JIHEYUDUIYING

集合与对应

陈 泽 张孔修 编

A

B

青海人民出版社

陈 泽 张孔修编

集合与对应

jihe yu duiying

青海人民出版社

集合与对应
陈 泽 张孔修 编
青海人民出版社出版
（西宁市西关大街76号）
青海省新华书店发行 青海海南印刷厂印刷
787×1092毫米1/32 印张 2.375 45,000字
1979年12月第1版 1979年12月第1次印刷
印数1—38,000
书号：13097·34 定价：0.19元

内 容 提 要

集合与对应是近代数学中两个最基本的概念。它们已经对数学的各个分支发生了深刻的影响，并且已经渗透到中小学的数学教材中，成了学生进一步学习近代数学的基础知识。

本书以比较通俗的语言，介绍了有关集合的一些基本概念和基本运算方法，用集合和对应的观点对函数、反函数和复合函数的概念作了阐述，可作为中小学数学教师的教学参考用书，同时是高中以上学生的一本较好的课外读物。对一般科技工作者、工人、有中等文化水平的干部和知识青年，在学习中也有一定的参考价值。

责任编辑　包延瑞
封面设计　光绍天

序　言

集合和对应是近代数学中两个最基本的概念。1892年，德国数学家康托（*George Cantor*，1845—1918）在研究三角函数收敛性问题的时候，奠定了集合理论的基础。从那以后，集合和对应的思想得到越来越广泛的应用，渗透到数学的各个分支，大大简化了数学论述的语言，对数学的各个分支产生了十分深刻的影响，成为数学研究领域中十分重要的基础和工具。许多重要的近代数学理论，例如实变函数、泛函分析、拓扑学等，都是建立在集合和对应理论的基础之上的。因此，了解和熟悉集合和对应的基本原理，对于学习和掌握近代数学是一个非常重要的准备。

全国十年制中小学数学教学大纲规定，在中小学数学教材中要逐步渗透集合与对应的思想和方法，为学生进一步学习和参加社会主义现代化建设打下良好的基础。这一要求，有着重大的意义。人们都清楚，在中小学各科教学中，数学是一门重要的基础学科。为了适应工农业生产和科学技术现代化的需要，使学生尽早接触并逐步了解一些近代数学的基础知识，是十分必要的。集合和对应的思想缩小了常量数学和变量数学（即所谓初等数学和高等数学）之间衔接的距

离．因此，学生掌握了集合与对应的概念和方法，一方面可以加深对传统数学教材的理解，例如用集合的观点来解释不等式组的解、三角形和四边形的分类等，用对应的观点来解释函数概念以及函数的定义域和值域等，更能使学生易于接受这些教材，并深刻理解其内在规律；另一方面也为进一步学习近代数学和现代科学技术奠定必要的基础．从青少年的接受能力来看，只要循序渐进，教学得法，学习集合和对应的基本概念不会发生很大困难．在中小学阶段逐步掌握这方面的初步知识，也是完全可能的．

编写这本小册子的目的，主要是想比较系统地介绍有关集合和对应的基本知识，作为中小学数学教师的教学参考书和中学生的课外读物．当然，也可供对这方面有兴趣的科技工作者、工人、干部、知识青年参考．

本书分三个部分．第一部分介绍了集合，集合的元素，集合的分类，子集，集合的相等这些基本概念；第二部分介绍了并集，交集，差集，补集等概念，并且在幂集概念的基础上，说明了并、交、差、补这四种基本运算的封闭性，由此给出集代数的定义；第三部分用集合、对应的观点来阐述函数、反函数和复合函数的概念，最后从一一对应的概念出发，对集合的基数作了初步说明．本书在叙述映射和函数的定义的时候，是把多值映射和多值函数也包括在内的；而在有的书上，映射和函数都是专指单值的情况来说的．

在叙述上，本书力求通俗易懂，并且尽可能多举实例．对于一些难度较大的性质，除了用直观图来说明外，同时给出了比较严格的证明．本书还附有一定数量的练习题，以加深读者对于概念的理解．

限于我们的学识和能力，本书不免会有许多缺点，殷切希望广大读者给予指正。

这本小册子在编写过程中，曾得到青海师范学院赵得春同志的热情指导，在此谨表谢意。

编　者

1979年5月

目　　录

一　集　合

1. 集合的概念

集合（ *set* ）这个概念，是现代数学中一个最基本的概念。

在通常的情况下，介绍一个新的数学概念，我们都应该用已经学过的概念来说明它的意义，这就叫做给出这个新概念的定义。但是，如果要求每一个新概念都用它“前面”的概念来定义，那么“最前面”的概念又应该用怎样的概念来定义呢？因此，这个“给出定义”的要求不可能无限制地追溯上去。事实上，在数学中还有这样一些基本概念，它们的含义是不能用更简单的已知概念来解释的，而只能用一些同义语或者实例来加以描述。比如，平面几何学中的“直线”，就是一个这样的基本概念；我们现在要讨论的“集合”，也是一个这样的基本概念。

我们还是先来看看下面这些问题吧。

西宁市的电影院本周上映哪几部影片？

《安徒生童话集》里有哪几篇童话？

红星中学初一（2）班有哪些学生？

在平面内，和一个定点O的距离等于定长r的点有哪些？

有理数包括哪些数？

…………

研究这一类的问题，我们发现，它们的答案尽管各种各

样，但是也有一些相似的地方。首先，这些问题里的每一个问题的答案，都是在一定范围内的某些事物。比如，影片，童话，学生，平面内的点，数，等等。其次，每一个问题里的这些事物，都具有某种共同的属性。比如，“西宁市的电影院本周上映”的影片，“《安徒生童话集》里”的童话，“红星中学初一（2）班”的学生，平面内“和一个定点O的距离等于定长r”的点，“有理”数，等等。我们就把象上面每一个问题的答案里所包含的事物的“全体”，分别叫做一个集合。

一般说来，**在一定范围内，具有某种共同属性的所有事物的全体，构成一个集合（简称为集）；而构成这个集合的每一件事物，都叫做这个集合的一个元素**（*element*）。判断一件事物是不是某一个集合的元素，只要看它是否具有这个集合的全体事物所具有的共同属性就可以了。比如：

红星学校的全体学生构成一个集合，这个集合的元素的共同属性是“红星学校的学生”，因此，正在这个学校上学的姚小明是这个集合的一个元素，而他的那个只有四岁的小妹妹，不是这个集合的元素；

太阳系的所有行星构成一个集合，这个集合的元素的共同属性是“太阳系里的行星”，因此，地球是这个集合的一个元素，火星也是这个集合的一个元素，而月亮不是这个集合的元素；

全体自然数构成一个集合，这个集合的元素的共同属性是“自然数”，因此，7是这个集合的一个元素，109也是这个集合的一个元素，而-3和$\frac{2}{5}$都不是这个集合的元素；

直线l上的所有的点构成一个集合，这个集合的元素的共同属性是“在直线l上的点”，因此，在直线l上的点A是这个集合的一个元素，而不在直线l上的点B就不是这个集合的元素；

…………

通常，集合用大写字母A，B，C，M，N，……等来表示，集合的元素用小写字母a，b，c，……等来表示。如果a是集合A的元素，就说“a属于A”或者“A含有a”，记做$a \in A$。如果a不是集合A的元素，就说“a不属于A”，记做$a \overline{\in} A$。比如，设R是全体有理数构成的集合（有理数集），那么，$-\frac{1}{3} \in R$，而$\sqrt{2} \overline{\in} R$；设$S$是太阳系所有行星的集合，那么海王星$\in S$，而织女星$\overline{\in} S$。

在研究集合的时候，我们常常要用一个平面封闭图形（矩形或者圆）来表示一个集合，并且用这个图形中的点(有时包括部分界线或者全部界线）来表示这个集合的元素。我们把这种表示集合的图形叫做直观图或者文氏图（*Venn diagram*）。例如在图1中，$a \in A$，而$b \overline{\in} A$。

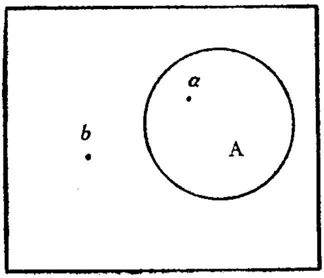

图 1

对于一个给定的集合，我们总能够根据这个集合的元素所具有的共同属性，明确地判定任何一个具体的事物属于这个集合，还是不属于这个集合；反过来，一个集合是由它所含有的全体元

素唯一确定的，也就是由它的元素的共同属性唯一确定的．因此，表示一个集合，可以有下面的两种方法：

（1）在大括号中列出这个集合的所有元素．比如：

我国西北地区所有省、区的集合记做

{陕西省，甘肃省，宁夏回族自治区，新疆维吾尔自治区，青海省}；

地球的自然卫星的集合记做

{月球}；

正多面体的集合记做

{正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体，…}；

小于20的素数的集合记做

$\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$；

小于40的3的正整倍数的集合记做

$\{3,6,9,12,\cdots,39\}$；

全体自然数的集合（自然数集）记做

$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

…………．

（2）在大括号中清楚地描述集合里的元素所具有的共同属性．比如：

第一中学的全体共青团员的集合记做

{第一中学的共青团员}；

全体实数的集合（实数集）记做

$\{x \mid x$是实数$\}$；

在直线MN上的所有点的集合记做

$\{P \mid P$点在直线MN上$\}$；

5 的一切整倍数的集合记做

$$\{n \mid \frac{n}{5} \in Z(\text{整数集})\};$$

方程$x^2-2x-3=0$的解的集合记做

$$\{x \mid x^2-2x-3=0\};$$

闭区间$[-1,1]$记做

$$\{x \mid x^2 \leqslant 1\}，\text{或者}\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\};$$

…………。

为了叙述方便，通常把元素都是数的集合叫做数集，比如，自然数集，实数集等；元素都是点的集合叫做点集，比如，数轴上的点集，平面上的点集等；方程、不等式或者方程组、不等式组的解的集合叫做它们的解集，比如，方程$2x^2-x-3=0$的解集，不等式$4x^2-9>0$的解集等。

含有有限个元素的集合，叫做有限集；含有无限多个元素的集合，叫做无限集；只含有一个元素的集合，叫做单元素集；一个元素也没有的集合，叫做空集，空集通常用符号“ϕ”表示。比如，小于 5 的自然数的集合，一座城市的全体居民的集合等是有限集；有理数集，空间一切平面的集合等是无限集；偶素数构成的集合即$\{2\}$，平面上过不在同一条直线上的三点A、B、C的圆的集合等是单元素集；实数范围内方程$x^2+1=0$的解集，青海湖里的所有鲸的集合等是空集。和空集相对的，我们把至少含有一个元素的集合叫做非空集合。

无限集与元素很多的有限集是不同的。元素非常多以至数也数不清的集合，不一定是无限集。无限集是指那些元素怎么数也数不完的集合。有一些集合，比如，一杯水里全体水分子的集合，一个人体内所有细胞的集合，地球上所有脊

椎动物的集合，等等，虽然我们没有可能或者没有必要精确地数出它们的元素究竟有多少，但是却可以断定，如果一个一个地数下去，总有数完的时候。因此，这些集合应该是有限集，而不是无限集。

空集ϕ与只有一个元素 0 的零集$\{0\}$也是不同的。空集ϕ是指一个元素也没有的集合，而零集$\{0\}$却含有一个元素0，因此是一个非空集合。比如，方程$ax=b$的解集，当$a=0$，$b\neq0$时是空集ϕ，因为 0 与任何数的积都不能是一个非零的数；而当$a\neq0$，$b=0$时是零集$\{0\}$，因为一个非零的数只有乘以 0，积才能等于 0。

练　　习

1. 表示下面的集合，并且指出哪些是有限集合？哪些是无限集合？哪些是空集？

(1)一组交通指挥灯的颜色；

(2)一个星期内七天的名称；

(3)你的家庭的成员；

(4)24的约数；

(5)2 的一切整倍数；

(6)边长是3、5、6的直角三角形；

(7)平面内，到两个定点的距离相等的点；

(8)不等式$2x^2-x+3\leqslant0$的解。

2. (1)写出下面每一个集合的所有元素：

$A=\{$小于40的 2 的倍数$\}$；

$B=\{$小于40的 3 的倍数$\}$；

$C=\{$小于40的 5 的倍数$\}$.

（2）在下面的短划上填写"是"或者"不是"：

2 ____ 集合 A 的一个元素；

20 ____ 集合 B 的一个元素；

20 ____ 集合 C 的一个元素.

（3）用记号"$\in$"，写出下列各数分别属于集合 A、B、C 中的哪些集合：

32；27；28；35；10；18；20；45；40；36；30；42.

3. 在下面的集合中，把不应当属于那个集合的元素去掉：

（1）{体育比赛用球}={篮球，排球，足球，地球，羽毛球，乒乓球，…}；

（2）$\{a\mid a=n^2$，n是自然数$\}=\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 47, 64, \cdots\}$；

（3）$\{(x, y)\mid x-2y=0\}=(0, 0), (4, 2), (3, 1), (16, 8), (9, 4.5), \cdots\}$；

（4）{与十进数 9 相等的数}$=\{9_{10}, 1001_2, 100_3, 13_6, 23_4, \cdots\}$；〔注〕

（5）$\{F\mid F$是多边形$\}$={三角形，四边形，四面体，五边形，六边形，……}.

2. 子集 集合的相等

〔注〕 数字右下角的脚标，表示记数制的基数，比如，1101_2表示1101是一个二进制的数，化成十进制的数是

$1101_2=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=13$，而五进制的数 142_5化成十进制的数是

$142_5=1\times5^2+4\times5^1+2\times5^0=47$.

同一个事物，可以是许多不同的集合的元素．比如，一个中学生，可以是他所在班级全体学生的集合的一个元素，也可以是他所在学校全体学生的集合的一个元素，还可以是他所在城市全体居民的集合的一个元素，并且他还可能是下面这些集合的元素：

{全体共青团员}；

{少年科技活动的爱好者}；

{不戴眼镜的男孩子}；

{足球运动员}；

…………．

仔细研究这些集合，我们发现其中有这样的集合，它的每一个元素，同时又都是另一个集合的元素．比如，某中学一年级全体学生的集合的每一个元素，都是这所中学全体学生的集合的元素．

一般地，如果集合B的每一个元素都是集合A的元素，就是说当$x \in B$时，总有$x \in A$，那么，集合B就叫做集合A的子集（*subset*），记做$B \subseteq A$（读做B包含在A中）或者$A \supseteq B$（读做A包含B）（图2）．比如：

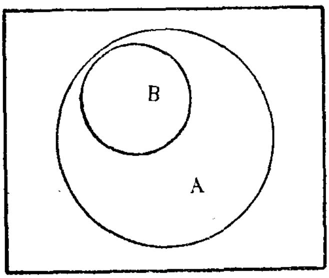

图 2

设A＝{所有欧洲国家}，B＝{斯堪的纳维亚半岛的国家}，则$B \subseteq A$；

设$P = \{x \mid x$是多边形$\}$，$T = \{x \mid x$是三角形$\}$，则$T \subseteq P$；

设$N=\{x|x$是自然数$\}$，$E=\{x|x$是正偶数$\}$，则$E\subseteq N$；

设$F=\{x|x$是等腰三角形$\}$，$G=\{x|x$是有两个角相等的三角形$\}$，则$G\subseteq F$；

设$S=\{x|x-3=0\}$，$S'=\{x|(x-3)(x^2+1)=0\}$，则$S\subseteq S'$；

…………．

显然，对于任意的集合A，B，C，我们都有

（1）$A\subseteq A$（任何集合都是它自身的子集）；

（2）如果$B\subseteq A$，$C\subseteq B$，那么，$C\subseteq A$（包含的传递性）；

（3）$\phi\subseteq A$（空集是任意一个集合的子集）．

对最后一个性质需要解释几句．因为空集ϕ里一个元素也没有，所以如果说x是空集ϕ的一个元素的话（当然，这样的x是不存在的），那么，x也就可以是任意一个集合的元素．这正象俗话说的：如果太阳能从西边出来，你叫我干什么都可以．用数学式子来表示，就是：如果有一个$x\in\phi$的话，那么，就一定有$x\in A$；或者换一个说法，如果$x\overline{\in}A$，就一定可以得到$x\overline{\in}\phi$（其实，这个式子对于任何一个事物x都是成立的，而不管这个x是不是集合A的元素）．

上面举的五个例子，虽然在每一个例子中总有一个集合是另一个集合的子集，但情况并不完全一样．前三个例子里，比如，斯堪的纳维亚半岛的每一个国家都是欧洲国家，但欧洲国家里却确实有一些国家（如法国）不是斯堪的纳维亚半岛的国家；每一个正偶数都是自然数，但也的确有象3这样的自然数不是偶数．