初中数学

基础知识与例题分析

北京师范大学出版社

初 中 数 学

基础知识与例题分析

任中文　段炳燮　蒋佩锦　韩玉琴
乔家瑞　陈俊辉　刘绍贞　张鸿菊　编

北京师范大学出版社

初　中　数　学
基础知识与例题分析
任中文等 编
*
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷二厂印刷
*
开本：787×1092 1/32　印张：14.125　字数：301千
1983年12月第1版　1983年12月第1次印刷
印数：1—280,000
统一书号：7243·179　　定价：1.25元

前　言

数学是学习和研究现代科学技术必不可少的基础知识和基本工具，对于我国的四化建设具有十分重要的作用。而初中数学在数学学习中起着承前启后的作用，所以，初中数学的内容一定要掌握好。为此，我们根据全日制十年制初中数学教学大纲及统编教材编写了本书。全书按知识系统共分十三章，每章包括基础知识、典型例题分析和练习题三部分内容。基础知识力求系统全面，简明扼要；典型例题分析给出了解题的一些思路、方法和技巧；练习题分为基本练习题和综合练习题。基本练习题主要是对基础知识进行训练，综合练习题主要是培养读者分析问题和解决问题的能力。最后还安排了以检查学习效果为目的的总复习题。

本书可以在学习过程中使用，也可以在学完初中数学后进行复习巩固时使用。本书可作为在职职工、自学青年和初中学生学习初中数学时的参考书，也可作为初中数学老师的教学参考书。

本书是由北京市部分重点中学的一些老师编写的，最后由乔家瑞老师审阅了全部原稿，并提出了一些有益的建议。限于我们的水平，必有错误与不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者

1983.7.

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分　三　　角

第三部分　几　　何

第四部分　总复习题

第五部分　提示和答案

第一部分 代 数

第一章 实 数

一、数的概念

1.自然数集合

(1) 自然数 称1、2、3、4、5、……这些数为自然数，自然数也叫做正整数.

(2) 质数和合数 只能被1和它本身整除的自然数叫做质数(又叫素数). 比如2、3、5、7等，都是质数. 除了能被1和它本身整除外，还能被其它的数整除的自然数，叫做合数. 比如4、6、12、25等都是合数. 1既不是质数，也不是合数.

(3) 分解质因数 把一个合数表示成若干个质因数乘积的形式，叫做分解质因数. 比如把30分解质因数，即写成$30=2\times3\times5$的形式.

(4) 最大公约数 如果a能被b整除，那么b就叫做a的约数. 几个数公有的约数，叫做这几个数的公约数，其中最大的一个，就叫做这几个数的最大公约数.

(5) 最小公倍数　几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数，其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数.

(6) 互质　如果两个自然数的最大公约数是1，那么这两个自然数叫做互质.

2.整数集合

(1) 整数　称0、±1、±2、±3……为整数. 整数包括正整数、零、负整数三部分. 零，既不是正整数，也不是负整数.

(2) 奇数和偶数　不能被2整除的整数叫做奇数，能被2整除的整数叫做偶数. 奇数一般表示为$2n-1$，偶数一般表示为$2n$，其中n为整数.

3.有理数集

(1) 有理数　整数和分数统称有理数. 任何有理数都可以表示成$\frac{n}{m}$(m和n为互质的整数，$m\neq0$)的形式. 整数也可以看成是分母是1的分数.

(2) 数轴　数轴是一条规定了方向、原点、单位长度的直线. 数轴可以表示数，正数用数轴上原点右面的点表示，负数用数轴上原点左面的点表示，零用原点表示.

(3) 相反数　在数轴上原点的两侧，离开原点距离相等的两个点表示的两个数，叫做互为相反数. 比如5和-5，3和-3。零的相反数是零.

(4) 绝对值　在数轴上表示一个数的点到原点的距离，叫做这个数的绝对值. 显然正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数. 比如 $|3|=3$，$|-3|=3$。a的绝对值可以表示成：

$$|a| = \begin{cases} a\ (\text{当}a>0\text{时}), \\ 0\ (\text{当}a=0\text{时}), \\ -a\ (\text{当}a<0\text{时}). \end{cases}$$

（5）比较大小

在数轴上表示两个数的点，右边的点所表示的数大，左边的点所表示的数小。

4.实数集

（1）无理数　无限不循环小数叫做无理数。

（2）实数　有理数与无理数统称为实数。

（3）数系表

$$\text{实数}\begin{cases} \text{有理数}\begin{cases} \text{整数}\begin{cases} \text{正整数} \\ \text{零} \\ \text{负整数} \end{cases} \\ \text{分数}\begin{cases} \text{正分数} \\ \text{负分数} \end{cases} \end{cases} \\ \text{无理数}\begin{cases} \text{正无理数} \\ \text{负无理数} \end{cases} \end{cases}$$

二、实数的运算

1.运算法则　　（略）

2.运算定律

（1）交换律　$a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$；

（2）结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$，

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

（3）分配律　$m(a+b)=ma+mb$。

3.运算顺序

（1）在有括号的式子内，一般先进行括号内的运算。

（2）在没有括号的式子中，先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减。

（3）在同一级运算中，如果没有括号，应从左至右依次进行运算。

（4）有时，可以利用运算定律变更式子中各数的运算顺序，达到简化运算的目的。

例1 把360分解质因数。

解：

$$\begin{array}{r|r}
2 & 360 \\ \hline
2 & 180 \\ \hline
2 & 90 \\ \hline
5 & 45 \\ \hline
3 & 9 \\ \hline
 & 3
\end{array}$$

$\therefore\quad 360=2^3\times3^2\times5$。

上述方法称做短除．利用短除可以把一个正整数分解为质因数的连乘积。

例2 求 36、48、60 的最大公约数与最小公倍数。

解：

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 36 & 48 & 60 \\ \hline
2 & 18 & 24 & 30 \\ \hline
3 & 9 & 12 & 15 \\ \hline
 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

$\therefore$ 最大公约数是 $2\times2\times3=12$，

最小公倍数是 $2\times2\times3\times3\times4\times5=720$。

求最大公约数的方法是：用各数公共的质因数连续去除，

一直除到所有的商数互质为止，所有除数的乘积，就是这几个数的最大公约数。

求最小公倍数的方法是：先用各数的公共质因数连续去除，除到所有商数互质后，如果其中有部分数有公共质因数，再继续除下去，不能被整除的数，都照写在商的位置上，一直除到任意两个商数都互质为止。把所有的除数及最后的商数连乘起来，即得最小公倍数。

例3 在什么条件下 $\frac{b}{a}$ 是正数？是负数？为零？没有意义？

解： 当a与b同号时，$\frac{b}{a}$是正数，

当a与b异号时，$\frac{b}{a}$是负数，

当$b=0$，$a\neq0$时，$\frac{b}{a}$为0，

当$a=0$时，$\frac{b}{a}$无意义。

例4 证明两个偶数之和仍是偶数。

证明： 设两个偶数分别为$2m$和$2n$，其中m和n都是整数。

$\because$ $2m+2n=2(m+n)$，

由于右端的结果是2的倍数，

$\therefore$ 两个偶数之和仍为偶数。

例5 求最大公约数为12，最小公倍数为420的两个正整数。

解： 设二数为x、y，由条件有$x=12a$，$y=12b$（a，b互

质)，由 $12ab=420$，

$\therefore$ $ab=35$，因此 $a=1$，$b=35$或$a=5$，$b=7$。

$\therefore$ $x=12$，$y=420$或$x=60$，$y=84$。

例6 在什么条件下，下列各式成立?

(1) $|x|=x$； (2) $|x-2|=2-x$；

(3) $2x<x$。

解：(1) 当$x\geqslant0$时，$|x|=x$；

(2) 当$x\leqslant2$时，$|x-2|=2-x$；

(3) 当$x<0$时，$2x<x$。

例7 化简 $\dfrac{|x+1|}{x+1}+\dfrac{|x-2|}{x-2}$ $(-1<x<2)$。

解：$\because$ $-1<x<2$，

$\therefore$ $x+1>0$， $x-2<0$。

$$\therefore \text{原式}=\frac{x+1}{x+1}+\frac{2-x}{x-2}$$

$$=1+(-1)$$

$$=0.$$

例8 解方程 $|x-3|=2$。

解：当$x\geqslant3$时，原方程可化为$x-3=2$，

$\therefore$ $x=5$；

当$x<3$时，原方程可化为$3-x=2$，

$\therefore$ $x=1$。

$\therefore$ 原方程的解是$x=5$，$x=1$。

例9 回答下列问题：

(1) a一定是正数吗? $-a$一定是负数吗?

(2) $|a|$一定是正数吗? $-|a|$一定是负数吗?

(3) $a+b$一定大于$a-b$吗?

解:(1) 因为a可以表示正数、负数或零,所以a不一定是正数,$-a$也不一定是负数。

(2) 因为当$a=0$时,$|a|=0$,所以$|a|$ 不一定是正数,$-|a|$也不一定为负数。

(3) 当$b>0$时,$a+b>a-b$;

当$b=0$时,$a+b=a-b$;

当$b<0$时,$a+b<a-b$。

所以$a+b$不一定大于$a-b$。

当我们判断一个含有字母式子的值的符号时,一定要考虑到字母表示数的任意性,还应注意到字母代表零时的特殊情况。

例10 计算下列各式:

(1) $a+|a|$; (2) $(a-1)+|a-1|$;

(3) $|a+2|+|a-2|$。

解:(1) 当$a\geqslant0$时,$a+|a|=a+a=2a$,

当$a<0$时,$a+|a|=a-a=0$;

(2) 当$a\geqslant1$时,

$(a-1)+|a-1|=a-1+a-1=2a-2$,

当$a<1$时,

$(a-1)+|a-1|=a-1+1-a=0$;

(3) 当$a\geqslant2$时,

$|a+2|+|a-2|=a+2+a-2=2a$,

当$-2\leqslant a<2$时,

$|a+2|+|a-2|=a+2+2-a=4$,

当 $a<-2$时,

$$|a+2|+|a-2|=-a-2-a+2=-2a.$$

遇有绝对值符号内含有字母的算式时，可取绝对值为零时字母的值为界限，分情况把绝对值符号脱掉，然后再进行计算。

例11 比较下列每组三个数的大小：

(1) π、3.1415、$\dfrac{22}{7}$；

(2) $-\dfrac{5}{6}$、$-\dfrac{6}{7}$、-0.85.

解：(1) $\because$ $\pi=3.14159\cdots\cdots$，$\dfrac{22}{7}=3.14285\cdots\cdots$，

$\therefore$ $3.1415<\pi<\dfrac{22}{7}$；

(2) $\because$ $\dfrac{5}{6}=0.8333\cdots\cdots$，$\dfrac{6}{7}=0.857\cdots\cdots$，

$\therefore$ $-\dfrac{6}{7}<-0.85<-\dfrac{5}{6}$.

例12 下列各数中，最小的正数是哪一个：

$$10-3\sqrt{11}，3\sqrt{11}-10，18-5\sqrt{13}，$$

$$51-10\sqrt{26}，10\sqrt{26}-51.$$

解：把原数都作如下变形：$10-3\sqrt{11}=\dfrac{1}{10+3\sqrt{11}}$，

$3\sqrt{11}-10=\dfrac{-1}{3\sqrt{11}+10}$，$18-5\sqrt{13}=\dfrac{-1}{18+5\sqrt{13}}$，

$51-10\sqrt{26}=\dfrac{1}{51+10\sqrt{26}}$，$10\sqrt{26}-51=\dfrac{-1}{51+10\sqrt{26}}$.

$\therefore$ 最小的正数是$51-10\sqrt{26}$。

例13 计算 $3\frac{1}{4}-\left(+4\frac{5}{12}\right)-\left(-12\frac{1}{6}\right)+\left(+2\frac{1}{3}\right)$

$$-\left(+5\frac{1}{6}\right)-\left(-2\frac{1}{4}\right).$$

解：原式$=3\frac{1}{4}-4\frac{5}{12}+12\frac{1}{6}+2\frac{1}{3}-5\frac{1}{6}+2\frac{1}{4}$

$$=3\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}+12\frac{1}{6}-5\frac{1}{6}-4\frac{5}{12}+2\frac{1}{3}$$

$$=5\frac{1}{2}+7-2\frac{1}{12}$$

$$=10\frac{5}{12}.$$

例14 计算 $3.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+4\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\right].$

解：原式$=3\frac{3}{4}-\left[-\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right]$

$$=3\frac{3}{4}-\left(4\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=3\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}$$

$$=-1\frac{1}{12}.$$

进行有理数加减混合运算应注意：

（1）将原式统一化成加法，再省略加号。

（2）如式中有相反数，先将它们合并为零。

(3) 利用交换律或结合律，可以把正数和负数分别合并计算，然后再将结果相加。

(4) 遇有分数计算时，可把同分母或分母间有倍数关系的分数合并在一起，比较简便。

例15 计算 $(-2)\times(-3)\times(+5)\times(-12)\div(-5)$。

解：原式 $=2\times3\times5\times12\div5$

$=72$。

例16 计算 $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{2}{5}\right)\times(-0.25)\times\frac{4}{5}$。

解：原式 $=\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{4}{5}$

$=\frac{5}{16}$。

进行有理数乘除混合运算应注意：

(1) 应先确定算式的符号，再求其绝对值．积的符号决定于因数中负数的个数．当负因数有奇数个时，积为负，当负因数有偶数个时，积为正。

(2) 遇有分数乘除混合运算时，应将除化为乘。

(3) 遇有小数和分数混合乘除运算时，应将小数化为分数。

例17 计算 $\left[2\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\times\sqrt[3]{-8}\div\frac{1}{6}\right]\times(-6)$.

解：原式 $=\left[\frac{7}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\times(-2)\times6\right]\times(-6)$

$=\left[-\frac{7}{6}+8\right]\times(-6)$

$$=7-48$$
$$=-41.$$

例18 计算 $-0.75^2\div\left(-1\frac{1}{2}\right)^3+(-1)^6\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$。

解： 原式 $=-\left(\frac{3}{4}\right)^2\div\left(-\frac{3}{2}\right)^3+1\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$

$$=-\frac{9}{16}\times\left(-\frac{8}{27}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{36}$$

$$=\frac{7}{36}.$$

进行四则混合运算时应注意：

（1）运算的顺序是先乘方，后乘除，再加减。

（2） $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 与 $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ 不同，不要混淆。

基本练习题

1．填空：

（1）最小的正整数是____，最大的负整数是____，最小的质数是____。

（2）绝对值等于 5 的数是____。

（3）m是____时，$|m|=-m$。

（4）3.1416、π、$\sqrt{2}$、$-\frac{2}{3}$、$\sqrt{9}$、0中，有理数有____，无理数有____。