中学数学题解手册

（下）

[illegible][illegible]工学出版社

中学数学题解手册

（下 册）

姚元基　编著

朱家骏　主审

電子工業出版社

中学数学题解手册（下）
姚元基　编著
朱家骏　主审
责任编辑：洋　溢
电子工业出版社出版　（北京海淀区万寿路）
电子工业出版社发行　各地新华书店经销
中国科学院印刷厂印刷
*
开本：850×1290 毫米 1／32 印张：31.375 字数：1647 千字
1989 年 3 月第一版　1989 年 3 月第一次印刷
印数：1-000，000 册　定价：18.20 元（精）
统一书号：ISBN 7-5053-0556-5／G·80（精）

题　　解

【1001】解：$e=2.718\cdots$无理数．

$\pi=3.141\cdots$ 无理数．3.141 有理数．

$3.14\dot{1}=3\dfrac{141-14}{900}=3\dfrac{127}{900}$ 有理数．

$3.141\cdots$无理数．

$5.3\dot{1}0\dot{6}=5\dfrac{3106-3}{9990}=5\dfrac{3103}{9990}$ 有理数．

$\dfrac{22}{7}$ 有理数．

$-\dfrac{3}{22}$ 有理数．

$512^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^9}}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$ 有理数．

$512^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2^9}}=\dfrac{1}{\sqrt{2^8\cdot 2}}=\dfrac{1}{2^4\sqrt{2}}$

$=\dfrac{1}{16\sqrt{2}}=\dfrac{1}{32}\sqrt{2}$ 无理数．

$\sqrt{2}-1$ 无理数．

$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$ 无理数．

$(\sqrt{2}-1)^0=1$ 有理数．

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ 有理数．

当"°"表示"度"时 $30°=\dfrac{\pi}{6}=0.5235$ 无理数．

当"°"是指数时 $30^0=1$ 有理数．

$\sqrt[3]{\dfrac{568}{243}}=\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot 71\cdot 3}{3^5\cdot 3}}=\dfrac{2}{9}\sqrt[3]{71\cdot 3}$

$=\dfrac{2}{9}\sqrt[3]{71}\cdot\sqrt[3]{3}$ 无理数．

$\dfrac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[4]{256}}=\dfrac{-\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{16}}=-\dfrac{\sqrt[3]{27\cdot 2}}{\sqrt[3]{8\cdot 2}}$

$=-\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}}=-\dfrac{3}{2}$ 有理数．

【1002】解：(1) 当 n 为奇数时，设

$$n=2k+1,\ (k\in Z)$$

原式 $=\dfrac{1}{8}[1+1][(2k+1)^2-1]$

$=\dfrac{1}{4}(2k+2)(2k)=k(k+1)$是偶数．

(2) 当 n 为偶数时，

原式 $=\dfrac{1}{8}[1-1](n^2-1)=\dfrac{1}{8}(0)(n^2-1)$

$=0$ 也是偶数．

∴ 答：(B)

【1003】解：设

$\dfrac{n-13}{5n+6}=\dfrac{p}{q}\left(\dfrac{p}{q}\text{既约}\right)\Longrightarrow n=\dfrac{13q+6p}{q-5p}$

要 n 是正整数，只要分母 $q-5p=1$ 即

$$q=1+5p$$

令 $p=1$ 则 $q=6$，$n_1=\dfrac{13\cdot 6+6\cdot 1}{6-5\cdot 1}=84$

验：$\dfrac{84-13}{5\cdot 84+6}=\dfrac{71}{426}=\dfrac{1}{6}$ 合

令 $p=2$ 则 $q=11$

$$n_2=\frac{13\cdot 11+6\cdot 2}{11-5\cdot 2}=155$$

验：$\dfrac{155-13}{5\cdot 155+6}=\dfrac{142}{781}=\dfrac{2}{11}$ 合

令 $p=3$ 则 $q=16$

$$n_3=\frac{13\cdot 16+6\cdot 3}{16-5\cdot 3}=226$$

验：$\dfrac{226-13}{5\cdot 226+6}=\dfrac{213}{1136}=\dfrac{3}{16}$ 合

$p>3$ 时 n 将更大，因此最小为 84．

∴ 答案 (E)．

【1011】证：设这四个连续自然数依次为 n，$n+1$，$n+2$，$n+3$．根据题意：所求算术

平方根就是

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}.$$

要一个算术平方根是一个自然数，只要这个算术平方根的被开方数是一个自然数的完全平方，事实上

原式

$$=\sqrt{n(n+3)(n+1)(n+2)+1}$$
$$=\sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1}$$
$$=\sqrt{[(n^2+3n+1)-1][(n^2+3n+1)+1]+1}$$
$$=\sqrt{(n^2+3n+1)^2}$$

在自然数范围里永远成立的运算是加法和乘法. 这里 n 是自然数，n^2 是自然数，$3n$ 是自然数，1 是自然数，因此 n^2+3n+1 是自然数，从而命题得证.

【1012】证: 根据已知条件,设

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}=M$$

是一个整数,则两边乘以 qr 得

$$\frac{aqr}{p}+br+cq=Mqr$$

仍是整数.

∵ 整数的和、差、积仍是整数，

∴ $\frac{aqr}{p}=Mqr-br-cq$ 是整数.

∵ 已知 p、q、r 两两互质,即 p 不能整除 qr，可见 p 必整除 a，$\frac{a}{p}$ 是整数

同理 $\frac{brp}{q}=Mrp-cp-ar$ 是整数，$\frac{b}{q}$ 是整数

$\frac{cpq}{r}=Mpq-aq-bp$ 是整数，$\frac{c}{r}$ 是整数

∴ $\frac{a}{p}$、$\frac{b}{q}$、$\frac{c}{r}$ 都是整数,得证.

【1013】证:（用反证法）假定存在这样的两个分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 和 $\frac{m_2}{n_2}$（m、n 互质），再设它们的和

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=p,$$

积

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=q,$$

而 p、q 都是整数,则 $\frac{m_1}{n_1}$ 和 $\frac{m_2}{n_2}$ 是方程

$$x^2-px+q=0$$

的两个根,任一根都应满足这方程. 但代入后

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2-p\left(\frac{m}{n}\right)+q\neq 0,$$

这里因既约分数与整数的代数和不可能为 0，发生了矛盾.

假设不成立,命题得证.

【1014】证:

方程①的根为

$$\frac{-10a\pm\sqrt{100a^2-4(5b+3)}}{2}$$
$$=-5a\pm\sqrt{25a^2-5b-3}$$

方程②的根为

$$\frac{-10a\pm\sqrt{100a^2-4(5b-3)}}{2}$$
$$=-5a\pm\sqrt{25a^2-5b+3}$$

要证明这四个根都不是整数，只要证明 $25a^2-5b\pm 3$ 不是一个完全平方数就可以了.

其中 $25a^2-5b=5(5a^2-b)$ 是一个 5 的整倍数,它的末位数只能是 0 或 5，末位 0 ± 3 得 3 和 7,末位 5 ± 3 得 8 和 2,所以 $25a^2-5b\pm 3$ 的末位数只能是 2、3、7、8 之一,而一个完全平方数的末位数必须是 0、1、4、5、6、9 之一，故 $25a^2-5b\pm 3$ 不可能是一个完全平方数.

∴ 题给两方程的根都不可能为整数.

【1015】证: 要证明方程的根是有理数,只要证明方程的根里不出现无理数就可以了,事实上

$$x_{1,2}=\frac{2(p+q)\pm\sqrt{4(p+q)^2-4(p+q+r)(p+q-r)}}{2(p+q+r)}$$

其中

$$\sqrt{4(p+q)^2-4(p+q+r)(p+q-r)}$$
$$=\sqrt{4(p+q)^2-4[(p+q)^2-r^2]}$$
$$=\sqrt{4r^2}=2|r|$$

$\because r$ 是有理数，$\therefore x_{1,2}$ 是有理数得证.

【1016】(1) 证 $\sqrt{2}$ 是无理数:

1) $\because 1<2<4,\ 1<\sqrt{2}<2$

$\therefore \sqrt{2}$ 不是整数.

2) 假设 $\sqrt{2}$ 是一个既约分数，令 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，(这里 m、n 为互质数，$n>1$)，则 $2=\frac{m^2}{n^2}$，$m^2=2n^2$，m^2 是偶数，m 一定是偶数，因此可设 $m=2k$ (k 是自然数) $m^2=4k^2$，于是 $2n^2=4k^2$，$n^2=2k^2$，n^2 是偶数，n 一定是偶数，这样 m，n 都是偶数，即有公约数 2，这和 $\frac{m}{n}$ 是一个既约分数矛盾，假设不成立，$\sqrt{2}$ 不能是一个分数. $\sqrt{2}$ 既不是整数又不是分数.

$\therefore \sqrt{2}$ 是一个无理数.

证 $\lg 2$ 是无理数:

1) $\because \lg 1<\lg 2<\lg 10,\ 0<\lg 2<1$

$\therefore \lg 2$ 不是整数.

2) 假设 $\lg 2$ 是一个既约分数，令

$$\lg 2=\frac{m}{n}$$

(这里 m，n 为互质数，$n>1$)，则 $2=10^{\frac{m}{n}}$，$2^n=10^m$，但当 m、n 是互质自然数 $n>1$ 时，左边末位是 2 的倍数，右边末位总是0，左$\neq$右，假设不成立，$\lg 2$ 不能是一个既约分数. $\lg 2$ 既不是整数，又不是分数，

$\therefore \lg 2$ 是一个无理数.

【1017】证: 由条件及 $bc=ad$. 知 a、b、c、d 都不为 0，为了使产生 bc 和 ad，

令

$$s=\frac{c(ax+b)+ad-ad}{c(cx+d)}$$
$$=\frac{a(cx+d)+bc-ad}{c(cx+d)}$$
$$=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

$\therefore$ 当 $bc=ad$ 时 s 是有理数，

$bc\neq ad$ 时 s 是无理数.

【1018】证: 要证明 m^4+4 是一个合数，只要证明: m^4+4 除了 1 和它本身外，还能被其它的数整除. 即 m^4+4 能写做两个整数之积. 事实上

$$m^4+4=m^4+4m^2+4-4m^2$$
$$=(m^2+2m+2)(m^2-2m+2)$$

从而可知 m^4+4 能写做 m^2+2m+2 和 m^2-2m+2 两个整式之积. m^4+4 能被这两式中的任一个整除.

$\therefore$ 形式为 m^4+4 的数是一个合数.

$$\text{举例验证:}\left\{\begin{array}{l} m=0,\ 0^4+4=0+4=4 \\ m=\pm 2,\ (\pm 2)^4+4 \\ \qquad =16+4=20 \\ m=\pm 3,\ (\pm 3)^4+4 \\ \qquad =81+4=85 \end{array}\right\}$$

都是合数

【1019】证 当 n 是偶数时，设 $n=2k$，则

$$p=2k+[(2k)^2-1]^{\frac{1-1}{2}}=2k+1$$

是一个奇数.

当 n 是奇数时，设 $n=2k+1$，则

$$p=2k+1+[(2k+1)^2-1]^{\frac{1+1}{2}}$$
$$=2k(2k+3)+1$$

也是奇数.

$\therefore p$ 一定是奇数.

【1020】证: 已知非同奇偶两数之和才是奇数，这里 x 是奇数，$x=2y+3z$，奇数=奇数，知 $2y+3z$ 也是奇数，由于 $2y$ 总是偶数，知 $3z$ 是奇数，$3z$ 是奇数，奇数×奇数=奇数，3 是奇数，则 z 必是奇数.（又 $y+z$ 是奇数，z 是奇数，则 y 必是偶数.）这就是要证明的.

【1021】证: 已知奇数的平方得奇数，偶数的平方得偶数，一奇一偶两数相加得奇数，同奇偶两数相加得偶数，这里 $x^2+y^2=z^2$ 等式右边为一个数 z^2，它奇偶都可以.

(1) 当 z 为奇数时，z^2 是奇数，x^2+y^2 必须是奇数，x、y 必为一奇一偶，因此这时 x、y、z 三数为两奇一偶

(2) 当 z 为偶数时，z^2 是偶数，x^2+y^2 必须是偶数，x、y 必为两奇或两偶，因此这时 x、y、z

三数为两奇一偶或三偶.

综合 (1) (2) x、y、z 三数一定是两奇一偶或三偶.

【1022】证: $a+b\sqrt{7}$ 形式的数,它的 n 次幂永远是一个 $a+b\sqrt{7}$ 形式的数.

设 $(3+\sqrt{7})^n=a+b\sqrt{7}$ (a、b 是自然数)

则它的共轭根式 $(3-\sqrt{7})^n=a-b\sqrt{7}$,

因此

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{7})^n&=a+b\sqrt{7}\\&=2a-1+1-a+b\sqrt{7}\\&=(2a-1)+[1-(a-b\sqrt{7})]\\&=(2a-1)+[1-(3-\sqrt{7})^n].\end{aligned}$$

由于 $0<3-\sqrt{7}<1$ 有

$$0<(3-\sqrt{7})^n<1,$$
$$-1<-(3-\sqrt{7})^n<0,$$
$$0<1-(3-\sqrt{7})^n<1,$$

知 $1-(3-\sqrt{7})^n$ 是这个数的小数部分,从而这个数的整数部分就是 $2a-1$, 它是一个奇数.

【1023】证: $\underbrace{11\cdots1}_{n个}$ 的末位是 1, 它是一个奇数,如果它是一个完全平方数,它是一个奇数的平方. 但奇数的平方除以 4 余 1(例 1125). 这里 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}$ 除以 4 余 3, 所以形如 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}$ 的数,不会是完全平方数.

【1024】证: 设这个四位数是

$$N=\overline{abab},\ a\neq0,$$

则

$$\begin{aligned}N&=a\cdot1000+b\cdot100+a\cdot10+b\\&=1010a+101b=101(10a+b)\end{aligned}$$

因为 101 是质数,若N为完全平方数,则 $10a+b$ 应是 101 与另一个完全平方数之积, 不小于 101, 但 $a\leqslant9$, $b\leqslant9$, $10a+b\leqslant99$,

$\therefore$ N 不是完全平方数.

【1025】证: 根据给出条件, 知 a、b、c 都不为 0.

已知只有符号不同的两个数, 叫做互为相反数,零的相反数是零. 在原式两边都乘以最小公分母 $abc(a+b+c)$ 得

$$bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)=abc$$
$$abc+b^2c+bc^2+ca^2+abc+c^2a+a^2b+ab^2+abc=abc$$
$$bc(a+b)+ca(a+b)+ab(a+b)+c^2(a+b)=0$$
$$(a+b)(ab+ca+bc+c^2)=0$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

要 $a+b$, $b+c$, $c+a$ 的乘积为 0, 则其中至少要有一个为 0, 要有其中一个为 0, 则它的二个字母必为相反数.

$\therefore$ a、b、c 三数中必有两数互为相反数.

【1026】证:

$$(aa',ab',ba',bb')=((aa',ab')(ba',bb'))$$

$\because$ $(aa',ab')=a(a',b')=ad'$

$(ba',bb')=b(a',b')=bd'$

而

$$\begin{aligned}((aa',ab'),(ba',bb'))&=(ad',bd')\\&=(a,b)d'=dd'\end{aligned}$$

$\therefore$ $(aa'ab',ba',bb')=dd'$ 得证.

【1027】解: 已知 $n\in N$, $n>1$, 三个条件: (1) 没有小于 10 的质因子,(即不是偶数和 3、5、7 的倍数), (2) 不是质数, (3) 要是最小的.

(A) 去掉偶数和质数后剩下 $125=5\cdot21$ 不合.

(B) 去掉偶数和质数后剩下 $111=3\cdot37$,和 $115=5\cdot23$, $117=3\cdot39$, $119=7\cdot17$ 都不合.

(C) 去掉偶数和质数后,剩下 $121=11\cdot11$ 合,以后各数都比 121 大.

$\therefore$ 答案(C).

【1031】证: (1) 当 $n=1$ 时,

$$n^3+5n=1+5=6$$

是 6 的倍数; $n=2$ 时,

$$n^3+5n=8+10=18$$

是6的倍数.

(2) 假设当 $n=k$ 时 k^3+5k 是6的倍数，看 $n=k+1$ 时 n^3+5n 是否仍是6的倍数，事实上当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}n^3+5n&=(k+1)^3+5(k+1)\\&=k^3+3k^2+3k+1+5k+5\\&=(k^3+5k)+3k(k+1)+6,\end{aligned}$$

其中第一项 k^3+5k 根据假设是6的倍数，第二项 $k(k+1)$ 是两个连续整数之积，是2的倍数，(见1241) 从而 $3k(k+1)$ 是6的倍数，第三项是6，因此 $(k^3+5k)+3k(k+1)+6$ 是6的倍数，也就是说当 $n=k+1$ 时，n^3+5n 仍是6的倍数.

根据 (1) (2) 可以断定对于任意自然数 n，n^3+5n 永远是6的倍数.

【1032】证：(1) 当 $n=1$ 时

$$\begin{aligned}&3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}=3\times5^3+2^4\\&=375+16=391=17\times23\end{aligned}$$

是17的倍数.

(2) 假设当 $n=k$ 时，$3\times5^{2k+1}+2^{3k+1}$ 是17的倍数.

求证：当 $n=k+1$ 时原式仍是17的倍数，事实上，当 $n=k+1$ 时原式成为：

$$\begin{aligned}&3\times5^{2(k+1)+1}+2^{3(k+1)+1}\\&=3\times5^{(2k+1)+2}+2^{(3k+1)+3}\\&=3\times5^2\times5^{2k+1}+2^3\times2^{3k+1}\\&=3(17+8)5^{2k+1}+8\times2^{3k+1}\\&=3\times17\times5^{2k+1}+8(3\times5^{2k+1}+2^{3k+1})\end{aligned}$$

这里 $3\times17\times5^{2k+1}$ 是17的倍数，

$$3\times5^{2k+1}+2^{3k+1}$$

根据假设是17的倍数，于是

$$3\times17\times5^{2k+1}+8(3\times5^{2k+1}+2^{3k+1})$$

是17的倍数. 所以当

$$n=k+1$$

时原式仍是17的倍数.

根据 (1) (2)，可以断定对于任意自然数 n，$3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ 总是17的倍数.

【1033】证法一：用分解因式法

$$\begin{aligned}13^{2n}-1&=(13^2)^n-1\\&=(13^2-1)[(13^2)^{n-1}+(13^2)^{n-2}+\cdots+1]\\&=168(13^{2n-2}+13^{2n-4}+\cdots+1)\end{aligned}$$

∵ 括号里是一个正整数 ∴ $13^{2n}-1$ 是168的倍数.

证法二：用数学归纳法

(1) 当 $n=1$，

$13^{2n}-1=13^2-1=168$ 是

是168的倍数.

当 $n=2$，

$$\begin{aligned}13^{2n}-1&=(13^2)^2-1\\&=(13^2-1)(13^2+1)=168\cdot170\end{aligned}$$

是168的倍数.

(2) 假设当 $n=k$ 时，$13^{2k}-1$ 是168的倍数，看 $n=k+1$ 时 $13^{2n}-1$ 是不是168的倍数. 事实上，当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}13^{2n}-1&=13^{2(k+1)}-1=13^{2k+2}-1\\&=13^{2k}\cdot13^2-1=169\cdot13^{2k}-1\\&=168\cdot13^{2k}+(13^{2k}-1)\end{aligned}$$

∵ $168\cdot13^{2k}$ 是168的倍数，$13^{2k}-1$ 依假设是168倍数，从而 $168\cdot13^{2k}+(13^{2k}-1)$ 是168的倍数，这就是当 $n=k+1$ 时 $13^{2n}-1$ 也是168的倍数.

根据 (1) (2) 可以断定，设 n 为任意正整数 $13^{2n}-1$ 是168的倍数.

【1034】证：设这个两位数的十位数字为 a，个位数字为 b，则这个两位数就是 $10a+b$，按条件 $a+\dfrac{b}{2}=2n$ (n 为正整数) 得

$$2a+b=4n.$$

因此

$$\begin{aligned}10a+b&=(2a+b)+8a=4n+8a\\&=4(n+2a),\end{aligned}$$

∵ $n+2a$ 是整数，∴ 这个两位数是4的倍数.

【1035】证：设这个整数为 N，它的个位、十位、百位…第 n 位数分别为 a_0、a_1、$a_2\cdots a_{n-1}$，则这个整数 N 可表为：

$$\begin{aligned}N=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\cdots\\+10^2a_2+10^1a_1+a_0,\end{aligned}$$

而它的数字和

$$N' = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

式中 a_i 是十个数码中的一个，且 $a_{n-1} \neq 0$.

从而

$$N - N' = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \cdots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0 - (a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0)$$

$$= (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + (10^{n-2} - 1)a_{n-2} + \cdots + (10^2 - 1)a_2 + (10 - 1)a_1$$

$$= \underbrace{99\cdots9}_{n-1\text{个}}a_{n-1} + \underbrace{99\cdots9}_{n-2\text{个}}a_{n-2} + \cdots + 99a_2 + 9a_1$$

$$= 9[\underbrace{11\cdots1}_{n-1\text{个}}a_{n-1} + \underbrace{11\cdots1}_{n-2\text{个}}a_{n-2} + \cdots + 11a_2 + a_1]$$

是 9 的倍数，∴ 这就是要证明的. 例如:

$4321 - (4 + 3 + 2 + 1) = 4311 = 9(479)$.

【1036】证: 设这个 n 位数为 N, 则

$$N = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

再设 N' 为重新排列后的新数，则

$$N' = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-2} \cdot 10 + a_{n-1},$$

于是

$$N' - N = (a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-2} \cdot 10 + a_{n-1}) - (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0)$$

$$= a_0(10^{n-1} - 1) + a_1(10^{n-2} - 10) + \cdots - a_{n-2}(10^{n-2} - 10) - a_{n-1}(10^{n-1} - 1)$$

$$= a_0(10^{n-1} - 1) + a_1 \cdot 10(10^{n-3} - 1) + \cdots - a_{n-2} \cdot 10(10^{n-3} - 1) - a_{n-1}(10^{n-1} - 1)$$

∵ 式中每一项都含因子 $10^k - 1$ (k 是正整数)，它们各位上数字都是 9，∴ $N' - N$ 是 9 的倍数.

【1037】证: 设这个三位数

$$N = \overline{abc} = 100a + 10b + c$$

(a、b、c 表示数码)，因已知 $a - b + c = 11k$ (k 是正整数)，从而

$$N = 100a + 10b + c = 99a + 11b + (a - b + c) = 99a + 11b + 11k = 11(9a + b + k)$$

∴ 这个三位数也是 11 的倍数.

例如: $924 = 11 \times 84$, $847 = 11 \times 77$, 等.

【1038】(1) 证: 设 $N = \overline{aabb}$ (a、b 是数码，且 $a \neq 0$) 则,

$$N = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$$

∴ N 是 11 的倍数.

(2) 解: 已知N是 11 的倍数，若N是完全平方数，则 $\sqrt{N}$ 也应是 11 的倍数，又N是四位数，则 $\sqrt{N}$是二位数.

令 $\sqrt{N} = 11k$ (k 是一位正整数),

则 $(11k)^2 = N = 11(100a + b)$(已证),

$$k^2 = \frac{100a + b}{11} = 9a + \frac{a + b}{11}$$

k 是整数，k^2 是一个完全平方数，$\frac{a + b}{11}$ 应是整数，由于 $1 \leqslant a \leqslant 9$、$0 \leqslant b \leqslant 9$, 有

$$1 \leqslant a + b \leqslant 18,$$

在 $1 \leqslant a + b \leqslant 18$ 中，只有 $a + b = 11$ 时 $\frac{a + b}{11}$ 是整数 1，于是 $k^2 = 9a + 1$, 而在 a 的各种可能值 1 到 9 中，只有 $a = 7$ 时 $9a + 1$ 是一个完全平方数 64，因此 $a = 7$, $b = 4$, $k = 8$, ∴ $\sqrt{N} = 88$.

验之: $N = 88^2 = 7744 = 11(704)$, 合.

【1039】证: (用反证法)假设 a、b 都不是 3 的倍数，则可设 $a = 3k \pm 1$, $b = 3l \pm 1$, $c = 3p$ 或 $3p \pm 1$(k、l、$p \in I$)，于是

左边:

$$a^2 + b^2 = (3k \pm 1)^2 + (3l \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 + 9l^2 \pm 6l + 1 = 3(3k^2 \pm 2k + 3l^2 \pm 2l) + 2$$

是 3 的倍数余 2.

右边:

$c^2=(3p)^2=3(3p^2)+0$ 是 3 的倍数余 0.
或 $=(3p\pm1)^2=3(3p^2\pm2p)+1$ 是 3 的倍数余 1.

$\because$ $2\neq0$ 或 1, $a^2+b^2\neq c^2$, 与已知

$$a^2+b^2=c^2$$

矛盾,假设不成立, $\therefore$ a、b 中至少有一个是 3 的倍数.

【1040】证: (1) 当 $n=1$ 时,

$$4^{2n+1}+3^{n+2}=4^3+3^3=91=13\times7$$

可被 13 整除.

(2) 假设当 $n=k$ 时, $(k\in N)$, $4^{2k+1}+3^{k+2}$ 可被 13 整除. 看当 $n=k+1$ 时, $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 可否能被 13 整除. 事实上, 当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}4^{2n+1}+3^{n+2}&=4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}\\&=4^{2k+3}+3^{k+3}=4^{(2k+1)+2}+3^{(k+2)+1}\\&=4^2\cdot4^{2k+1}+3\cdot3^{k+2}\\&=3\cdot4^{2k+1}+3\cdot3^{k+2}+13\cdot4^{2k+1}\\&=3(4^{2k+1}+3^{k+2})+13\cdot4^{2k+1}\end{aligned}$$

其中第一项的 $4^{2k+1}+3^{k+2}$ 根据假设能被 13 整除,所以 $3(4^{2k+1}+3^{k+2})$ 可被 13 整除. 又第二项 $13\cdot4^{2k+1}$ 能被 13 整除,因此

$$3(4^{2k+1}+3^{k+2})+13\cdot4^{2k+1}$$

可被 13 整除.这就是说当 $n=k+1$ 时, $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 也可被 13 整除.

根据 (1)、(2) 就可断定, 对于任意自然数 n, $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 可被 13 整除.

【1041】证: (1) 当 $n=1$ 时,

$$5^n+2\times3^{n-1}+1=5+2\times3^0+1=8$$

能被 8 整除.

(2) 假设当 $n=k$ 时, $5^k+2\times3^{k-1}+1$ 能被 8 整除,看当 $n=k+1$ 时 $5^n+2\times3^{n-1}+1$ 可否能被 8 整除.

事实上,当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}5^n+2\times3^{n-1}+1&=5^{k+1}+2\times3^{(k+1)-1}+1\\&=5\times5^k+6\times3^{k-1}+1\\&=5\times5^k+10\times3^{k-1}+5-4\times3^{k-1}-4\\&=5(5^k+2\times3^{k-1}+1)-4(3^{k-1}+1)\end{aligned}$$

其中第一项的 $5^k+2\times3^{k-1}+1$ 根据假设能被 8 整除, 所以 $5(5^n+2\times3^{n-1}+1)$ 能被 8 整除. 又第二项因 k 是自然数, 3^{k-1} 是奇数, $3^{k-1}+1$ 是偶数,含有因数 2,因此 $4(3^{k-1}+1)$ 能被 8 整除. 从而 $5(5^k+2\times3^{k-1}+1)-4(3^{k-1}+1)$ 能被 8 整除. 也就是说: 当 $n=k+1$ 时 $5^n+2\times3^{n-1}+1$ 也能被 8 整除.

$\therefore$ 根据 (1)、(2) 就可断定, 对于任意自然数 n, $5^n+2\times3^{n-1}+1$ 能被 8 整除.

【1042】证: (1) 当 $n=1$ 时,

$$3^{3n}-26n-1=3^3-26-1=0$$

能被 676 整除.

当 $n=2$ 时,

$$3^{3n}-26n-1=3^6-26\cdot2-1=676$$

能被 676 整除.

(2) 假设 $n=k$ 时, $3^{3k}-26k-1$ 能被 676 整除. 看当 $n=k+1$ 时, $3^{3n}-26n-1$ 可否能被 676 整除. 事实上,当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}3^{3n}-26n-1&=3^{3(k+1)}-26(k+1)-1\\&=3^{3k}\cdot3^3-26k-26-1\\&=27\cdot3^{3k}-26k-26-1\\&=1\cdot3^{3k}-26k-1+26\cdot3^{3k}-26\\&=(3^{3k}-26k-1)+26(27^k-1)\\&=(3^{3k}-26k-1)+26(27-1)(27^{k-1}\\&\quad+27^{k-2}+\cdots+1)=(3^{3k}-26k-1)\\&\quad+676(27^{k-1}+27^{k-2}+\cdots+1)\end{aligned}$$

其中第一项 $3^{3k}-26k-1$ 根据假设能被 676 整除. 又第二项括号里是正整数, 所以 $676\times(27^{k-1}+27^{k-2}+\cdots+1)$ 能被 676 整除. 从而 $(3^{3k}-26k-1)+676(27^{k-1}+27^{k-2}+\cdots+1)$ 能被 676 整除. 这就是说: $n=k+1$ 时 $3^{3n}-26n-1$ 也能被 676 整除.

根据 (1)(2) 就可断定,对于任意自然数 n, $3^{3n}-26n-1$ 能被 676 整除.

【1043】证:

$$\begin{aligned}&n(n+1)(2n+1)\\&=n(n+1)[(n+2)+(n-1)]\\&=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

这两项都是三个连续整数之积, 而任意三个连续整数之积能被 3! 整除(参看 [1241]).

$\because$ $3!=6$, $\therefore$ $n(n+1)(2n+1)$ 能被 6

整除.

【1044】**证法一**:

$n(n+1)(5n+4)=n(n+1)(5n-5+9)$

$=n(n+1)[5(n-1)+9]$

$=5(n-1)n(n+1)+9n(n+1)$.

这里第一项里 $(n-1)n(n+1)$ 是三个连续整数积能被 $3!$ 即6整除. 第二项里 $n(n+1)$ 是2个连续整数积能被 $2!$ 即2整除，而9能被3除,因此 $9n(n+1)$ 能被6整除.

$\therefore$ $n(n+1)(5n+4)$ 能被6整除.

证法二: (1) 当 $n=1$ 时;

$n(n+1)(5n+4)=1\cdot2\cdot9=18$

能被6整除.

(2) 假设当 $n=k$ 时, $k(k+1)(5k+4)$ 能被6整除. 看当 $n=k+1$ 时，原式是否仍能被6整除. 事实上,当 $n=k+1$ 时

$n(n+1)(5n+4)$

$=(k+1)[(k+1)+1][5(k+1)+4]$

$=(k+1)(k+2)[(5k+4)+5]$

$=(k+1)(5k+4)(k+2)+5(k+1)(k+2)$

$=k(k+1)(5k+4)+2(k+1)(5k+4)$
$\quad+5(k+1)(k+2)$

$=k(k+1)(5k+4)+(k+1)(15k+18)$

$=k(k+1)(5k+4)+3(k+1)(5k+6)$

其中对于 $k(k+1)(5k+4)$，根据假设能被6整除. 对于 $3(k+1)(5k+6)$: k 是奇数时 $k+1$ 是偶数, k 是偶数时 $5k+6$ 是偶数，即在 $k+1$ 和 $5k+6$ 里总有一个是2的倍数,所以 $3(k+1)(5k+6)$ 能被6整除. 因此

$k(k+1)(5k+4)+3(k+1)(5k+6)$

能被6整除. 这就是说: 当 $n=k+1$ 时, $n(n+1)(5n+4)$ 也能被6整除.

根据(1)、(2)可以断定: 对于任意自然数 n, $n(n+1)(5n+4)$ 能被6整除.

【1045】**证**: 1° 当 $n=1$ 时 $4\cdot6^1+5^{1+1}=49$ 被20除余9

当 $n=2$ 时 $4\cdot6^2+5^{2+1}=269$

被20除余9

2° 假设当 $n=k$ 时 $(4\cdot6^k+5^{k+1})$ 被20除余9，看当 $n=k+1$ 时 $4\cdot6^{k+1}+5^{k+1+1}$ 是否被20除余9. 事实上当 $n=k+1$ 时

$4\cdot6^{k+1}+5^{k+1+1}=24\cdot6^k+5\cdot5^{k+1}$

$=4\cdot6^k+5^{k+1}+20\cdot6^k+4\cdot5^{k+1}$

$=(4\cdot6^k+5^{k+1})+20(6^k+5^k)$

这里 $4\cdot6^k+5^{k+1}$ 根据假设被20除余9，又 $20(6^k+5^k)$ 被20除余0，说明原式当 $n=k+1$ 时仍是被20除余9.

由1°、2°知对于 $n\in N$, $4\cdot6^n+5^{n+1}$ 被20除余9.

【1046】**证**: 因

$n(n^2-1)(n^2-5n+26)$

$=n(n-1)(n+1)(n^2-5n+6+20)$

$=n(n-1)(n+1)[(n-2)(n-3)+20]$

$=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$
$\quad+20(n-1)n(n+1)$

这里第一项是5个连续整数之积被能 $5!$ 即120整除. 又第二项里 $(n-1)n(n+1)$ 是3个连续整数之积能被 $3!$ 即6整除,

因此 $20(n-1)n(n+1)$ 能被120整除

$\therefore$ $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ 能被120整除

【1047】**证**: 令

$M=(2903^n-803^n)-(464^n-261^n)$

$=(2903-803)A-(464-261)B$

$=2100A-203B=7(300A-29B)$

(A、B 是整数)

$\because$ $300A-29B$ 是整数, $\therefore$ M 整除7.

再令

$M=(2903^n-464^n)-(803^n-261^n)$

$=(2903-464)C-(803-261)D$

$=2439C-542D=271(9C-2D)$

(C、D 是整数)

$\because$ $9C-2D$ 是整数, $\therefore$ M 整除271.

$\because$ 7和271互质,

$\therefore$ M 能被 271×7 即1897整除.

【1048】**证法一**: 已知恒等式

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots$
$\quad+ab^{n-2}+b^{n-1})$,

令 $a=2$, $b=-1$, 代人此式,则得

$$2^n-(-1)^n=[2-(-1)]A=3A,$$

A 是此恒等式当 $a=2$，$b=-1$ 时右边第二个因式之值，因此使

$$2^n+1=2^n-(-1)^n+1+(-1)^n$$
$$=3A+1+(-1)^n.$$

因 a、b 是整数，A 也是整数． 所以当 n 是奇数时有 $2^n+1=3A$，右端能被 3 整除，按照左右同余，左端也能被 3 整除．

∴ 当 n 是一切奇数时 2^n+1 能 被 3整除．

证法二： (1) 当 $n=1$ 时，

$2^n+1=2^1+1=3$，当 $n=3$ 时，

$2^n+1=2^3+1=9$ 都能被 3 整除．

(2) 假设当 $n=k$ 时，k 是奇数，2^k+1 能被 3 整除，看当 $n=k+2$ 时，2^n+1 是否能被 3 整除．事实上当 $n=k+2$ 时

$$2^n+1=2^{k+2}+1=4\cdot2^k+1$$
$$=(2^k+1)+3\cdot2^k,$$

其中第一项根据假设 2^k+1 能被 3 整除，第二项是 3 的倍数能被 3 整除， 于是当 $n=k+2$ 时 2^n+1 也能被 3 整除．

∴ 根据 (1)(2)，当 n 是一切奇数时 2^n+1 能被 3 整除．

【1049】**证：** 因 $1947=33\times59$，而 33 及 59 互质，所以只要证明 $46^n+296\times13^n$ 能被 33 与 59 分别整除就可以了．

因不论 n 奇、偶，(a^n-b^n) 整除 $(a-b)$，而当 n 是奇数时，(a^n+b^n) 整除 $(a+b)$，因此如果 n 是奇数，

那么

$$46^n+296\times13^n=(46^n-13^n)+297\times13^n$$
$$=(46-13)A+9\times33\times13^n\quad(A\in J)$$
$$=33(A+9\times13^n)$$ 能被 33 整除．

同时，

$$46^n+296\times13^n=(46^n+13^n)+295\times13^n$$
$$=(46+13)B+5\times59\times13^n\quad(B\in J)$$
$$=59(B+5\times13^n)$$ 能被 59 整除．

∴ 题式当 n 是奇数时，能被 1947 整除．

【1050】**证：** 设这三个连续自然数为 n，$n+1$，$n+2$，$(n\in N)$，则它们的立方和为

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$$

证法一：用分解因式法

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$$
$$=3n^3+9n^2+15n+9$$
$$=3(n^3+3n^2+2n+3n+3)$$
$$=3n(n+1)(n+2)+9(n+1)$$

其中 $n(n+1)(n+2)$ 是三个连续整数之积，可被 3! 整除，$3n(n+1)(n+2)$ 可被 9 整除．又 $9(n+1)$ 可被 9 整除，就是说

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$$

可被 9 整除．

∴ 三个连续自然数的立方和，可被 9 整除．这个证法适用于证三个连续整数的立方和．

证法二：用数学归纳法

(1) 当 $n=1$ 时，

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$$
$$=1+8+27$$
$$=36$$

能被 9 整除．

当 $n=2$ 时，

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$$
$$=8+27+64=99$$

能被 9 整除．

(2) 假设当 $n=k$ 时，

$$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$$

能被 9 整除，看当 $n=k+1$ 时，

$(k+1)^3+[(k+1)+1]^3+[(k+1)+2]^3$ 能否被 9 整除．事实上当 $n=k+1$ 时

$$(k+1)^3+[(k+1)+1]^3+[(k+1)+2]^3$$
$$=(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$$
$$=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27$$
$$=k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$$
$$+9(k^2+3k+3)$$

根据假设 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ 能被 9 整除，又 $9(k^2+3k+3)$ 能被 9 整除，所以 $(k+1)^3+[(k+1)+1]^3+[(k+1)+2]$ 也能被 9 整除．

∴ **根据 (1)(2) 可断定，对于任意三个自然数的立方和能被 9 整除．**

【1051】**证**：设这个自然数为 $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$，这里 $a_i(i=0,1,\cdots n-1)$ 表示数码，又已知 $a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0$ 能被 9 整除.

$$\because \overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$$
$$=a_{n-1}10^{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}+\cdots+a_110^1+a_0$$
$$=a_{n-1}10^{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}+\cdots+a_110+a_0$$
$$+(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0)$$
$$-(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0)$$
$$=a_{n-1}10^{n-1}-a_{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}$$
$$-a_{n-2}+\cdots+a_110-a_1+a_0-a_0$$
$$+(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0)$$
$$=a_{n-1}(10^{n-1}-1)+a_{n-2}(10^{n-2}-1)$$
$$+\cdots+a_1(10-1)$$
$$+(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0)$$
$$=(10-1)[a_{n-1}(10^{n-2}+\cdots+1)$$
$$+a_{n-2}(10^{n-3}+\cdots+1)+\cdots+a_1]$$
$$+(a_{n-1}+a_{n-2}$$
$$+\cdots+a_1+a_0)$$

上式两项中第一项，中括号里是一个整数，第一项能被 9 整除，第二项已知能被 9 整除.

$\therefore$ $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$ 能被 9 整除，从而命题得证.

【1052】**证**：设这个自然数

$$N=\overline{\cdots a_4a_3a_2a_1}$$
$$=a_1+10^1a_2+10^2a_3+10^3a_4+\cdots,$$

其中 a 表示数码，最高位数码不为 0，又因为

$$10^1=(11-1)$$
$$10^2=(11-1)^2=11^2-2\cdot11+1$$
$$=11(11-2)+1=11\cdot9+1$$
$$10^3=(11-1)^3=11^3-3\cdot11^2+3\cdot11-1$$
$$=11(11^2-3\cdot11+3)-1$$
$$=11\cdot91-1,\cdots$$

得到

$$N=a_1+(11-1)a_2+(11\cdot9+1)a_3$$
$$+(11\cdot91-1)a_4+\cdots$$
$$=a_1+11a_2-a_2+11\cdot9a_3+a_3$$
$$+11\cdot91a_4-a_4+\cdots$$
$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots)$$
$$-(a_2+a_4+a_6+\cdots)$$
$$+11(a_2+9a_3+91a_4+\cdots)$$

其中 $11(a_2+9a_3+91a_4+\cdots)$ 能被 11 整除，而 $(a_1+a_3+\cdots)-(a_2+a_4+\cdots)$ 是奇位上数字和与偶位上数字和之差，如果能被 11整除，那么N能被 11 整除，反之亦然.

$\therefore$ N 能被 11 整除的充要条件是：奇位上数字与偶位上数字和之差能被 11 整除.

【1053】**证**：设这个奇数为$a=2n+1,n\in N$，则

$$a^2-1=(2n+1)^2-1=4n^2+4n$$
$$=4n(n+1),$$

两个连续自然数 n 和 $n+1$ 中，总有一个是偶数，$\therefore$ $4n(n+1)$能被 8 整除. 即 a^2-1 能被 8 整除.

【1054】**证**：设任意两个奇数中的一个奇数为 x，则另一个奇数可表示为 $x+2n$（n 为自然数），于是这两个奇数的平方差

$$(x+2n)^2-x^2=x^2+4nx+4n^2-x^2$$
$$=4n(x+n)$$

在 $n(x+n)$ 中，如果 n 为奇数，则 $x+n$ 是"奇数加奇数"得偶数，含有因数 2；如果 n 为偶数，则 n 里有因数 2；因此 $4n(x+n)$ 整除 8.

$\therefore$ 任意两个奇数的平方差能被 8 整除.

【1055】**证**：要"和"能被 3 整除，只要各数被 3 除后余数之"和"能被 3 整除.

因任一整数被 3 除后，余数只能是 0、1、2 之一，故在所给五个整数被 3 除后所得五个余数中：如果 0, 1, 2 都出现，因

$$0+1+2=3\vdots3,$$

所以选余数得 0, 1, 2 的三个整数时，其和一定能被 3 整除. 如果只出现 0, 1, 2 中的两种或一种，则五个余数中必有一个余数至少出现三次，因相同三余数之和一定能被 3 整除，所以选这余数相同的三个整数时，其和一定能被 3 整除.

综上所述，证明了任给五个整数，必能从其中选出三个，使得它们的和能被 3 整除.

【1056】**证**：这里

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659}+\frac{1}{660}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659}\right)$$
$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{989}+\frac{1}{990}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

这里的加数共有 660 项，前后各 330 项，与两端等距项和分子相等，把它们分别相加再求和：

$$\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}=\frac{1979}{660\cdot1319}$$
$$\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}=\frac{1979}{661\cdot1318}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(+)\quad\frac{1}{989}+\frac{1}{990}=\frac{1979}{989\cdot990}$$

得

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$
$$=\frac{1979A}{660\cdot661\cdots1319}\quad(A\in N)$$

∵ $p=1979A$，A 是一个自然数，∴ p 能被 1979 整除.

【1057】证：根据条件 u^2+uv+v^2 能被 9 整除，把它改写，得一个平方数与一个 3 倍数的和，即 $(u-v)^2+3uv$。因一个平方数与一个 3 倍数的和能被 9 整除时，这个平方数和这个 3 倍数本身都能被 9 整除，即 $(u-v)^2$ 和 $3uv$ 都能被 9 整除.

从 $(u-v)^2$ 能被 9 整除，知两数差 $u-v$ 能被 3 整除，则只有 u 和 v 或者都能被 3 整除，或者都不能时才有这可能.

从 $3uv$ 能被 9 整除，知两数积 uv 能被 3 整除，则 u 和 v 中至少有一个数能被 3 整除，这说明另一个数也必能被 3 整除.

∴ u 和 v 都能被 3 整除　　得证.

【1058】证：1) 设 $2x+3y=k$（k 是任意整数）①

则

$$x=\frac{k-3y}{2}=\frac{-2y+k-y}{2}$$
$$=-y+\frac{k-y}{2}$$

因 x、y 是整数，其中 $\frac{k-y}{2}$ 必须也是整数.

令 $\frac{k-y}{2}=s$（s 是任意整数）

得 $\begin{cases}y=k-2s & ②\\ x=-k+3s & ③\end{cases}$

上式 s 取任意整数时，得整数 x 和 y 满足 ①.

2) 设 $9x+5y=l$（l 是任意整数）④

则

$$y=\frac{l-9x}{5}=\frac{-10x+l+x}{5}$$
$$=-2x+\frac{l+x}{5}$$

因 x，y 是整数，其中 $\frac{l+x}{5}$ 必须也是整数.

令 $\frac{l+x}{5}=t$（t 是任意整数）

得 $\begin{cases}x=-l+5t & ⑤\\ y=2l-9t & ⑥\end{cases}$

上式 t 取任意整数时，得整数 x 和 y 满足 ④.

3) 如果 $2x+3y=k$ 是 17 的倍数，

设 $k=17m$（m 是任意整数）

则 $\begin{cases}\text{从 ③} & x=-17m+3s\\ \text{从 ②} & y=17m-2s\end{cases}$

这时

$$9x+5y=9(-17m+3s)+5(17m-2s)$$
$$=17(-4m+s)$$

也是 17 的倍数.

4) 如果 $9x+5y=l$ 是 17 的倍数，

设 $t=17n$（n是任意整数）

则 $\begin{cases}从⑤\\从⑥\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-17n+5t\\y=34n-9t\end{cases}$

这时

$$\begin{aligned}2x+3y&=2(-17n+5t)+3(34n-9t)\\&=17(4n-t)\end{aligned}$$

也是 17 的倍数.

∴ 命题得证.（参看不定方程）

如果问：x 和 y 取哪些整数时，表达式：$2x+3y$ 和 $9x+5y$ 能同时被 17 整除？

那么设 $\left.\begin{cases}2x+3y=17m\\9x+5y=17n\end{cases}\right\}$（$m$、$n$是任意整数）

则

$$\begin{cases}5(2x+3y)=5\cdot 17m\\3(9x+5y)=3\cdot 17n\end{cases}$$

$$27x-10x=17(3n-5m)$$

$$x=3n-5m$$

又

$$\begin{cases}9(2x+3y)=9\cdot 17m\\2(9x+5y)=2\cdot 17n\end{cases}$$

$$27y-10y=17(9m-2n)$$

$$y=9m-2n$$

∴ 取 $\begin{cases}x=3n-5m\\y=9m-2n\end{cases}$ 时，$2x+3y$ 和 $9x+5y$ 能同时被 17 整除.

例如：$\begin{cases}m=0\\n=0\end{cases}$ 时 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+3y=0\\9x+5y=0\end{cases}$

能同时被 17 整除.

$\begin{cases}m=1\\n=1\end{cases}$ 时 $\begin{cases}x=-2\\y=7\end{cases}$ $\begin{cases}2x+3y=17\\9x+5y=17\end{cases}$

能同时被 17 整除.

$\begin{cases}m=-1\\n=-1\end{cases}$ 时 $\begin{cases}x=2\\y=-7\end{cases}$ $\begin{cases}2x+3y=-17\\9x+5y=-17\end{cases}$

能同时被 17 整除.

$\begin{cases}m=1\\n=-1\end{cases}$ 时 $\begin{cases}x=-8\\y=11\end{cases}$ $\begin{cases}2x+3y=17\\9x+5y=-17\end{cases}$

能同时被 17 整除.

$\begin{cases}m=2\\n=3\end{cases}$ 时 $\begin{cases}x=-1\\y=12\end{cases}$ $\begin{cases}2x+3y=34\\9x+5y=51\end{cases}$

能同时被 17 整除. ···

∴ 有无数个整数 x 和 y 满足命题.

【1059】解:

$(A)\begin{cases}3+0=3\ \times\\30\end{cases}$　$(B)\begin{cases}3+3=6\ \checkmark\\33\quad\times\end{cases}$

$(C)\begin{cases}4+0=4\ \times\\40\end{cases}$　$(D)\begin{cases}4+2=6\ \checkmark\\42\quad\checkmark\end{cases}$　∴ 答案 (B)

【1061】解法一:

$$\begin{array}{r|l}
 & x-2 \\
x^2-4x+3 & x^3-6x^2-ax\qquad+b \\
 & x^3-4x^2\quad+3x \\
 & \quad-2x^2-ax-3x \\
 & \quad-2x^2\quad+8x\qquad-6 \\
 & \qquad-(a+11)x+(b+6)
\end{array}$$

能整除则余式为 0，得

$$\begin{cases}-(a+11)=0\\b+6=0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}a=-11\\b=-6\end{cases}$$

解法二：令 $f(x)=x^3-6x^2-ax+b$

因 $f(x)$ 能被

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

整除，

则 $\begin{cases}f(1)=1-6-a+b=0\\f(3)=27-54-3a+b=0\end{cases}$

即 $\begin{cases}a-b=-5\\3a-b=-27\end{cases}$　∴ $\begin{cases}a=-11\\b=-6\end{cases}$

解法三：设 x^3-6x^2-ax+6 被

$$x^2-4x+3$$

整除后得商 $x+k$.

则

$$\begin{aligned}&x^3-6x^2-ax+b\\&=(x^2-4x+3)(x+k)\\&\equiv x^3+(k-4)x^2+(3-4k)+3k\end{aligned}$$

对比系数 $\begin{cases}k-4=-6\\3-4k=-a\\b=3k\end{cases}$

$$\therefore\ \begin{cases}k=-2\\a=-11\\b=-6\end{cases}$$

【1062】**解法一:**

$$
\begin{array}{r}
\frac{a}{2}x+\left(\frac{a}{4}-\frac{9}{2}\right)\qquad\qquad\qquad\qquad \\
2x-x-1\overline{)ax^3\qquad -9x^2\qquad +bx\qquad +2} \\
ax^3-\frac{a}{2}x^2\qquad -\frac{a}{2}x\qquad\qquad \\
\hline
\left(\frac{a}{2}-9\right)x^2+\left(\frac{a}{2}+b\right)x\qquad \\
\left(\frac{a}{2}-9\right)x^2-\left(\frac{a}{4}-\frac{9}{2}\right)x-\left(\frac{a}{4}-\frac{9}{2}\right) \\
\hline
\left(\frac{3a}{4}+b-\frac{9}{2}\right)x+\left(\frac{a}{4}-\frac{5}{2}\right)
\end{array}
$$

令余数为 0,

得 $\begin{cases}\dfrac{a}{4}-\dfrac{5}{2}=0\\ \dfrac{3a}{4}+b-\dfrac{9}{2}=0\end{cases}$ $\begin{cases}a-10=0\\ \dfrac{15}{2}+b-\dfrac{9}{2}=0\end{cases}$

$$\therefore\ \begin{cases}a=10\\ b=-3\end{cases}$$

解法二:

因 $f(x)$ 能被

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$$

整除

有 $\begin{cases}f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a}{8}-\dfrac{9}{4}-\dfrac{b}{2}+2=0\\ f(1)=a-9+b+2=0\end{cases}$

得 $\begin{cases}a+4b=-2\\ a+b=7\end{cases}$ $\therefore\ \begin{cases}a=10\\ b=-3\end{cases}$

【1063】**解:** 令 $f(x)=ax^3+bx^2-47x-15$

因 $f(x)$ 能被 $3x+1$ 及 $2x-3$ 整除

有

$$\begin{cases}f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{a}{27}+\dfrac{b}{9}+\dfrac{47}{3}-15=0\\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27a}{8}+\dfrac{9b}{4}-\dfrac{141}{2}-15=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\dfrac{a}{27}-\dfrac{b}{9}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{27a}{8}+\dfrac{9b}{4}=\dfrac{171}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a-3b=18\\ 3a+2b=76\end{cases}\ \therefore\ \begin{cases}a=24\\ b=2\end{cases}$$

【1064】这里 $x^2-2x+1=(x-1)^2$,两个根只有一个值 1,如用余数定理代入

$$f(1)=1-5+11+m+n=0,$$

$m+n=-7$,则一个方程二个未知数,不能解决问题,试以其它方法.

解法一: 用除法

$$
\begin{array}{r}
x^2-3x+4\qquad\qquad\qquad\qquad \\
x^2-2x+1\overline{)x^4-5x^3+11x^2+mx\qquad +n} \\
x^4-2x^3+\quad x^2\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
-3x^3+10x^2\qquad\qquad\qquad \\
-3x^3+\ 6x^2\qquad -3x\qquad \\
\hline
4x^2+(m+3)x\qquad \\
4x^2\qquad -8x+\quad \\
\hline
(m+11)x+(n-\ \ )
\end{array}
$$

因能整除,则余式为 0,即

$$\begin{cases}m+11=0\\ n-4=0\end{cases}\ \therefore\ \begin{cases}m=-11\\ n=4\end{cases}$$

解法二: 参看被除式与除式: 首项

$$x^4\div x^2=x^2,$$

末项 $n\div 1=n$,只有中项待定.

可设商式为 x^2+lx+n,则

$x^4-5x^3+11x^2+mx+n=(x^2+lx+n)(x^2-2x+1)\equiv x^4-(l-2)x^3+(n-2l+1)x^2+(l-2n)x+n$

对比系数 $\begin{cases}l-2=-5\\ n-2l+1=11\\ l-2n=m\end{cases}$

$$\therefore\ \begin{cases}l=-3\\ n=4\\ m=-11\end{cases}$$

【1065】**解:** 要能被 99 整除,就要既能被 9 整除,又能被 11 整除. 根据数的整除性:

如果能被 9 整除,就有

$6+2+\alpha+\beta+4+2+7=9k\ (k\in N)$,

得 $\alpha+\beta=9k-21$

如果能被 11 整除,就有

$(6+\alpha+4+7)-(2+\beta+2)=11m$,

$(m\in N)$, 得 $\alpha-\beta=11m-13$; 因为 α,β 是数码: 有

$$0\leqslant\alpha\leqslant 9,\ 0\leqslant\beta\leqslant 9$$

$0\leqslant\alpha\leqslant 9$	$0\leqslant\alpha\leqslant 9$
$(+)\ 0\leqslant\beta\leqslant 9$	$(-)\ 9\geqslant\beta\geqslant 0$
$0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 18$	$-9\leqslant\alpha-\beta\leqslant 9$
即	即
$0\leqslant 9k-21\leqslant 18$	$-9\leqslant 11m-13\leqslant 9$
$21\leqslant 9k\leqslant 39$	$4\leqslant 11m\leqslant 22$
$2\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant 4\frac{1}{3}$	$\frac{4}{11}\leqslant m\leqslant 2$
取整数	取整数
$k=3, 4$	$m=1, 2$
当	当
$\begin{cases}k=3\text{时}, & \alpha+\beta=6\\ k=4\text{时}, & \alpha+\beta=15\end{cases}$	$\begin{cases}m=1\text{时}, & \alpha-\beta=-2\\ m=2\text{时}, & \alpha-\beta=9\end{cases}$

解方程组：

$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha-\beta=-2\end{cases}$　$2\alpha=4$　$\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$

$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha-\beta=9\end{cases}$　$2\alpha=15$　$\alpha=7.5$ 小数不合

$\begin{cases}\alpha+\beta=15\\ \alpha-\beta=-2\end{cases}$　$2\alpha=13$　$\alpha=6.5$ 小数不合

$\begin{cases}\alpha+\beta=15\\ \alpha-\beta=9\end{cases}$　$2\alpha=24$　$\alpha=12$ 大于 9 不合

∴ 这个七位数是 6224427

验算：$6224427=99\times 62873$ 正确

【1071】解：(1) 即 3.141… 和 3.142…，

$\because 3.141<3.142$，$\therefore \pi<\frac{22}{7}$

(2) 即 $-\frac{3}{5}$ 和 $-\frac{2}{3}$，$-\frac{9}{15}$ 和 $-\frac{10}{15}$，-9 和 -10，$\because -9>-10$，$\therefore -0.6>-\frac{2}{3}$

(3) 即 $\sqrt{0.5}$ 和 $\sqrt{(0.5)^2}$，$\sqrt{0.5}$ 和 $\sqrt{0.25}$，

$\because 0.5>0.25$，$\therefore \sqrt{0.5}>0.5$

(4) 即 $8+2\sqrt{15}$ 和 16，$\sqrt{15}$ 和 4，15 和 16，$\because 15<16$，$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{5}<4$

(5) 即 $12+2\sqrt{35}$ 和 $16+2\sqrt{15}$，$\sqrt{35}$ 和 $2+\sqrt{15}$，35 和 $19+4\sqrt{15}$，16 和 15，

$\because 16>15$，$\therefore \sqrt{5}+\sqrt{7}>1+\sqrt{15}$

(6) 即 $\frac{13\sqrt{29}}{13}$ 和 $\frac{69}{13}$，$\frac{\sqrt{4901}}{13}$ 和 $\frac{\sqrt{4761}}{13}$，

$\because 4901>4761$，$\therefore \sqrt{29}>5\frac{4}{13}$

(7) 即 $-3\sqrt[6]{2}$ 和 $-2\sqrt[3]{4}$，$-\sqrt[6]{729\cdot 2}$ 和 $-\sqrt[3]{8\cdot 4}$，$-\sqrt[6]{1458}$ 和 $-\sqrt[6]{1024}$，

$\because 1458>1024$，$\therefore -3\sqrt[6]{2}<2\sqrt[3]{-4}$

(8) 即 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}-2$，$2+\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}+\sqrt{2}$，$7+4\sqrt{3}$ 和 $7+2\sqrt{10}$，$\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{10}$，$\because 12>10$，

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\sqrt{5}-2$

【1072】解：先看哪些是正数.

(A) $10-3\sqrt{11}=\sqrt{100}-\sqrt{99}>0$

(B) $3\sqrt{11}-10=\sqrt{99}-\sqrt{100}<0$

(C) $18-5\sqrt{13}=\sqrt{324}-\sqrt{325}<0$

(D) $51-10\sqrt{26}=\sqrt{2601}-\sqrt{2600}>0$

(E) $10\sqrt{26}-51=\sqrt{2600}-\sqrt{2601}<0$

上列 5 个数中，只有 (A)、(D) 两数是正数，再来比较它们的大小.

$$10-3\sqrt{11}\vee 51-10\sqrt{26}$$
$$\sqrt{2600}\vee 41+\sqrt{99}$$
$$2600\vee 1681+82\sqrt{99}+99$$
$$10\vee\sqrt{99}$$
$$\sqrt{100}\vee\sqrt{99}$$

$\because 100>99$ 得 $10-3\sqrt{11}>51-10\sqrt{26}$，

得所找最小的正数为 $51-10\sqrt{26}$

∴ 答案 (D).

【1076】解：题式即 $n^{200}<(5^{\frac{3}{2}})^{200}$，

有 $n<5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}\approx 11.8$

∴ 答案 (D).

【1077】解：取 $x=1$，则

$M=\sqrt{[\sqrt{1}]}=\sqrt{[1]}=\sqrt{1}=1$，