种分形特性的几何称为分形几何学.随着研究工作的深入发展和领域的拓展,又由于一些新学科、如系统论、信息论、控制论、耗散结构理论和协同论等相继涌现的影响,自相似性概念得到充实与扩展,把信息、功能和时间上的自相似性也包含在自相似性概念之中.于是,把形态(结构)、或信息、或功能、或时间上具有自相似性的客体称为广义分形.广义分形及其生成元可以是几何实体,也可以是由信息或功能支撑的数理模型,分形体系可以在形态(结构)、信息和功能各个方面同时具有自相似性,也允许只在某一方面具有自相似性;分形体系中的自相似性可以是完全相似,这种情况是不多见的,也可以是统计意义上的相似,这种情况占大多数,相似性具有层次或级别上的差别.级别最低的为生成元,级别最高的为分形体系的整体.级别愈接近,相似程度越好,级别相差愈大,相似程度越差,当超过一定范围时,则相似性就不存在了.

分形具有以下几个基本性质:

(1)自相似性是指事物的局部(或部分)与整体在形态、结构、信息、功能和时间等方面具有统计意义上的相似性.

(2)适当放大或缩小分形对象的几何尺寸,整个结构并不改变,这种性质称为标度不变性.

(3)自然现象仅在一定的尺度范围内,一定的层次中才表现出统计自相似性,在这样的尺度之外,不再具有分形特征.换言之,在不同尺度范围或不同层次上具有不同的分形特征.

(4)在欧氏几何学中,维数只能是整数,但是在分形几何学中维数可以是整数或分数.

(5)自然界中分形是具有幂函数分布的随机现象,因而必须用统计的方法进行分析和处理.

目前分形的分类有以下几种:①确定性分形与随机分形;②比例分形与非比例分形;③均匀分形与非均匀分形;④理论分形与自然分形;⑤空间分形与分形事件(时间分形).

分形研究应注意以下几个问题:

(1)统计性(随机性).研究统计意义上的分形特征,由统计数据分析中找出稳态规律,才能最客观地描述自然纹理与粗糙度.从形成过程来看,分形是一个无穷随机过程的体现.如大不列颠海岸线的复杂度是由长期海浪冲击、侵蚀及风化形成的,其他许多动力过程、凝聚过程也都是无穷随机的,不可能由某个特征量来形成.因此,探讨分形与随机序列、信息熵之间的内在联系是非常必要的.

(2)全局性.分形是整体与局部比较而存在的,它包括多层嵌套及无穷的精细结构.研究一个平面(二维)或立体(三维)的粗糙度,要考虑全局范围各个方向的平稳性,即区别各向同性或各向异性分布规律.

(3)多标度性.一个物体的分形特性通常是在某些尺度下体现出来,在另一些尺度下则不是分形特性.理想的无标度区几乎不存在,只有从多标度中研究分形特性才较实际.

模型的建立,其实是分形(相似性)模型的建立.利用相似性原理,建立模型单元,对预测单元进行分形处理和预测.

分形的正问题是给出规律,通过迭代和递推过程产生分形,产生的几何对象显然具有某种相似性.反问题叫做分形重构.广义而言,它指任何一个几何上认为是分形的图形,能否找到产生它的规律,以某种方式来生成它.当我们研究非线性动力学时,混沌动力学会产生分形,而分形重构则是动力学系统研究的逆问题.由于存在"一因多果"、"多因一果",由分维重构分形还需加入另外参数.

临界现象与分形有关.重整化群是研究临界现象的一种方法.该方法首先对小尺寸模型进行计算,然后被重整化至大的或更大的尺度.如果我们有网格状的一组元素,每个元素具有一定的渗透概率,重整化群方法的一个应用就是计算渗透的开始问题.当元素渗透率达到某一临界值时,这一组元素的渗透流动就会突然地发生.一旦流动开始后,相联结元素之间便具有分形结构.

自组织临界现象的概念可以用来分析地震活动性.按照这个概念,一个自然界的系统处在稳定态的边缘,一旦偏离这个状态,系统会自然地演化回到边缘稳定的状态.临界状态不存在天然的长度标度,因而是分形的.简单的细胞自动机模型可以说明这种自组织临界现象.

分形理论作为非线性科学的一个分支,是研究自然界空间结构复杂性的一门学科,可从复杂的看似无序的图案中,提取出确定性、规律性的参量.既可以反演分形结构的形成机制,又可以从看似随机的演化过程(时间序列)中推测体系演化的结果,近年来倍受地球科学家的注意.在地质统计学,孔隙介质、储层非均匀性及石油勘探开发,固相表面或两相界面,岩石破裂、断层及地震和地形、地貌学等地球科学各个领域得到了广泛的应用.

自20世纪80年代初以来,一些专家学者注意到了地质学中的自相似现象,并试图将分形理论运用于地学之中.以地质学中普遍存在的自相似性现象、地质体高度不规则性和分割性与层次性、地质学中重演现象的普遍性、分形几何学在其他学科中应用实例与地质学中的研究对象的相似性、地质学中存在一些幂函数关系等为内在基础,以地质学定量化的需要、非线性地质学的发展及线性地质学难以解决诸多难点、分形理论及现代测试和电算技术的发展为外在基础,使分形理论与地质学相结合成为可能,它的进一步发展将充实数学地质的研究内容并推动数学地质迈上一个新台阶.目前,分形理论应用于地球科学主要包括以下两个方面的研究:

(1)对"地质存在"——地质体或某些地质现象的分形结构分析,求取相应分形维数,寻找分维值与有关物理参量之间的联系,探讨分形结构形成的机理.这方面的研究相对较多,如人们已对断裂、断层和褶皱等地质构造(现象)进行了分形分析,探讨分维值与岩石力学性质等之间的关系;从大到海底(或大陆)地貌,小到纳米级的微晶表面证实了各类粗糙表面具有分形特征;计算了河流网络,断裂网络,地质多孔介质和粘性指进的分维值以及脉厚与品位或品位与储量等之间的分形关系.

（2）对“地质演化”——地质作用过程进行分形分析，求取分形维数并考察其变化趋势，从而预测演化的结果. 例如，科学家们通过对强震前小震分布的分形研究表明，强震前普遍出现降维现象，从而为地震预报提供有力理论工具. 当今的研究，不仅仅局限于分维数的计算，分形模型的建立；而更着重于解释地质学中引起自相似性特征的原因或成因，自相似体系的生成过程及模拟，以及用分形理论解决地质学中的疑难问题与实践问题，如地震和灾害地质的预报、石油预测、岩体力学类型划分、成矿规律与成矿预测等. 地球化学数据在很大程度上反映了地质现象的结构特征. 分维是描述分形结构的定量参数，它有可能揭示出地球化学元素空间分布的内在规律.

分维与地质异常有一定的关系. 我们可以对不同地段以一定的地质内容为参量对比它们分维大小的差异，以此求得结构地段的位置及范围，从而确定地质异常；也可以对不同时期可恢复的历史地质结构格局分别求分维，还可以确定分维背景值. 分形是自然界中普遍存在的一种规律性.

总之，分形理论已经渗透到地学领域的各个角落，应用范围涉及地球物理学、地球化学、石油地质学、构造地质学及灾害地质学等.

1.3 分维数的定义与计算

分形（B. B. Mandelbrot，1982）是其组成部分以某种方式与整体相似的形（A fractal is a shape made of parts similar to the whole in some way）. 它是以分维数、自相似性、统计自相似性和幂函数等为工具，研究不具有特征标度，极不规则和高度分割但具有自相似性的复杂现象（如地形起伏、云朵、水系、树的形态等），定量描述这种自相似性的参数称为“分维数”或简称“分维”，记为 D，它可以是分数.

维数是一定时空的数值特征. 普遍应用维数观，正是现代非线性科学获得的共识. 低维与高维、有限维与无限维、整数维与分数维的转化，在探索复杂世界的物质机制中已充分显示了它的威力.

1919 年数学家豪斯道夫引入豪斯道夫维. 他提出连续空间的概念，也就是空间维数不是跃变的，而是连续变化的，即可以是整数，也可以是分数，通过具体计算来确定维，该维数称为豪斯道夫维，记为 D_f. 例如，对于三维图形，考虑一个棱长为单位长度的立方体，若令每个棱边长度放大两倍，则立方体体积放大 8 倍，其表达式为 $2^3=8$. 例如，对于一个 D_f 维的几何对象，若每个棱边长度都放大 L 倍，则这个几何对象相应地放大 K 倍，其 D_f、L 和 K 三者关系应为 $L^{D_f}=K$. 该式两边取对数后，则 $D_f=\ln K/\ln L$. 对具有奇异构形的分形，这里 D_f 一般是分数. 豪斯道夫维数衍生的各种分形维数，如容量维、信息维、关联维、质量维、空隙维、相似维等等，可以从不同侧面描述客观世界的复杂现象. 它们的一个共性，就是在双对数坐标系的尺度变换下，严格地或统计地保持不变.

在测量分维时，有一规律（通常称为 zero-sets）是有用的. 传统的欧氏几何体与一平面相交，形成图形的维数要减少一维；三维球变成二维圆；二维平面变成一维线；一维线变成零维点. 分形和传统的欧氏几何体一样，统计分形体的分维是 D，在与其相交的平面上进行测量，分维是 $D-1$，在与其相交的直线上测量，分维是 $D-2$. 它们与平面相交构成的图形要减少一维；它们与直线相交形成的点集要减少二维.

不同的分维数往往刻画不同的物理类型，划分不同成因，不同性质的群体. 如某些相变的发生只有在二维及以上的空间中才会出现，在一维的情况下就不行. 因此，在研究某一类事物的规律时，往往需要借助于分维数的差异来帮助判别和分析. 例如，将具有不同面积的平面图形放到一维坐标系中，其测度(长度)都是无穷大；放到三维空间，其测度(长度)都是无穷小；只有在二维坐标系中，它们在面积方面的差异才能显现出来. 另一方面，由点到线，由线到面和由面到体，随着维数的增加，它们所刻划的客体复杂程度也相应增加，且其占领空间的能力也随之增强. 因此，维数的差异直观地反映了客体复杂程度的差异.

分形的定义：设集合 $A \in E^n$(E^n 是 n 维欧氏空间)的豪斯道夫维为 D_f 和拓扑维为 D_t，如果公式 $D_f \geqslant D_t$ 成立，则称集合 A 是分形集(或分形)(A fractal is by definition a set for which the Hausdorff Besicovitch dimension exceeds the topological dimension).

例如康托尔集合，$D_f = \ln 2/\ln 3 \approx 0.6301$，而 $D_t = 0$，有 $D_f > D_t$，故康托尔集合是一种分形. 又如科曲折线，$D_f = \ln 4/\ln 3 \approx 1.2618$，而 $D_t = 1$，有 $D_f > D_t$，故科曲折线也是一种分形.

由于研究的具体对象(分形)不同，其分维数计算的具体形式和名称也有多种. 最常见的分维数有相似维(similarity dimension)或容量维(capacity dimension) D_0、信息维(information dimension) D_1、关联维(correlation dimension) D_2 和广义维(generalized dimension) D_q.

1. 相似维(similarity dimension)或容量维(capacity dimension) D_0

在测量地质体边界的长度时，设测量尺度为 r，覆盖整个边界的最少次数为 $N(r)$，此时将容量维数定义为：

$$D_0 = \lim_{r \to 0} \ln N(r)/\ln(1/r)$$

将这一定义推广到 n 维空间 E^n(E^n 为 n 维 Euclide 空间)中，上式中的 r 为覆盖 E^n 中图形所需的立方体的边长或球体的直径，$N(r)$ 为所需的立方体或球体的最少数目. 可以证明 $D_0 = D_f$(豪斯道夫维数).

2. 信息维(information dimension) D_1

容量维数 D_0 只考虑了覆盖图形所需的立方体或球体的数目与其边长或直径的关系. 对于那些非确定性的事物，一般是用概率的形式表示出来的，为此引入信息维数的定义：

$$D_1 = \lim_{r \to 0} \sum_i P_i \ln P_i/\ln(r)$$

式中 P_i 是覆盖概率，当用边长为 r 的小盒子去覆盖分形结构时，P_i 是分形结构中某些点落入小盒子的概率. 如果 $P_i = 1/N(r)$ 时，则有 $D_1 = D_f$.

3. 关联维(correlation dimension) D_2

P. Grassberger 和 J. Procaccia(1983)应用关联函数 $C(r)$ 给出了关联维数的定义：

$$D_2 = \lim_{r \to 0} C(r)/\ln(r)$$

式中 $C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1} H(r - |X_i - X_j|)$ 是相空间中两点之间距离小于 r 的概率，$|X_i - X_j|$ 为两点距离间的向量距离，r 为指定的距离上限，$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{当 } z \geqslant 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } z < 0 \text{ 时} \end{cases}$，它是 Heavisideh 函数.

4. 广义维(generalized dimension) D_q

$$D_q = \lim_{r \to 0} \lim_{q_i \to q} (1/(q_i - 1)) \ln \sum_i P_i^{q_i}/\ln r \qquad q = -\infty, \cdots, -1, 0, 1, \cdots \infty$$

式中 P_i 是覆盖概率，当用边长为 r 的小盒子去覆盖分形结构时，P_i 是分形结构中某些点落入小盒子的概率. 当 q 取不同值时，D_q 表示不同分维，如 $D_{q=0}=D_0$，$D_{q=1}=D_1$，$D_{q=2}=D_2$. 应当注意上述分维数之间的关系只是形式上(或定义上)的，但在实际问题计算中，上述关系不一定成立.

5. 分维 Brown 函数

严格的自相似性在自然界并不多见，为了描述大量自然形状，需要用统计自相似性的概念来推广分维的定义，这就要用到分维 Brown 函数.

设 $x\in E^n$(E^n 为 n 维 Euclide 空间)，$f(x)$是关于点 x 的随机实值函数，若存在常数 H ($0<H<1$)使得函数：

$$F(t)=P_r\{(f(x+\Delta x)-f(x))/(|\Delta x|^H)<t\}$$

是一个与 x，Δx 无关的分布函数，则称 $f(x)$为分维 Brown 函数，其分维值为：$D_B=n+1-H$.

1.4 数学分形和统计分形

自然界的许多事物和现象表现出极为复杂的形态，并非所显示的那样理想化. 自相似性或标度不变性往往以统计方式表现出来，即当改变尺度时，在该尺度包含的部分统计学的特征与整体是相似的. 这种分形是数学分形的一种推广，叫做统计分形.

数学分形是一种理想化的情况，它必须具备两个条件：

(1) 数学分形曲线必须具有无穷的“层次”结构，像 Koch 曲线那样；数学分形必须是无限点的集合，像 Cantor 集合那样. 只有无穷的层次结构，才能使自相似性或标度不变性处处成立.

(2)数学分形的任何一个局部放大后，都和整体在形状、数量以及统计分布上完全相似.

数学分形是分析自然界复杂事物的一个数学模型. 要具体应用到真实的自然现象，应对数学分形做些推广和修正：①由无穷“层次”结构到有限的“层次”结构，或由无穷集合到有限集合的推广，这里就产生了在一定范围内自相似性或标度不变性成立的问题，即无标度区间的问题；②由严格的数学相似到近似的统计相似性的推广.