現代數學基礎

江紹倫　　鄭肇楨

現代數學基礎

江紹倫　　鄭肇楨

香港中文大學校外進修部

FOUNDATION OF MODERN MATHEMATICS

SHIU L. KONG, Ph.D.
University of Toronto

SHIU-CHING CHENG, Ph.D.
The Chinese University of Hong Kong

Department of Extramural Studies
The Chinese University of Hong Kong

前言

這本書是爲一般知識青年、中小學教師及關心了解現代數學課程的家長而寫的。高年級的中學同學也可以把它作爲參考書，特別是對於就讀英文中學的同學，閱讀一本中文數學參考書會增進對一些數學概念的領悟。

本書的主要目的是爲對數學感興趣的讀者提供一些現代數學基本知識，作者在解釋各種概念的時候，刻意避免使用定義定理引入，而着重透過具體事例，帶引讀者去了解數學的抽象本質。這樣，閱讀本書並不須要具有任何先備的數學知識。然而，也正因爲這樣的安排，它不應被視爲一本嚴謹週全的數學書，也可以說，它在某些地方是不夠「數學化」的。

現代數學的特點包括着重數學概念和結構的學習，從學習開始便着重數學與實生活事象的關連，運用明確而簡潔的數學語言，着重各種數學性質之間的關係，而在教材或數學活動的編排上務求清楚與生動，使學者能在平易、有趣的學習歷程中，藉着對具體事例的思維活動而掌握知識，變換應用。因此，本書各章的敍述和編排也盡量表現發揮這些特點。第一章對集的學習是重要的，因爲集是現代數學的語言。其餘第二至第七章的編排次序，並非不可變更。這即是說，學者不一定要掌握了邏輯的知識然後纔可以學習函數，熟悉了函數然後纔可以開始學習數系，而是可以隨個人興趣之所至，選擇學習的次序。但是，我們覺得，依照書中的編排去進行學習較爲方便，因爲雖然有些概念並不是學習另一些概念的先決條件，但熟悉了它仍是有助於以後的學習的。譬如說，學習第六章的幾何變換，不一定要完全掌握了

前五章的知識，但是具備了對向量的基本認識，則更易於了解幾何變換。這些道理，在讀者看完全書之後，自然可以深切體會，而這種體會又可以有效地引導他了解數學微妙之處。

全書八章的內容，不能說已經包羅現代數學的總體，祇不過是現代數學的基礎。第八章的機率是統計學，特別是推理統計學的基礎，至於統計學本身，反而沒有列入範圍之內。又如拓撲學也是現代數學的重要部份，我們也祇簡單地在幾何變換中提及而已。

作者是在正常教學和行政的工餘時間內寫成此書的，並且除了寫作之外，創繪草圖和排版的工作亦親自嘗試，再加以時間上的限制，繆誤在所難免，故切望讀者指正，並多提出寶貴而具體的建議，以便參考改善。此書的寫作，原是鑒於中文現代數學書籍的缺乏，作者亟望能在這方面作出一點帶動作用而進行的，假如它的出現能引起注意，並帶來批評、討論和建議，那便是我們最冀望的。

本書初稿完成時，蒙潘煒棠君對某些章節內容，就實際教學觀點出發而提出一些寶貴意見，作者謹致衷心的謝忱。在排版期間，因爲編排缺乏範例，許多方面的工作都較一般書籍繁瑣，幸得本校校外進修部同事黃傑雄君細心處理，熱誠協助，特此致謝。至於書中一切繆誤和不盡善的地方，則概由作者負責。

江紹倫　鄭肇楨

香港中文大學教育學院

一九七五年一月

目錄

集

集是現代數學裏的一個重要的基本概念。在任何一門數學的分支中，我們均須研究某類事物的集合——可能是數字，可能是空間中的點——在某些運算下的性質。故此研究集的本身性質是有必要的。

在幾何裏我們研究的對象可能是平面上或空間中的點的集合。點，線，面都可視為點的集合。在算術裏我們研究的對象可能是某類數字，如自然數、有理數、實數等的集合，研究這些數字的集合在某些運算下的性質。在統計學裏，我們研究的對象可能是某種現象發生的機率。例如某類人死於心臟病的可能性，某種搏奕獲勝的可能性。故每次進行數學研究都有該種數學運算所施於的集合為對象，而這些對象可以是某一年歲某一性別的某地人士，也可以是某種搏奕可能出現的結果的全體。在物理學裏，我們研究的對象可能是原子的分裂，電子的直徑。

總而言之，研究的對象是集合，是羣，是整體。而非孤立的一件事物。不是某一個數的性質，而是該類數的性質；不是某一個人的生命狀態，而是該類人的生命狀態特點；不是某一個原子的現象，而是某一個整體內的原子，在何種情況下的現象。這就說明了集合是如何的重要，和研究它的性質的必要性。

集合或者是**集**(Set)到底是什麼呢？通常我們對這個名詞都不加以定義的，不過這裏可以略加解釋，以便澄清它的涵義。

集是指一羣或一堆事物。例如一個學生集包含了若干學生；一個平面上的點集包含了整個平面上的所有點；一個自然數集包含了所有的自然數；一個英文字母集包含了由A至Z的26個英文字母；一個10以內的質數集，包含了所有不大於10的質數。所以集就是羣體、結合、團、隊、班、組織等等代表衆數的名詞。

每一個集都必有一個毫不含糊的標準來區分它所含有的事物。例

如一個英文字母集，它只含有英文字母，故此如果某一事物不是英文字母的話，它便不能在這個集內。又如一個太陽行星集，它只含有太陽的各個行星，如非太陽的行星，它便不會在這個集內。換言之，集內的事物都必具有一相同的地方，才可以構成一集。例如今天本校缺課學生集，集裏的任何一份子，都是今天本校缺課的學生。所以這集裏的份子都具有一相同的地方，就是作爲「在本校今天缺課的學生」。一個直角三角形集只包含了直角的三角形。集內的物件只有三角形，而且它們都有相同的地方，就是必有一直角。一集內所含有的事物是稱爲**元**(Element)。例如金星是太陽行星集裏的一元，木星是太陽行星集裏的一元，天狼星不是太陽行星集裏的元。A是英文字母集的一元，Ω不是英文字母集的一元。

爲了方便起見，集是可以用英文大寫字母來代表的。通常可用A, B, C, D…X, Y, Z等，譬如說A是季節的集，則A集包含了春、夏、秋、冬這四個元。B是一個12的因數集，則B包含了1, 2, 3, 4, 6, 12這六個元。C是一個含有質量最輕的兩種元素的集，則C集是有氫和氦作爲它的元。對於以上的例，我們亦可用符號寫爲：—

A＝ {春、夏、秋、冬}
B＝ {1, 2, 3, 4, 6, 12}
C＝ {氫、氦}

用括號 { } 範圍着一集的元以代表集。用這個方法表示集，是要把集內的元全部不遺漏地寫在括號內的。故此可知A集中只有春、夏、秋、冬四個元而再沒有其他元。B集裏是只有1, 2, 3, 4, 6, 12六個元而再沒有其他元。C集裏則只有氫和氦兩個元而再無其他的元。反過來說，春、夏、秋、冬這四個元是屬於A集的；1, 2, 3, 4, 6, 12這六個元是屬於B集的；氫和氦這兩個元是屬於C集的。對於「屬於」我們可用符號 $\in$ (希臘字母Epsilson)來代表故有

$1 \in B$, $2 \in B$,
春$\in A$, 氫$\in C$等

反之，對於「不屬於」則可在 $\in$ 中加上一劃來表示，如$\notin$便是「不屬於」。因此有

$1 \notin A$, $3 \notin C$,
春$\notin C$, $12 \notin A$等。

又例如以P代表質數集，則有：

$2 \in P$, $3 \in P$, $4 \notin P$, $5 \in P$,
$6 \notin P$, $7 \in P$, $8 \notin P$…等等。

以S爲太陽行星集，則有：

地球 $\in$ S， 天狼星 $\notin$ S，
水星 $\in$ S， 北極星 $\notin$ S。

把一個集的元全體列寫出來在括號內的方法稱爲**表列式**。如 {1, 2, 3, 4, 6, 12} ，{春、夏、秋、冬} ，{氫、氦} 等。利用表列式把集記出，就必須把全部的元都列出來，而且決不能遺漏任何一個。這種方法對於一些含元多的集是不方便的。有時甚至是不可能的。比方說，H是H市的全體市民的集，若以表列式記出此集，則在此集的括號內要寫上全部市民的名字，或者是他們的代號。試想這是多麼麻煩的事！又如要用表列式寫出偶數的全體，由於偶數是無窮無盡的多，決不可能盡列出來。因此另一種記集的方法是需要的了，這種方法就是不把集的元列出，而代以對集的元的定義。譬如一集{1, 2, 3, 6, 9, 18}便可定義它的元爲18的約數，由此而把它寫爲 $\{x : x$ 是18的約數$\}$。根據這個定義便可以把此集的元全部找出來，故此 $\{x : x$ 是18的約數$\}$ 的意思就是一個集包含了元 x，而其中的每一個 x 均是18的約數。又如集M＝ {1, 4, 9, 16, 25, 36} 便可寫爲M＝ $\{x : x = n^2$, $1 \leq n \leq 6$, n 爲整數$\}$。即是說這個集含有由 1 至 6 的整數的平方數，這種方法就是利用集的結構來表示一集，故此它就稱爲**結構式**。

爲了更清楚這兩種表達集的方式，下面就是一些例子：

結構式	表列式
$\{x : x$ 是不大於10的質數$\}$	{2, 3, 5, 7}
$\{x : x = 3n, 1 \leq n \leq 6$, n 是整數$\}$	{3, 6, 9, 12, 15, 18}
$\{x : x$ 是在1975年人口超過四億的國家$\}$	{中國、印度}
$\{(x, y) : x + y = 4$, x, y 爲非負整數$\}$	{(0, 4), (1, 3), (2, 2) (3, 1), (4, 0)}
$\{x : x$ 是21除自身及 1 外的約數$\}$	{3, 7}
$\{x : x$ 爲滿足方程式 $x^2 - 10x + 21 = 0$ 的實數$\}$	{3, 7}

在最後的兩個例，我們看到這兩個集是相等的，大家同是 {3, 7}。但是它們的結構式卻是不相同的。因此我們知道一個集的結構式並不是唯一的，它可能有多種不同的形式。當兩個集含有完全相同的元的時候，我們就稱它們爲**等集**。例如集A＝ {a, b, c} ，集B＝ {a, b, c} ，則A, B便是等集。我們仍用等號＝來表示集的相等，故此若A, B爲等集則可寫爲

$$A = B$$

在一集裏，元是容許隨意排列的。因爲它們並不計較排列的先後次序。如這裏的A集 {a, b, c} ，若寫爲 {b, c, a} ，或 {c, a，b｝，或｛a，c，b｝，或｛b，a，c｝，或｛c，b，a｝只要它們仍是含有a，b，c這三個元而且僅此三個元，則無論是採用何種寫法，它們仍是同一的集。

又在一個集裏凡是相同的元，都只算作一個元。例如集｛a，a，a｝和集｛a｝是一樣的，集｛a，b，a，b，a｝亦相等於集｛a，b｝。

當一個集完全不含有元的時候，這個集便稱爲**空集**(Empty Set)。空集裏雖然是沒有元，但是空集卻是一個重要的集。正如數字零一樣，它的存在是必要的，例如我們研究一個方程的**解集**(Solution Set)。有時可能在某個數域上是沒有解的，那末我們可以說它的解集是個空集。譬如集S＝｛x：$x^2+1=0$，x爲實數｝，則因爲沒有一個實數能滿足方程$x^2+1=0$，故x是不存在的，因此S集裏便一個元也沒有，因而S也是一個空集。又如在某一次旅行中，以集P代表參加旅行的人的集，假如完全沒有人參加，則P集便是一個空集。代表空集的符號是$\varnothing$，所以上面的S集可記爲S＝$\varnothing$，以下是一些空集的例。

A＝｛x：$x+1$，且同時可整除2和3｝
B＝｛x：x爲實數，且$x<1$及$x>2$｝
C＝｛n：$a^n+b^n=c^n$，a，b，c爲整數，且$n>2$｝
D集爲在十八世紀到過月球的人。
E集爲在中國出生的法國總統。
F集爲能跳高超過三公尺的人。

和空集剛剛相反的集就是那些含有無窮多元的集，例如一個包含全部正整數的集。它含有像1，2，3，4，5，6，……的元。顯然一直寫下去每個數目的後面都跟着還有數目。這樣可以永無休止地寫下去的。這一個集便含有無窮多的元，因此便稱爲**無窮集**(Infinite Set)。

考慮下面的集：－

1．奇數集
2．質數集
3．5的倍數集
4．平面上的點集
5．地球上所有生物細胞的集
6．在一條一毫米長的直線上的點的集
7．宇宙間的電子集

由例1至4都是無窮集。因爲奇數、質數、5的倍數都是無窮的多。而平面上的點也是無窮無盡的多。例5則不是無窮的，因爲地球上的生物數目不管有怎樣多，到底是個有窮的數目，而每一生物體內即使有很多很多細胞，但仍是個有窮的數目，故此加起來也只能是個有窮數目。因此，它是個**有窮集**(Finite Set)。同樣，例7也是一個有窮集，雖然宇宙間的電子多得難以想像，好像是無窮無盡似的，而

事實上它的數量是有限的。根據愛丁頓（Eddington）的估計，整個宇宙的電子，總數只有10^{79}個！說出來眞是令人感到有點意外的，因為在想像中，電子的數量幾乎是接近於無窮。至於例6，在一條僅有一毫米長的直線上的點，在直覺上看來似乎沒有多少點。但其實它的點仍是無窮無盡的多。因此這也是個無窮集。要說明它是無窮，我們可以這樣來設想，假如用 0 和 1 來分別代表這線段的首尾兩點，則$\frac{1}{2}$是它的中點；0 和$\frac{1}{2}$的中點是$\frac{1}{4}$，0 和$\frac{1}{4}$的中點是$\frac{1}{8}$，0 和$\frac{1}{8}$的中點是$\frac{1}{16}$……這樣每次取出的點都是不相同的點，而且這樣可以永無休止地選取不同的點。由是可知這線段必含有無窮大數目的點。事實上任何一線段都含有無窮多的點，因而線段內的點集必是無窮集。

考慮集A＝｛a，b，c，d，e｝，集B＝｛a，b｝和集C＝｛b，c，e｝。這裏集B的元a，b同樣可在集A中找得，故此可說集A包含了集B，或者說，集B是集A的**子集**（Subset）。對於這事實我們記為$A\supset B$（讀作A包含B）或$B\subset A$。（讀作B為A所包含）同樣這裏A包含了C，即$A\supset C$，或C為A的子集即$C\subset A$。當C為A的子集時，C便為A所包含，同時亦可說A是C的**母集**（Super set）。

這裏$B\subset A$是因為所有B中的元都是A的元。即$a\in B$，和$b\in B$，但同時有$a\in A$，$b\in A$由此我們可以用這個關係作為子集的條件，並且敍述如下：若A，B為已知集，且知每一B中的元均為A的元，則B為A的子集。即對於任何$x\in B$都有$x\in A$，則$B\subset A$。反之，若$B\subset A$，則$x\in B\Rightarrow x\in A$。（符號⇒表示「由此而推論得」）。

我們可以用這條件來驗証｛b，c，e｝⊂｛a，b，c，d，e｝。

因為

$$b\in\{b,c,e\}\Rightarrow b\in\{a,b,c,d,e\}$$
$$c\in\{b,c,e\}\Rightarrow c\in\{a,b,c,d,e\}$$
$$e\in\{b,c,e\}\Rightarrow e\in\{a,b,c,d,e\}$$

故知｛b，c，e｝是｛a，b，c，d，e｝的子集。

子集的例子是容易找尋的，例如偶數集是整數集的子集；質數集是正整數集的子集；直角三角形集是三角形集的子集。中學三年級學生集是中學學生集的子集。歐洲共同市場國家集是歐洲國家集的子集，正方形集是四邊形集的子集，蜥蜴類動物集是爬蟲類動物集的子集。

當然，同一個母集是可以包含多過一個子集的。像整數集分別包含了質數集，偶數集，奇數集，3 的倍數集，4 的倍數集，5 的倍數集，9 的倍數集，間於1000至2000之間的整數集，所有數字之和為 7 的數目的集，三角形數集，6 和15的公倍數集，**費邦納奇數集〔註〕**等等可以作出任意數量的子集來的。但是對於一個有窮集，它的子集的數目是不是有一個有定的數目呢？對於這個問題，我們不妨用試驗的方法來探討一下。

設集A＝｛a｝只有一元，則它只能有子集∅及｛a｝，即共有 2 個子集。設集B＝｛a，b｝，則它可能有∅，｛a｝，｛b｝和｛a，b｝即共有 4 個子集。設集C＝｛a，b，c｝，則它可能有∅，｛a｝，｛b｝，｛c｝，｛b，c｝，｛a，c｝，｛a，b｝和｛a，b，c｝即共有 8 個子集。設集D＝｛a，b，c，d｝，則它可能有如下的子集：

不含元的子集：　$\emptyset$

含 1 元的子集：｛a｝，｛b｝，｛c｝，｛d｝

含 2 元的子集：｛a，b｝，｛a，c｝，｛a，d｝，｛b，c｝，
｛b，d｝，｛c，d｝

含 3 元的子集：｛b，c，d｝，｛a，c，d｝，｛a，b，d｝，
｛a，b，c｝

含 4 元的子集：｛a，b，c，d｝

即共有16個子集

〔註〕：費邦納奇數列(Fibonacci sequence)是由 1 開始而每個元均爲前二元之和的數列。即1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,……

現在我們把這個結果表列於下：

集含有的元數	能構成子集的數目
1	2　　(2^1)
2	4　　(2^2)
3	8　　(2^3)
4	16　　(2^4)

觀看這個表我們是很容易看出集的元數和集的子集數目的關係，這裏一列是1,2,3,4,另一列是2,4,8,16,或是$2^1, 2^2, 2^3, 2^4$,即

$1 \longleftrightarrow 2^1$

$2 \longleftrightarrow 2^2$

$3 \longleftrightarrow 2^3$

$4 \longleftrightarrow 2^4$

推想下去自然便有：—

$5 \longleftrightarrow 2^5$

$6 \longleftrightarrow 2^6$

…………

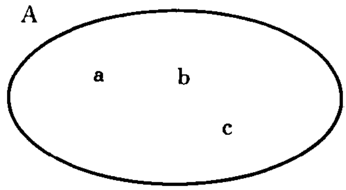
$n \longleftrightarrow 2^n$

事實上，這個關係是正確的，因爲含有 n 元的集，它的子集數目，是相當於在 n 件物件中作出一切可能的組合，而這種組合的數目正是2^n個。

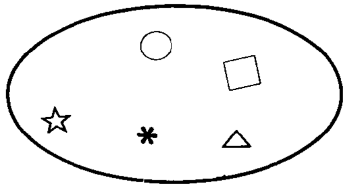
由於 $n \longleftrightarrow 2^n$，亦可推知 $0 \longleftrightarrow 2^0 = 1$。即空集包含的子集只有一個，這個子集就是空集的本身。

例如某班同學共有32人，組織一個讀書會，若任各人自由參加的話，則能組成的讀書會應有 2^{32}個，即有4294967296個！這因爲讀書會是這班同學集的子集。含有32個元的集應有子集數是 2^{32}個。

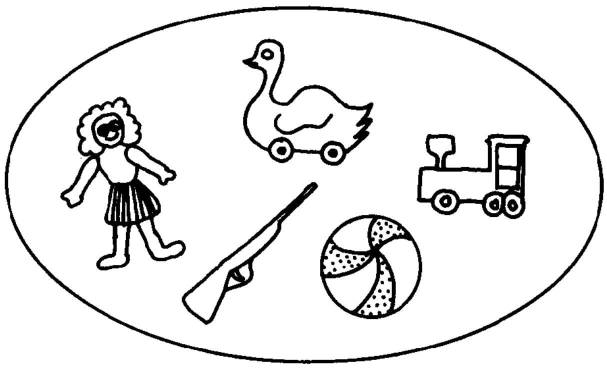
一種更直觀的方法來表示集就是利用圖像繪畫出來，這叫作范氏圖(Venn diagram)。它是用一條封閉曲線把集的元圍起來以表示屬於一集。如集A＝{a，b，c}便是：—



集{☆，*，○，□，△}便是：—



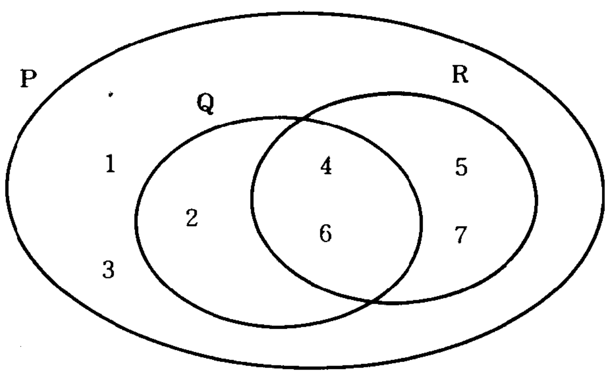
集{}便是：—



考慮下面的集：

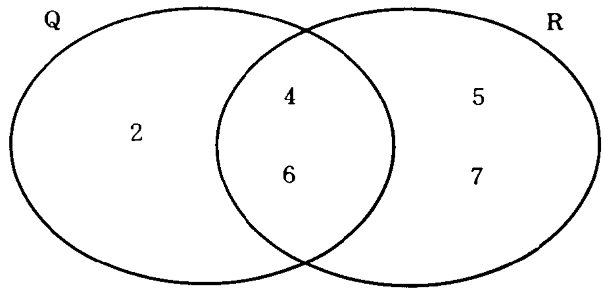
P＝{1,2,3,4,5,6,7}
Q＝{2,4, 6}
R＝{4,5,6, 7}

則有



這裏可以見到P, Q, R三個集彼此之間的關係，這也是范氏圖的一個優點。像這裏可見Q, R二集，都是完全在P集之內的。故此Q和R都是P集的子集。但是Q集並非全部在R集內，R集亦非全部在Q集內，故此Q和R皆不是彼此間的子集。

現在我們拿出Q和R來討論一下。它們的范氏圖是：

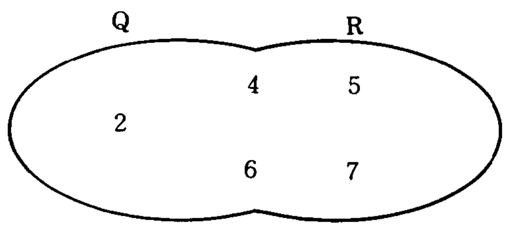


若把Q和R的所有元合起來，這裏便得出一個集：

{2, 4, 6, 4, 6, 5, 7}

除去相同的元後得

{2,4,6,5,7}



這一個集便是包含了Q和R的一切元，換言之這個新構成的集的元是屬於Q或屬於R的。這樣的一個集便稱爲Q和R的**和集**(Union)。用記號來表示是$Q \cup R$。

所以如A＝ {a, b, c, d}，B＝ {c, d, e, f, g}，

C＝ {g, h}

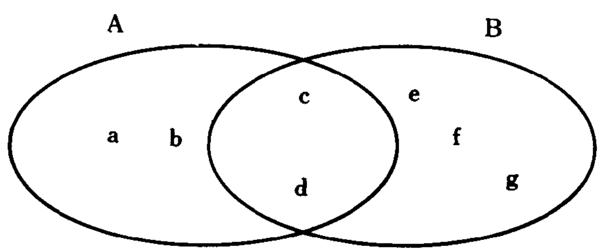
則$A \cup B$＝ {a, b, c, d, e, f, g}

$A \cup C$＝ {a, b, c, d, g, h}

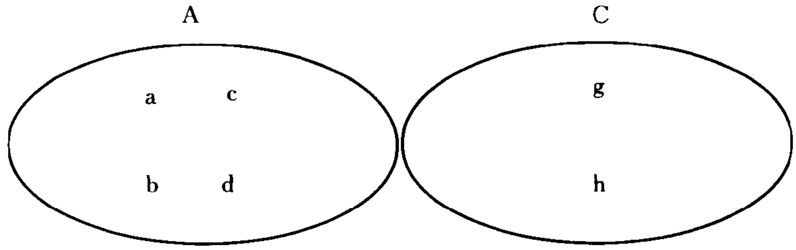
$B \cup C$＝ {c, d, e, f, g, h}

以范氏圖來表示便是：

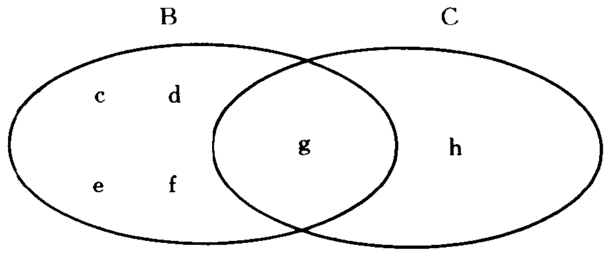
$A \cup B$



A ∪ C



B ∪ C



從這裏亦可看到集A是$A\cup B$的子集，集B亦是$A\cup B$的子集，故此有$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$。

現在我們再由A, B二集作出另外一個新集，這個集規定它只含有而且必含有全部A, B二集的共同元。那末這一集便被確定了爲{c, d}。因爲這裏只有c和d二元是A, B二集共有的，像這樣由A, B二集的共同元所構成的一集便稱爲A, B二集的**交集**(Intersection)，並且記爲$A\cap B$

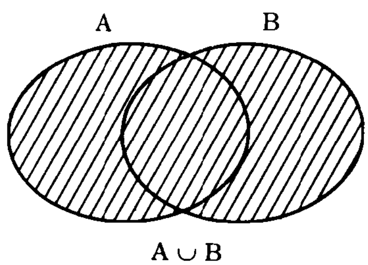
故 $\{a, b, c, d\}\cap\{c, d, e, f, g\}=\{c, d\}$

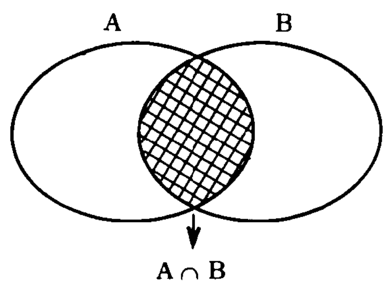
$\{a, b, c, d\}\cap\{g, h\}=\emptyset$

$\{c, d, e, t, g\}\cap\{g, h\}=\{g\}$

這些交集都從上圖屬於兩集共有的地方表示了出來。

下圖就是代表和集與交集的范氏圖





從這裏亦可看到兩集的交集，分別是兩集的子集。因爲它是同時被這兩集所包含的。所以：

$$(A\cap B)\subset A\text{及}(A\cap B)\subset B$$

跟和集一併考慮便有：

$$(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B);$$
$$(A\cap B)\subset B\subset(A\cup B).$$

例：

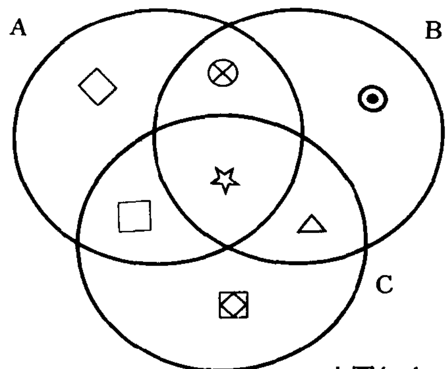
1. 已知 $P=\{1,2,3,4\}$，$Q=\{2,4,6,8\}$，$R=\{1,2,3,5\}$，

寫出 $P\cap Q$, $P\cup Q$, $P\cup R$, $P\cap R$, $P\cap Q\cap R$, $P\cap\varnothing$, $P\cup\varnothing$, $\varnothing\cup\varnothing$, $\varnothing\cap\varnothing$.

答 $P\cap Q=\{2,4\}$，$P\cup Q=\{1,2,3,4,6,8\}$，$P\cup R=\{1,2,3,4,5\}$，$P\cap R=\{1,2,3\}$，$P\cap Q\cap R=\{2\}$，$P\cap\varnothing=\varnothing$, $P\cup\varnothing=P$, $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

2. 用范氏圖作出 A＝{◇, ⊗, ☆, □}，B＝{☆, ⊗, △, ⊙}，C＝{⊠, □, △, ☆} 並由此找出 $A\cap B\cap C$, $A\cap B$.

解：



由圖知 $A\cap B\cap C=$ {☆}

$A\cap B=$ {⊗, ☆}

3. 若 P 爲10以內的質數集，Q 爲10以內的奇數集，分別求出 P, Q 的和集和交集。

解：$P=\{2,3,5,7\}$，$Q=\{1,3,5,7,9\}$，
$P\cup Q=\{1,2,3,5,7,9\}$，$P\cap Q=\{3,5,7\}$

4. 集 $\{2,3,7\}$ 是42的質因數集。集 $\{3,5,7\}$ 是105的質因數集。寫出它們的和集及交集。又42和105兩數和它們的和集裏的元的乘積有何關係？和它們的交集的元的乘積又有何關係？

解：兩集的和集是 $\{2,3,5,7\}$
兩集的交集是 $\{3,7\}$
和集內的元的乘積是 $=2\times3\times5\times7=210$
交集內的元的乘積是 $=3\times7=21$
這兩個數剛好是42和105的最小公倍數和最大公約數。

集的運算

在算術裏我們有加、減、乘、除等運算。在集的代數裏也有集的運算。求集的「和」與「交」就是其中的兩種運算。現在要研究的是在集的運算下有什麼樣的性質。

首先我們注意到的是兩個集的和集或交集都不因給出的次序不同而有所不同。例如兩集是A, B，則和集有$A \cup B$或$B \cup A$，這兩個集是一樣的，又它們的交集有$A \cap B$或$B \cap A$，這兩個集亦是等集。現在設A, B分別是：－

$$A = \{a, b, c\},\quad B = \{b, c, d, e\}.$$

則$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

$B \cup A = \{b, c, d, e, a\}$

$A \cap B = \{b, c\}$

$B \cap A = \{b, c\}$

所以可見$A \cup B$和$B \cup A$是含有完全相同的元。即使它們的元的次序可能不同。但由於元的排列的次序先後是不計較的，只要它們含有同樣的元便是相等了。因此

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

這一性質稱爲**可易性**(Commutative)。

在算術裏具有可易性的運算是加法和乘法，例如$3 + 5 = 5 + 3$；$4 \times 7 = 7 \times 4$。但是減法和除法是沒有可易性的，故此$5 - 3$不等於$3 - 5$；$12 \div 4$並不等於$4 \div 12$。在日常生活裏許多事例也有這種現象，其中有些是具可易性的，其中亦有些是不具可易性的。例如：

1. 先買罐頭後買麵包。
2. 先刷牙後洗面。
3. 先穿襪後穿鞋。
4. 先溫習後考試。
5. 先開窗後掃地。

這裏的例1, 2, 5都具可易性，因爲如先買麵包後買罐頭應該都是買了這兩種東西。刷牙與洗面，開窗與掃地，也不因進行次序的不同而有什麼不同結果。但是例3和4却是不可易的，試想先穿鞋後穿襪是件多麼困難的事呢！又如考試和溫習的次序改變了，是不是會得到不同的考試成績呢？因爲如果先溫習好了才考試，應該是比考試後才溫習，更獲得理想的成績的吧？

現在考慮三個集的結合，譬如有集A, B, C，在求它們的和集時可順着A, B, C的次序先找A, B的和集然後找A, B的和集與C集的和集。假如我們不這樣做而先找後的兩個集的和集，即B、C二集的和集，然後才考慮它們的和集與A集合併的和集，這兩種不同的運算方式會不會影響到運算的結果呢？在未下結論之前不妨考慮下列的例：