通俗数学講話

什么是微分法？

B. Г. 保尔強斯基著

商务印書館

通俗数学講話

什么是微分法？

B. Г. 保尔強斯基著
曾 一 平 譯
赵 孟 养 校 訂

商 务 印 書 館

本書系根据苏联国营技术理論書籍出版社（Государственное издательство теоретической литературы）出版保尔強斯基（В. Г. Болтянский）著通俗数学講話（Популярные лекции по математике）"什么是微分法？"（Что такое дифференцрование ？）1955年版譯出的。

本書用通俗講演的方式講导数、微分方程以及微分法在落体，通电，蜕变、諧振盪、諸方面的应用、由曾一平同志翻譯。

什么是微分法？

В. Г. 保尔強斯基著　曾一平譯

★版权所有★

商务印書館出版

上海河南中路二一一号

（上海市書刊出版業營業許可証出字第〇二五号）

新华書店总經售

京华印書局印刷

（13017·101）

1957年3月初版　開本787×1092 1/32

1957年3月北京第一次印刷　字數41,000

印張2 2/16　印數00001—25,000

定價（7）¥0.20

目　　录

作者的話

高年級的中学生，特別是那些对数学、物理学和技术有兴趣的学生，他們常常發生这样一个問題：什么是“高等”数学？有时在中学数学小組的学習中还提出类似这样的問題来討論。

在这本書中，作者来解釋高等数学的一些概念①(是以高年級的中学生能够接受的方式来解釋)，如导数、微分方程、数 e、自然对数等(数 e 和自然对数这兩个概念中学生都听到过，并且对它們很感兴趣)。我企圖把这些概念解釋得尽可能明显一些，所以就根据解一些物理学上的問題的方法来講述。同时除要求明显以外，我还力求說明高等数学的概念是自然界中不断进行着的現实过程的性質在数学上的反映，說明数学是与生活联系着的，而不是与生活脫离的，也說明数学是在繼續發展着的，而不是一門不变的已經完成了的科学。

本書中的証明和討論，并不全是按照充分的数学严格性作出的。有些討論帶有直观解釋的性質。这样的叙述方法我觉得是最适宜于通俗讀物的。

本書可在中学数学和物理学小組作業中使用；要看懂这本書須具备大約中学九年級(約相当于中国高中二、三年

① 讀者还可以从“通俗数学講話”的另外兩种，即 A. И. 馬尔古色維契的“面积与对数”(第 9 种)及 И. П. 那湯松的“無穷小量的求和”(第 12 种)(科学出版社 1954 年出版有中譯本)二書認識高等数学的某些概念。

級——譯者）范圍的知識。書中的材料有一部分是作者应国立莫斯科大学附屬中学数学小組指导員的請求向学生講演过的。

A. И. 馬尔古色維契和 A. З. 里夫金对本書原稿提供了宝貴的意見和批評，謹乘此机会表示真摯的感謝。

落体問題

問題的提出

我們所要研究的第一个問題是确定物体从某高度向地面落下的速度。

由初等物理学課程我們知道：在眞空中竪直落下的物体，从开始落下經过 t 秒后，有速度

$$v=v_0+gt, \tag{1}$$

其中 v_0 是下落的初速度，g 是重力加速度。

当物体在空气中（不是在眞空中）下落时，公式(1)在有些情况下还是近似地正确的；但在另一些情况下，則会造成很大的差誤。例如，当一塊石头从不很高的地方落下时，公式(1)是可以应用的。但是当物体从很高的空中下落时，速度的数量就可能与(1)式相差很大。在1945年，跳傘員罗曼紐克作了一次迟延張傘的降落，曾飞墜12,000多公尺而沒有把降落傘張开。物体如果在眞空中由这样的高度下落（沒有初速度），在接近地面时就会达到500公尺/秒左右的速度。事实上，由公式 $s=\frac{gt^2}{2}$ 可知（在眞空中）下落的时間有如下数値：

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}\approx\sqrt{\frac{2\times 12\,000\text{ 公尺}}{9.8\text{ 公尺/秒}^2}}\approx 49.5\text{秒},$$

然后由(1)式我們就求得速度的数値：

$$v=gt\approx 9.8\text{ 公尺/秒}^2\times 49.5\text{ 秒}\approx 485\text{ 公尺/秒}$$

（也可以直接用公式 $v^2=2gs$ 求出速度）。但已經确定的事实是

那跳伞家在迟延張傘时的下降速度只达到 50 至 60 公尺/秒，而不再增大。由此可見，在这种情况下从公式(1)就得出不正确的結論。

另一个例子：降落傘的設計就是讓跳傘員不管从什么高度跳下来，在他張傘以后，都以大約 6.5 公尺/秒的速度接近地面。

很明显，在这里公式(1)也是不适用的。

从所有这些事实我們可以得出結論，物体在空气中下落的速度隨着时間的增加逐漸趋近某确定値。換句話說，从开始下落經过一段时間后，物体的运动就变为等速的，而其加速度就等于零。这意味着作用在物体上的一切力的合力等于零。

为什么公式(1)不适用于計算物体在空气中的下落速度呢？这是不难了解的。原来这个公式是根据这样一个假設导出的：物体是在唯一的力即重力的作用下而运动的。重力

$$P=mg. \tag{2}$$

但是，我們已經看到，当物体在空气中下落时，从开始运动經过一段时間后，所受到的力的合力就成为零，也就是說，重力 P 被另一个力平衡了，而在导出公式(1)时是沒有考虑到这个力的。这个平衡力就是空气的阻力。正是空气的阻力不讓跳傘員下落得太快；它好像把跳傘員"托住"了。

怎样来計算空气的阻力呢？我們將假定空中并沒有風。如果物体是靜止不动的，那么空气的阻力等于零。物体开始运动得越快，它就越"难"冲开空气，这就是說，空气的阻力增長起来。在沒有風的天气，如果我們运动得越快：先是走，然

后跑，再就騎自行車，……就很容易观察到这一点。我們將假設，这个阻力在数量上与速度成比例，也就是等于 bv，其中 v 是运动的速度，而 b 是比例系数。对于速度不大[①]，即不超过 1 至 2 公尺/秒时，实驗証明这个假設是很正确的。系数 b 决定于物体的大小和形狀。例如在同样的运动速度下，作用于球体的空气阻力要比作用于同样横截面的“雪茄形”体的空气阻力約大到 20 倍。

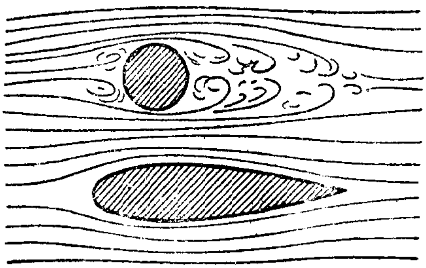

圖 1

我們就只作这些簡短的說明。并且此后假定空气阻力（我們把空气阻力記作 S）的数值为：

$$S=-bv; \tag{3}$$

負号意味着阻力的方向与速度的方向相反。

这样一来，我們將認为以某种初速度从上抛下的物体只受到兩个力，即重力 P 和空气阻力 S 的作用。根据牛頓第二定律，我們可以写下

$$ma=P+S, \tag{4}$$

其中 m 是物体的質量，a 是它的加速度。为方便起見，我們不取朝上的，而取朝下的方向作为垂直綫的正向，因为落体的速度是朝下的；按照我們这个規定它是一个正量。重力方向是

① 我們要指出，在速度大于 1 至 2 公尺/秒时，空气阻力的数量变得大于数量 bv。空气的阻力有时候就与速度的平方成比例。

朝下的，因此也是一个正量。但空气阻力是朝着与速度相反的方向，即朝上的，所以是負的。因此，分别把(2)和(3)中 P 和 S 的値代入公式(4)，我們得到

$$ma = mg - bv,$$

或
$$a = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right); \tag{5}$$

自然，加速度如果是朝下的，就应該把它看作正的，反之則是負的。

方程(5)把我們現在还不知道的物体运动的加速度和速度联系了起来。我們还应当从这个方程来确定运动物体的速度怎样随着时間而变化。

問題的定性解答

由以上推論的結果，我們得到了关于落体加速度的方程(5)。現在我們应当来求解这个方程。因此，以下的討論就性質来說純粹是数学方面的，不过为了明显起見我們仍然就物体的下落速度来討論。

方程(5)把兩个未知量：速度和加速度联系了起来。給加速度一个任意的値，我們就可从方程(5)求出相应的速度値来。因此，初看起来，好像一个方程(5)还不足以确定兩个量 v 和 a。

但是，这样的見解是錯誤的。知道了物体运动的速度怎样随着时間变化，加速度也就完全确定。因此方程(5)中所包含的，并不是兩个完全任意的量，而是兩个互相有联系的量 v 和 a。这也就使方程(5)的求解成为可能。研究速度和加速

度之間的关系將使我們在下面得到导数的概念。

我們將要証明由方程(5)可以推出关于速度的兩个性質。这些性質將使我們对于落体的特征(在上面所作的假設下)有一个十分清楚的概念。以后我們还要得出精确的速度公式。

性質 1. 如果下落的瞬时初速度 $v_0<\frac{mg}{b}$，那么在整个运动中將始終是 $v\leqslant\frac{mg}{b}$。如果 $v_0>\frac{mg}{b}$，那么將始終是 $v\geqslant\frac{mg}{b}$。

讓我們先假定性質的反面是正确的，看是否会产生矛盾。例如，設 $v_0<\frac{mg}{b}$，而在某一瞬时 t_1（就是在开始下落經过 t_1 秒后）速度却变得大于 $\frac{mg}{b}$。那么在其中間某一瞬时速度会等于 $\frac{mg}{b}$(也可能不止一次)。設 t_0 是(在最初 t_1 秒中)速度等于 $\frac{mg}{b}$ 的最后一个瞬时，那么由 t_0 到 t_1 的一段时間內不等式 $v>\frac{mg}{b}$ 依旧正确。于是根据公式(5)，可見加速度 a 在这一段时間內是負的。但这是和速度变化的情况相抵触的，因为我們假設速度在所考虑的那段时間內从数値 $\frac{mg}{b}$ 变到更大。这里所得到的矛盾就証明速度是不可能变得大于数値 $\frac{mg}{b}$ 的。

当 $v_0>\frac{mg}{b}$ 时的情形可以同样地来討論。

性質 2. 如果 $v_0<\frac{mg}{b}$，那么落下速度逐漸增大，越来越趋近数値 $\frac{mg}{b}$；如果 $v_0>\frac{mg}{b}$，那么下落速度始終減小，也趋近数値 $\frac{mg}{b}$。

事实上，如果 $v_0>\frac{mg}{b}$，那么我們由性質1知道，在运动的全部时間内，將有 $v\geqslant\frac{mg}{b}$。由公式(5)可知加速度將是負的，因而下落速度將始終減小。

我們現在来証明，差 $v-\frac{mg}{b}$ 終于会变得小于任何預先选定的任意小的值 h（例如可以取 h 等于0.001公尺/秒）。为此，讓我們来考察时間：

$$t^*=\frac{\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)m}{hb}.$$

从运动开始到瞬时 t^* 的一段时間内，下落速度由数值 v_0 減至不小于 $\frac{mg}{b}$ 的值，也就是所減小的值不大于 $v_0-\frac{mg}{b}$。因此平均加速度是負的，而其絕对值不大于

$$\frac{v_0-\frac{mg}{b}}{t^*}=\frac{hb}{m}.$$

由此可知，在其間总有某一瞬时加速度的值不大于 $\frac{hb}{m}$，因为如果在这整段时間内所有瞬时加速度的值都大于 $\frac{hb}{m}$，那末平均加速度的值也將大于 $\frac{hb}{m}$。

这样可以設在瞬时 t' 我們有：

$$|a|<\frac{hb}{m}.$$

于是根据公式(5)我們得到：

$$\left|v-\frac{mg}{b}\right|=\frac{m}{b}\cdot|a|\leqslant\frac{m}{b}\cdot\frac{hb}{m}=h,$$

这就是說在瞬时 t' 速度与 $\frac{mg}{b}$ 彼此相差小于 h。对于所有随后的瞬时，这也將是正确的，因为速度 v 在减小，而始終大于数値 $\frac{mg}{b}$。

我們要指出，这样一来，我們已經証明了比性質 2 还要精确一些的命题，就是：在下落开始后，不迟于

$$t^* = \left| v_0 - \frac{mg}{b} \right| \cdot \frac{m}{hb} \text{秒}, \qquad (6)$$

速度与 $\frac{mg}{b}$ 彼此相差就小于 h 了。

性質 1 和 2 在某种意义上已提供了所討論的問題的解答。虽然我們还不曾得到精确的速度公式，但是我們已經知道了速度变化的本性規律，也就是說，已經知道了速度是怎样隨着时間而变化的。

讓我們来研究跳傘員的运动，作为一个例子。如果跳傘員在蹤下后立即張傘，那么他的下降速度，最初等于零，而后將愈来愈大，但始終也不会超过数値 $\frac{mg}{b}$。数量 mg（即跳傘員加上降落傘的重量）是已知的，而 b 决定于降落傘圓蓬的直徑。这就有可能算出我們需要多么大的降落傘，才使跳傘員下落的最大可能速度 $\frac{mg}{b}$ 对于跳傘員的着陆沒有危險。当迟延張傘的跳傘員（帶着未張开的降落傘）下降时，空气阻力表达式中的系数——其数値在这种情况下我們記作 b'——就有另一个比張傘下降时較小的値。因此，在这种情况下，最大可能的下落速度 $\frac{mg}{b'}$ 就大于張傘时的下落速度 $\frac{mg}{b}$。所以迟

延張傘的跳傘員在張傘以前的下落速度大于$\frac{mg}{b}$，而按照性質1，在張傘后的下落速度則將減小，并趋近$\frac{mg}{b}$，但始終大于$\frac{mg}{b}$。因此，甚至在这种情况下，等到降落傘張开經过一段时間后跳傘員的着陆也就成为沒有危險的了。

讓我們举一个数字的例子来說明上面的話。

例 1 設有一种降落傘是这样設計的，讓跳傘員在張傘后下降的速度趋近極限値6公尺/秒，也就是說，使$\frac{mg}{b}=6$公尺/秒。我們提出下面的問題：一个迟延張傘的跳傘員在下落速度达到50公尺/秒时張开了降落傘，問經过若干秒后他的下降速度变成小于10公尺/秒，也就是說經过若干秒后下降速度与極限値$\frac{mg}{b}=6$公尺/秒彼此相差小于$h=4$公尺/秒？

解：由等式$\frac{mg}{b}=6$公尺/秒我們得到：

$$\frac{m}{b}=\frac{mg}{b}\cdot\frac{1}{g}\approx\frac{6\text{公尺/秒}}{10\text{公尺/秒}^2}=0.6\text{秒}。$$

其次，由公式(6)我們断定：不迟于$\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)\cdot\frac{m}{b}\cdot\frac{1}{h}$秒，也就是，在我們的假設之下，不迟于：

$$(50\text{公尺/秒}-6\text{公尺/秒})\cdot 0.6\text{秒}\cdot\frac{1}{4\text{公尺/秒}}=6.6\text{秒},$$

下降速度与極限値$\frac{mg}{b}=6$公尺/秒就只相差$h=4$公尺/秒了。

落体速度公式·数 e

性質1和2已显示落体速度是怎样随着时間变化的。在

这一节中我們將得出关于落体速度的精确公式。在速度的表达式中將引入一个数，这个数的五位小数的近似值是2.71828……。这个数在"高等"数学問題中極其常見，所以特別用字母 e 来記它（正如常見的表示圓周長度和直徑之比的数 3.14159……記作字母 π 一样）。为什么在速度公式中要引入这个数 $e=2.71828$……呢？又怎样来精确地确定这个数呢？我們將在以后看到解答。而現在我們只引述落体的速度公式（暂不推导），并且分析一些例子来說明这公式的应用。

設 v_0 是物体下落的初速度，而 v_t 是这物体在瞬时 t，就是从开始下落經过 t 秒后的下降速度。那么，我們有：

$$v_t=\frac{mg}{b}+\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t}. \qquad (7)$$

这就是方程（5）的精确解答；公式（7）的証明后面再談。我們先来研究一些例子。

例 2　我們来說明，由公式(7)立刻就能导出上面所已經得到的关于速度变化的本性規律(性質 1 和 2)。

事实上由数 e 取負冪所得到的数 $e^{-\frac{b}{m}}$ 是一个小于一的正数，就是說，$0<e^{-\frac{b}{m}}<1$。当 t 增大时乘冪 $e^{-\frac{b}{m}t}=\left(e^{-\frac{b}{m}}\right)^t$ 就減小（并且只要 t 充分大，可以变得随便多么小）。因此，由公式(7)，显然可知，例如，当 $v_0>\frac{mg}{b}$ 时，速度 v_t 始終大于 $\frac{mg}{b}$ $\left(因为 v_0-\frac{mg}{b}>0\right)$，但逐漸減小，并且趋近 $\frac{mg}{b}$。

例 3　我們应該用公式（7）来計算迟延張傘的跳傘員在張傘 6.6 秒后有多大的下落速度；各項数字的值还是取得与

例 1 中的一样，就是：$\frac{mg}{b}=6$ 公尺/秒，$v_0=50$ 公尺/秒（我們已經看到所求速度应該小于 10 公尺/秒）。

解：我們有：

$$\frac{b}{m}=g:\frac{mg}{b}\approx 10\text{ 公尺/秒}^2:6\text{ 公尺/秒}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\text{秒}}.$$

其次，应用对数表（数 e 以十作底的对数近似地等于 0.4343）很容易求出：

$$\lg\left(e^{-\frac{b}{m}t}\right)=-\frac{b}{m}t\lg e\approx-\frac{5}{3}\times 6.6\times 0.4343=$$

$$=-4.7773=-5+0.2227=\bar{5}.2227,$$

由此得

$$e^{-\frac{b}{m}t}\approx 0.0000\,167.$$

把此值代入公式(7)，我們得到

$$v_{6.6\text{秒}}\approx 6\text{ 公尺/秒}+(50\text{ 公尺/秒}-6\text{ 公尺/秒})0.0000167\approx$$

$$\approx 6.000735\text{ 公尺/秒}。$$

用公式(7)同样地容易計算：在張傘 $t=\frac{3\lg 11\text{ 秒}}{5\lg e}\approx 1.44$ 秒后跳傘員的下落速度（在同样的条件下）① 將等于 10 公尺/秒。

由此可知，在迟延張傘的降落中，張傘时的下落速度在一兩秒內就由 50 至 60 公尺/秒几乎减小到張傘的正常下落速度 6 至 7 公尺/秒。跳傘員这时就以很大的减速度运动而下

---

① 实际上，下落速度还要更快的趋近極限值 6 公尺/秒，因为只有在下落速度小时，公式(3)才能正好表示空气阻力，在速度大时，空气阻力的数量增加得比 bv 更快。