

五 專 用 書

商 科 數 學

(上 冊)

戴 秉 彝 合 編
李 克 超

國 家 科 學 委 員 會 補 助

國 立 編 譯 館 出 版
臺 灣 中 華 書 局 印 行

五 專 用 書

商 科 數 學

上 冊

戴李

秉克

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

國家科學委員會補助

國 立 編譯

臺灣中華書局印行

中華民國六十四年八月初版

五專
用書
商科數學 (全二冊)

上冊平裝基本定價肆元捌角正

(郵運滙費另加)

編著者 戴秉彝·李克超

著作權所有人 國立編譯館

補助機關 國家科學委員會

臺灣中華書局股份有限公司代表

發行人 熊鈍生

臺北市重慶南路一段九十四號

行政院新聞局出版

臺業字第捌叁伍號

臺灣中華書局印刷廠

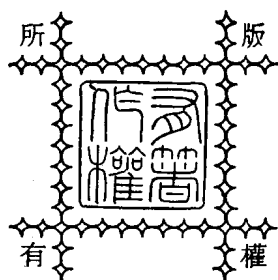
臺中市華書局

臺北市重慶南路一段九十四號

郵政劃撥帳戶：三九四二號

Chung Hwa Book Company, Ltd.

94, Chungking South Road, Section 1, Taipei, Taiwan, Republic of China



本書局登記證字號
印刷者
發行處

(臺總)平甲書

編輯大意

本書分上下兩冊，供商業專科學校一、二年級數學教學之用。搜集資料時，曾假定讀者對國中新數學已有初步瞭解，故盡量避免雷同。注重實用，但亦未忽略理論。上冊從邏輯推理開始，次即介紹集合觀念。書中幾何部分，取材自 SMSG 一書，拮為六章，前四章篇列較簡，作為引導，後二章納入下冊內容。繼之以實用數學——代數、基本解析幾何、函數觀念以及三角學等各章。一方面幫助學生對國中數學作一綜合複習；一方面開放研究新數學之實用與理論的門徑。不等式觀念，為工商管理及生產控制構想之最基層知識，讀者不應漠視之。複數在應用方面亦極重要，而財務數學，更為現代國民生活日計盈餘所必需。皆于上冊中一一簡介，以引起讀者之注意。

下冊泛論實用代數、三角、以及解析幾何，並引用矢量以處理一些幾何中的事例，而特別注意到坐標軸之變換。概率一章，以新的集合觀念作基礎而說明實況，深入淺出，讀之興味盎然。體積、表面積、圓周及圓面積等公式，為實用之所必需，其來歷亦于冊中述及之。篇末四章，對代數函數之微分與積分作一簡介，為商科高年級學生接受數理經濟、統計等學科預立基礎，乃本教材特色之一。內容自最淺近求積之方法說起，讀者如能對變數及函數各觀念作深一層觀察與推展，不難融匯貫通。

本書說理謹嚴，例證特多，每逢介紹一重要新觀念之際，必先于某處略為提及，使讀者腦中預存一概略影像，爾後便易于接受。又常注及數學界某偉人事略，以提高讀者的興味與嚮往。

本書某些章節或習題之前標有 * 符號者，表示該節內容（說理及方法）過於簡易，或過於生澀，或艱難，皆可退為參考資料，請執教者斟酌學生程度取舍之。

本書編輯上為一新嘗試，將幾何、代數、三角以及微積分等科學縮編成兩小冊，難免有掛漏之虞，敬祈海內外方家及教授同道，惠予指正，幸甚！

編 者 謹識

商 科 數 學

上 冊 目 錄

第一章 數理邏輯簡介 1

- | | |
|---------------|-----------|
| 1-1 命題與推理 | 1-2 命題的連結 |
| 1-3 定量化詞 | 1-4 數學的論證 |
| 1-5 充分條件與必要條件 | |

第二章 基本觀念 13

- | | |
|--------------------|--------------|
| 2-1 無定義名詞，公設，公理，定理 | 2-2 集合 |
| | 2-3 集合的構式 |
| 2-4 集合圖解 | 2-5 有限集合計數定理 |

第三章 角與三角形 25

- | | |
|-----------------|---------------|
| 3-1 基本名詞及其表示法 | 3-2 角的全等與度量 |
| 3-3 有關角的名詞與定理 | 3-4 三角形及其有關名詞 |
| 3-5 全等概念與三角形的全等 | 3-6 幾何不等量 |

第四章 直線圖形問題 54

- | | |
|---------|-------------|
| 4-1 平行線 | 4-2 三角形與四邊形 |
|---------|-------------|

第五章 面積，比例及相似形 66

- | | |
|------------------|--------------|
| 5-1 直線形的面積 | 5-2 比與比例 |
| 5-3 成比例的基本定理及逆定理 | 5-4 相似的基本定理 |
| | 5-5 相似三角形的面積 |

第六章 直線，線段與圓的關係 87

- | | |
|--------------|------------|
| 6-1 圓與切線 | 6-2 圓弧與全等弧 |
| 6-3 內接角與角所截弧 | 6-4 割線定理 |
| 6-5 基本作圖 | |

第七章 代數的基本論題 111

- | | |
|---------------|------------------|
| 7-1 實數系 | 7-2 實數運算的基礎 |
| 7-3 乘法與除法 | 7-4 加法與減法 |
| 7-5 基本運算中的零 | 7-6 分群的號 |
| 7-7 實數尺度與不等關係 | 7-8 有理數與無理數 |
| 7-9 分數的基本運算 | 7-10 正整數指數 |
| 7-11 平方根 | 7-12 多項式的乘法與除法 |
| 7-13 二項式的積 | 7-14 關於析因式的術語 |
| 7-15 二項式的立方 | 7-16 二相似冪的和與差 |
| 7-17 分式的簡化 | 7-18 分式加法 |
| 7-19 分式的乘法與除法 | 7-20 關於方程式的術語 |
| 7-21 一次方程式 | 7-22 不產生等值方程式的運算 |

第八章 根式與指數 154

- | | |
|-------------|-----------------|
| 8-1 虛數的基礎 | 8-2 任何階的根 |
| 8-3 根式的基本性質 | 8-4 以分數、零及負數作指數 |

- | | | | |
|-----|---------|-----|--------------|
| 8-5 | 根式的基本運算 | 8-6 | 分母的有理化 |
| 8-7 | 根指數上的運算 | 8-8 | 自混合的分數指數變成根式 |

第九章 函數與圖形簡介.....168

- | | | | |
|-------|----------------------|-------|------------|
| 9-1 | 解析幾何緣起 | 9-2 | 有向線段 |
| 9-3 | 直角坐標 | 9-4 | 距離公式 |
| 9-5 | 變數與常數 | 9-6 | 含二變數方程式的作圖 |
| 9-7 | 軌跡方程式 | 9-8 | 直線的斜率 |
| 9-9 | xy 平面中直線的標準
方程式 | 9-10 | 一次普通方程式 |
| 9-12 | 由方程式定義的函數 | 9-11 | 函數的觀念 |
| *9-14 | 二或二個以上變數的函
數 | 9-13 | 函數的記法 |
| | | *9-15 | 函數的代數 |
| | | 9-16 | 含一個變數的多項式 |

第十章 含單變數的二次方程式.....204

- | | | | |
|------|---------|------|-----------|
| 10-1 | 純二次方程式 | 10-2 | 由析因式以解方程式 |
| 10-3 | 二次根公式 | 10-4 | 方程式的圖解 |
| 10-5 | 根的特徵 | 10-6 | 二次函數的析因式 |
| 10-7 | 二次形的方程式 | 10-8 | 無理方程式 |

第十一章 方程式組.....223

- | | | | |
|------|------------|------|------------------|
| 11-1 | 兩個線性方程式組的解 | 11-2 | 含二變數二次方程式的
圖形 |
| 11-3 | 二次方程式組的圖解 | | |
| 11-4 | 一簡單系的代數解法 | 11-5 | 一系兩個二次方程式的
解法 |

第十二章 有限級數..... 242

- | | |
|-----------------|---------------------|
| 12-1 算術級數 | 12-2 幾何級數 |
| 12-3 調和級數 | 12-4 算術、幾何及調和三中項的關係 |
| 12-5 項數無窮多的幾何級數 | 12-7 正整幂二項式的展開 |
| 12-6 無窮循環小數 | |

第十三章 角的三角函數..... 259

- | | |
|---|-----------------------|
| 13-1 三角學的目的 | 13-2 有向角 |
| 13-3 角的標準位置 | 13-4 任一角的三角函數 |
| 13-5 象限角及其他特別角 | 13-6 所予角的參考角. |
| 13-7 基本觀念 | 13-8 由一角的已知函數求此角的其他函數 |
| 13-9 銳角三角函數 | 13-11 任意角的銳角比 |
| 13-10 三位三角函數表 | 13-13 輔助式 |
| 13-12 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 的幾何表示 | 13-14 兩角和差的正弦與餘弦公式 |
| 13-15 三角函數的週期性質 | 13-17 度度量的正弦與餘弦的圖形 |
| 13-16 簡化公式 | 13-20 度度量的正切與餘切的圖形 |
| 13-18 $\tan \theta$ 與 $\sec \theta$ 的變化 | |
| 13-19 $\cot \theta$ 與 $\csc \theta$ 的變化 | |
| 13-21 度度量的正割與餘割的圖形 | |

第十四章 對數與計算..... 306

- | | |
|-----------|------------|
| 14-1 有效數字 | 14-2 計算的精確 |
| 14-3 無理指數 | 14-4 對數 |

14-5	對數的性質	14-6	首數與尾數
14-7	對數表	14-8	插值法
14-9	積與商的計算	14-10	餘對數
14-11	幕與根的計算	14-12	指數方程式與對數方程 式
14-13	對數的換底		
14-14	對數函數及指數函數的 圖形		

第十五章 直角三角形的應用.....333

15-1	四位三角函數表	15-2	四位表插值法
15-3	直角三角形的解法	15-4	直角三角形的應用
15-5	三角函數的對數	15-6	直角三角形對數解法
*15-7	近似值條件的問題	*15-8	投影
*15-9	方位角與方向角	*15-10	矢量

第十六章 數的三角函數.....354

16-1	角的弧度量	16-2	弧，角與半徑的關係
16-3	弧度量角的三角函數	16-4	數的標準三角函數
16-5	標準三角函數的圖形		

第十七章 三角恒等式與方程式.....369

*17-1	基本恒等式複習	17-2	恒等式證法
17-3	含一未知數的三角方程 式	17-4	由析因式以解三角方程 式
17-5	用恒等式幫助以解三角 方程式	17-6	額外的解

17-7 解析上的正弦，餘弦與 正切加法公式	17-8 倍角公式
17-10 乘積公式	17-9 半角公式
*17-12 三角恒等式雜題	17-11 正弦或餘弦的和與差
	*17-13 方程式的其他解法

第十八章 不等式 399

18-1 絕對不等式與條件不 等式	18-2 不等式的性質
18-4 不等式的圖解	18-3 線性不等式
18-6 含一變數或兩個變數不 等式的圖形	18-5 不等式的分析證法

第十九章 複數 411

19-1 複數	19-2 複數的除法
19-3 複平面	19-4 三角式
19-5 極式的乘積與商	19-6 複數的 n 次方根

第二十章 財務數學 430

20-1 一個小故事	20-2 百分率
20-3 利息，單利	20-4 複利法
20-5 半年複利法	20-6 緩付的現值
20-7 債務的分期償付	

* 附 錄 442

*1 歐幾里得與黃金分割	*2 尤拉線與垂心
*3 九點圓	*4 二極值問題

*5 三等分一任意角

附表：(共9表)	451
----------------	-----

第一章 數理邏輯簡介

1.1 命題與推理

在開始研討數學時，吾人腦中常會興起“什麼是數學？”一問題。從近世數學發展的趨勢而觀察，數學本身可以說是一種“思想的方法”。此種思想，並非泛指一般的主義或學說，而是有其特定的數學意義。吾人如欲對日常事理用數學方法作探討，必須先有一些特殊工具，和不違悖吾人心智的推理。本章即在介紹此種特殊工具與推理依據。

定義 1.1a 命題

命題 (propositions) 是一句完全的敘述，具有一個確定的意義。亦即為真 (或偽)，但不可同時為真又為偽。

故凡命題，非真即偽。凡無真偽可分的敘述或語句，諸如：祈求，勸告，詢問，感嘆，以及命令等皆非命題。

數學語句，有些是命題，但有些必須加以適當的限制，才算是命題。

說明 1. (a) $1 + 1 = 2$.

(b) $8 > 5$.

(c) $x + 1 = 5$.

上列(a)與(b)皆為命題，但(c)，若其中文字 x 未經指定一特殊值 4 時，則無真偽可言。此類語句，稱為開放語，或命題函數 (propositional functions)。開放語中，恒含有一個或多個字母，如 x ， y 等；稱為變數 (variables)，有等號或不等號以連結之。用等號連結的開放語亦稱為方程式 (equation)。

說明 2. $x+2=4$ 及 $x^2=1$ 均為方程式.

邏輯上，吾人心智所共同承認的規律有：

排中律 (The Law of the Excluded Middle) 1.1-1

吾人不可同時敘述一件事象為真亦為偽.

此律不但為數學推理的基礎，而且為吾人日常生活作判斷的依據，蓋依此律：若知一命題為真，則其反面必為偽.

說明 3. $2+3=8$ 為偽，則 $2+3 \neq 8$ 必為真.

在研究科學的過程中，吾人常依據一連串的事實或假設，而推論出各種結論。例如吾人已知天正下着雨，吾人立刻可以推斷說：天空必有雲。換言之，天正下着雨，此一事實，已提醒吾人有其他條件的成立。這是根據吾人的經驗而推斷出來的結果。在數學上，往往由假設中去看與結論有何關係來，並不容易。因此吾人還得依據已知的定義，公設，以及定理去作適當的推論。非完全憑藉經驗而可得。

吾人稱由已知的假設導至某種結論為蘊含 (implication)。在數學語言中，此種蘊含很多。通常皆須註明何者為假設，何者為結論。

吾人現在規定以符號

$$“ p \Rightarrow q ”$$

表蘊含。讀作“若 p 則 q ”。其中命題 p 表假設，命題 q 為結論。吾人說， $p \Rightarrow q$ 為一真蘊含，意即由 p 經過定義，公設，定理的正確推理而必可得到 q 一結論。於是吾人又有一規律稱為：

推理律 (The Law of Inference) 1.1-2.

假定(1) 命題 p 為真，且

(2) $p \Rightarrow q$ 為真確.

則 q 亦為真確.

下舉二例可以說明吾人應如何運用此推理律

說明 4. 若令 p 表一命題“地面是濕的”，

q 表結論“剛才下過雨”

則 $p \Rightarrow q$ 即表：若地面是濕的，則剛才下過雨。

按照推理律，吾人可知若 p 為真，且 $p \Rightarrow q$ 亦為真確，則吾人必可斷言 q 亦為真。但，事實上，地面是濕的並不一定是剛才下過雨，或許剛才洒過水也未可知。因此 $p \Rightarrow q$ 的推論有問題。故結論 q 為真或為偽，就不在推理律範圍之內。

說明 5. 吾人常用此種錯誤推理欺騙不懂數學的人。

令 x, y ，表兩非零的數，且

$$x = y,$$

兩邊同乘以 x 則

$$x^2 = xy.$$

兩邊同減以 y^2 ，得

$$x^2 - y^2 = xy - y^2,$$

或

$$(x - y)(x + y) = (x - y)y.$$

兩邊同除以 $x - y$ ，則有 $x + y = y$ ，

因 $x = y$ ，代入故有 $x + x = x$ 或 $2x = x$ 。

故結果有 $2 = 1$ ，悖理。

此矛盾，顯然發生在推理過程中。蓋等式的兩邊，吾人不可以任意數（可等於零者）同除之的緣故。

由上述二說明，吾人使用推理律，必須確知蘊含為真確，方可斷言結論為真。

習題 1-1

下列各蘊含何者為真確，何者不真確？試解釋之。

1. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$

2. $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

3. $x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 5$

4. $x + xy = 0 \Rightarrow y = 0$

5. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = 0 \Rightarrow x = y$

下列何者為一命題？

6. 你真美麗。

7. 紅顏多薄命。

8. 呀！多迷人的仲夏之月夜。

9. 3 加 2.

10. $3 \geq 2$.

1.2 命題的連結

數學語言中，並非僅有一種直敘語言，往往由幾個命題組合而構成一句複雜語言。吾人稱之為複合數學語（Compound mathematical sentence）。此類語言，是以“非”，“且”，“或”，“若”，“若……則……”“若而唯若……則……”等連結詞結合而成。

說明 1. (1) $2 > 1$ 否定即 $2 \ngtr 1$.

(2) $1 + 1 = 2$ 且 $3 + 4 = 7$.

(3) $2 + 1 = 3$ 或 $3 + 2 = 5$.

(4) 若 $a > b$ 則 $a \neq b$.

(5) 若而唯若 $x + 1 = 5$, 則 $x = 4$.

皆為複合數學語。吾人可以約定用下列諸簡單符號來代替此等連結詞：

I. “ $\sim$ ”表“非”

說明：若 p 為一命題，則 $\sim p$ 表 p 的否定命題。

II. “ $\wedge$ ”表“且”，“ $p \wedge q$ ”讀作“ p 且 q ”。

III. “ $\vee$ ”表“或”，“ $p \vee q$ ”讀作“ p 或 q ”。

IV. “ $\Rightarrow$ ”表“若……則……”讀作“若 p 則 q ”。

V. “ $\Leftrightarrow$ ”表“若而唯若……則……”“ $p \Leftrightarrow q$ ”讀作“若而唯若 p 則 q ”。

一命題必須可以判斷其為真或偽。由排中律知一命題若不為真，則必為偽。吾人將命題結合後，亦必須要一種判斷其複合數學語為真或為偽的規則。下列各一覽表可幫助吾人作思考用。

表中 T 代表真， F 代表偽， A ， B ，皆代表命題。

A	$\sim A$
T	F
F	T

表 1-1

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 1-2

由該表 1-2 可知兩命題若其中有一爲僞，則其複合語句亦必爲僞。

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1-3

由本表 1-3 可知兩命題若以“或”連結之時，需要其中有一命題爲真，則結合所成的命題亦必爲真。故吾人視“2 大於或等於 2”一語爲真。