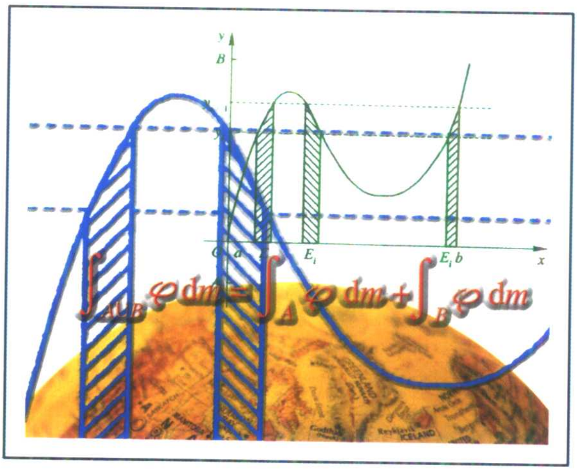
高等学校数学教材系列丛书

测度与积分



赵荣侠 崔群劳 编著

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

测度与积分

赵荣侠　崔群劳　编著

西安电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

测度与积分/赵荣侠等编著.
—西安:西安电子科技大学出版社,2002.10
ISBN 7-5606-1218-0
Ⅰ.测… Ⅱ.赵… Ⅲ.① 测度论-高等学校-教材
② 积分-高等学校-教材 Ⅳ.0714.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 091646 号

策　　划　夏大平
责任编辑　张友
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)8227828　邮　编　710071
http://www.xduph.com　E-mail:xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　西安兰翔印刷厂
版　　次　2002 年 10 月第 1 版　2003 年 6 月第 2 次印刷
开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 7.875
字　　数　188 千字
印　　数　2 001～6 000 册
定　　价　12.00 元
ISBN 7-5606-1218-0/O.0058

XDUP 1489001-2

内 容 简 介

本书是作者“本科数学专业主干课程教学内容和体系研究与实践”教改科研项目的成果. 作者从与概率结合的角度去介绍实变函数的基本理论，很有新意.

本书在比较完整、系统地介绍Lebesgue测度、Lebesgue积分理论的前提下，穿插介绍了现代概率论的有关基本知识，并使两者有机地结合在一起，始终以测度与积分为主线，充分展示两者诸多概念的一致性. 全书共分七章，分别介绍预备知识、测度、可测函数、积分理论、可积函数空间、积测度与Fubini定理及极限理论.

本书适合于理科高年级本科生及工科各专业的研究生使用.

前　言

测度与积分是实变函数论的核心内容，是现代分析数学不可缺少的理论基础，有着广泛的应用领域. 实变函数也已成为各大专院校所有数学专业及某些理工科高年级学生的必修课或选修课. 可以说凡是想了解并掌握近代数学的人，都应该首先了解、学习测度与积分.

测度与积分理论促进了泛函分析的诞生，并且通过泛函分析影响着微分方程理论、计算数学及近代物理学，同时实变函数论的概念、结论与方法已广泛渗透到积分方程、Fouries 分析、逼近论等学科. 现代概率论是完全建立在测度与积分理论基础之上的数学分支，有人说它是“测度空间中的实变函数”，这一点也不过分. 著名概率论大师 A・H・Kolmogrov 指出“要把一向显得特异的概率论基本概念很自然地归入近代数学一般概念的行列中去，在测度与 Lebesgue 积分理论未产生以前，这一问题几乎是没有解决希望的. 有了 Lebesgue 的研究以后，集合测度与事件概率之间的相似性，以及函数的积分与随机变量的数学期望值之间的相似性就了如指掌. 这相似性还可更进一步，例如独立随机变量的许多性质与正交函数的相应性质是完全相似的……”. 实变函数就是这样使概率论的面目完全改观，并且拓广了概率论的研究范围，它对现代数学各分支的重要性，由此可见一斑.

然而，由于测度与积分理论的思想方法非常深刻，它的许多概念具有一定的抽象性. 这就给初学者增加了难度，使大多数初学者对它“望而生畏”，阻碍了对本门学科极富活力的思想方法及基本理论知识的掌握与应用. 故“实变函数论的基本内容应以何种形式提供给初学者”一直是数学理论工作者思考的问题. 近几

年来，在高等教育面向 21 世纪教学内容与课程体系改革与实践项目的启动下，不少学者在这方面进行了有益的探索，出版了不少实变函数方面的新著. 其一致的指导思想是：力求降低难度，力求直观、通俗易懂，提高可读性，使初学者轻松、准确地把握本门课程的思想方法、知识结构. 这些工作无疑都是非常必要且符合实际的. 本书也力图在这一方面作一尝试.

本书的特点是在比较完整、系统地介绍 Lebesgue 测度、Lebesgue 积分理论的前提下，穿插介绍了分析概率论的有关基本知识，并尽量使两者有机地结合在一起. 目的是为实变函数这一抽象学科提供一个应用领域，使其变得不再那么抽象. 同时也可以给出由 Lebesgue 测度向一般抽象测度的自然过渡，说明如何把关于抽象测度的积分转化为关于 Lebesgue 测度的积分. 作者认为，实变函数使人望而生畏的主要原因不仅是它的抽象性，还有兴趣的问题. 初学者不知这些抽象的概念、结论有何实际意义，有何用处，因而很难对它产生兴趣. 而概率论是一门很实际的学科，它的许多结论凭经验就可以理解，很容易让人接受. 如果能把非常抽象的概念、结论与很实际的现象之间的关系一开始就展现在初学者面前，那么不仅能使初学者对实变函数产生兴趣，也可降低该门课程的难度. 这是本书的指导思想.

本书在文字叙述与定理证明上，力求通俗、简捷、直观，例题较多，有很强的可读性. 许多抽象概念，如集合的可数性、测度，可测函数列的依测度收敛等都从概率论的角度给予了解释. 另外，本书始终抓住集合与事件，集合测度与事件概率，可测函数与随机变量，可测函数的 Lebesgue 积分与随机变量的数学期望、方差、随机变量的分布函数，函数的正交性与随机变量的不相关性等概念之间的关系，用概率解释、展示实变函数，用实变函数理论去解决概率问题，既突出了实变函数的基础性与工具性，同时又不破坏它的完整性与系统性.

需要说明的是，本书不是一本概率论教材，因此对概率论的介绍还不够完整、系统．然而本书已基本涵盖了概率论的基本知识，而且以这种形式掌握的概率论基础知识对读者以后从事概率论的进一步学习、研究是大有裨益的．对概率论不感兴趣的读者可以不看前6章的最后一节以及第七章的2～6节．这样毫不影响对实变函数知识的完整掌握．

本书从与概率结合的角度去介绍实变函数的基本理论，这在国内尚属首次，意在抛砖引玉，相信它能对读者有所帮助．由于作者水平有限，加之时间仓促，错误与不足之处在所难免，敬请各位前辈、同行批评指正，也恳请各位读者朋友提出宝贵意见，以便改正．

本书是由赵荣侠主持的陕西省教育厅教改项目“陕西省高师本科数学专业主干课程教学内容和体系研究与实践”(编号984015)的主要成果，是作者在多年的教学实践基础上，经过大量的调查论证，查阅、分析国内外文献资料及教改动向后形成的．本书的读者对象已不再受高师本科的限制，它适合所有的理科高年级本科生及工科各专业的研究生．本书的写作与出版，得到了陕西省教育厅、西安电子科技大学出版社的大力支持与帮助，赵玮教授仔细审阅了全部书稿并提出了宝贵的修改意见，编辑室主任夏大平先生也提出了重要的修改意见，付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢．

作　者

2002年6月

目　录

第一章　预备知识

第二章　测　度

第三章　可测函数

第四章　积分理论

第五章　可积函数空间

第六章　积测度与 Fubini 定理

第七章　极限理论

第一章 预 备 知 识

本章主要介绍集合的基本概念及集合间的运算、对应. 本章中讨论了可数集与不可数集之间的区别，**R** 中集合的拓扑性质，回顾与分析了 Riemann 积分，以及事件与集合等概念. 对这些概念及其性质非常熟悉的读者可以跃过这一章.

1.1 有关概念与集合论基础

1.1.1 集合及其运算

集合是数学的一个基本概念，是指具有某种特定性质的对象全体，构成集合的对象称为集合的元素. 对集合我们只关心构成它的元素以及集合之间的运算.

集合一般用大写字母表示. 集合与其元素间的关系用“$\in$”表示，$x\in A$ 表示 x 为集合 A 的元素，读作 x 属于 A；$y\notin A$ 表示 y 不是 A 的元素，读作 y 不属于 A. 不含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示. 集合间的包含关系 $A\subset B$ 表示 A 的每一元素都是集合 B 的元素，并称 A 是 B 的子集. $A\subset B$ 的特殊情况是 A 与 B 含相同的元素，即 $A=B$. $A=B$ 充分必要条件为 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立. 如果 $A\subset B$ 且有 x 使 $x\in B$ 且 $x\notin A$，则称包含关系 $A\subset B$ 是严格的，这时称 A 为 B 的真子集. $\{x\in A: P(x)\}$ 表示 A 中满足性质 P 的元素 x 全体.

以下出现的集合均指某一基本集 Ω 的子集. Ω 可由上、下文看出，一般情况下 Ω 表示实数集 **R** 或其子集.

设 A、B 为给定集合，称

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

为集合 A 与 B 的并集，称

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

为集合 A 与 B 的交集. 若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 为不交集合. 称

$$A^C = \{x: x \in \Omega \text{ 但 } x \notin A\}$$

为 A 的余集. Ω 的余集为空集，空集的余集为 Ω. 集合

$$B \backslash A = \{x: x \in B \text{ 但 } x \notin A\}$$

称为 B 与 A 的差集. 易证 $B \backslash A = B \cap A^C$. 称

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

为集合 A 与 B 的对称差. 当且仅当 $A = B$ 时，$A \Delta B = \varnothing$.

应用逻辑学的符号 $\exists$（表示“存在”）、$\forall$（表示“任意”），集合间的交、并运算可方便地推广到任意一族集合上. 设 Λ 为任一指标集(有限或无限). $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为一族集合，则该族集合的交、并分别为：

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x: \forall\ \alpha \in \Lambda,\ x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x: \exists\ \alpha \in \Lambda,\ x \in A_\alpha\}$$

集合间的交、并运算可以互相表示. 我们有以下的 De. Morgan 对偶法则

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^{\ C}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^{\ C}$$

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为一族集合，如果对任意的 $\alpha, \beta \in \Lambda$，$\alpha \neq \beta$ 时有 $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$，则称集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是互不相交的。

集合间除了“交”、“并”、“补”、“差”等运算以外还有极限运算. 在数学分析中“单调有界数列必有极限”的论断在集合论中仍然成立. 不同的是这里的“单调性”是用集合间的包含关系来体

现的.

设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为一列集合，如果

$$A_n \subset A_{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

则称$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递增集列；如果

$$A_n \supset A_{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

则称$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递减集列. 在集合论中我们有：任何单调集列均有极限. 具体的，当$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递增集列时，有

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

当$\{A_n\}$为单调递减集列时，有

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

我们用$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$分别表示自然数集、整数集、有理数集及实数集. $\mathbf{R}$上的区间用它的两端点表示，如

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a \leqslant x < b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R}: x < b\}$$

$$[0, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x \geqslant 0\} = \mathbf{R}^+$$

集合A、B的笛卡尔积$A \times B$是由序对(a, b)构成的集合，即

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$表示二维平面. 集合

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

表示$\mathbf{R}$的n重笛卡尔积. 区间的积称作矩形，如

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y): x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

$$[a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z): x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, f]\}$$

分别为二维空间与三维空间中的矩形.

设E为任一给定集合，E上的一个关系R是$E \times E$的一个子集. $(a, b) \in R$时称a, b有关系R，并记作$a \sim b$. E上的一个关系如果满足

i) 自反性：$\forall x \in E$，$x \sim x$，

ii) 对称性：若 $x \sim y$，则 $y \sim x$，

iii) 传递性：$x \sim y$ 且 $y \sim z$，则 $x \sim z$，

则称该关系为 E 上的等价关系. E 上的等价关系把 E 划分为互不相交的等价类. 任给 $x \in E$，记 $[x] = \{y: y \sim x\}$ 为 x 的等价类，即 $[x]$ 为 E 中所有与 x 等价的元素构成的集合. $\forall x \in E$ 有 $x \in [x]$，从而 $E = \bigcup\limits_{x \in E} [x]$. 这是一不交并. 事实上如果有 $[x] \cap [y] \neq \varnothing$，则存在 $z \in E$ 使 $x \sim z$，$z \sim y$，由等价关系的传递性有 $x \sim y$，故得 $[x] = [y]$. 由 E 的等价类构成的集合记作 $E/\sim$.

相等关系为 $\mathbf{R}$ 上的一等价关系；被自然数 m 除，余数相同为 $\mathbf{N}$ 上的等价关系，对此等价关系有

$$\mathbf{N}/\sim = \{[0], [1], \cdots, [m-1]\}$$

1.1.2 集合与函数

集合与函数有着密切的关系，函数实质上是一种特殊的集合. 设 A，B 为 $\mathbf{R}$ 的子集，

$$f: A \to B$$

为一函数，则 f 唯一地由集合

$$G(f) = \{(x, y): x \in A,\ y = f(x) \in B\}$$

确定. 故 f 与集合 $G(f)$ 可相互替代，$(x, y) \in G(f)$ 有时也记作 $(x, y) \in f$. 从而知 A 到 B 的函数 f 实际上是集合 $A \times B$ 的一个子集，在该子集中，任一点的第一坐标唯一确定第二坐标，即如果 $(a, b) \in f$，$(a, c) \in f$，则必有 $b = c$. 函数 f 的定义域为

$$D_f = \{a \in A: \exists\, b \in B \text{ 使 } (a, b) \in f\}$$

值域为

$$R_f = \{b \in B: \exists\, a \in A \text{ 使 } (a, b) \in f\}$$

$\forall x \in A$，最多只有一个 $y \in B$ 使 $(x, y) \in f$，记作 $y = f(x)$，并称 y 为 x 在 f 下的像，x 称为 y 在 f 下的逆像. A 的任一子集 X 在

f 下的像为

$$f(X) = \{y \in B: \exists\, x \in X \text{ 使 } y = f(x)\}$$

B 的任一子集 Y 在 f 下的逆像为

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A: f(x) \in Y\}$$

函数 $f_1: A \to B$，$f_2: B \to C$ 如果满足 $R_{f_1} \subset D_{f_2}$，则 f_1 与 f_2 可构成复合函数 $h: A \to C$.

$$h(a) = (f_2 \circ f_1)(a) = f_2(f_1(a))$$

其中 $\forall\, a \in A$，$f_2 \circ f_1$ 一般不等于 $f_1 \circ f_2$.

设 f，g 均为函数，如果 $D_f \subset D_g$，且在 D_f 上 $g = f$，则称 g 为 f 的一个扩张，或称 f 是 g 在 D_f 上的一个限制.

设 A 为一给定集合，A 上的实值函数全体构成一集合. 在该函数集合中可定义元素间的加法与乘法运算如下：

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall\, x \in A$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x),\ \forall\, x \in A$$

集合与函数的另一关系是集合可以用函数表示. 设 A 为任一集合，A 的示性函数 1_A 定义为

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

则 A 可唯一地由其示性函数 1_A 表示. 对集合的交、并、补、差的示性函数有

$$1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B$$

$$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$$

$$1_{A^C} = 1 - 1_A,\ (1 = 1_\Omega)$$

$$1_{A\setminus B} = 1_A(1 - 1_B),\ (1 = 1_\Omega)$$

即集合的交、并、补、差运算对应于函数的和、差、积等运算.

在本书中，集合与函数还有一种特殊的关系，那就是集合作为函数的“自变量”. 在测度论中，我们主要讨论由某一给定集合 Ω 的子集构成的集族 $\mathscr{M}$，以及定义在 $\mathscr{M}$ 上的(集)函数. 该函数

对 $\mathscr{M}$ 中的任一元素(Ω 的子集)规定了一个实数. 如在由 $\mathbf{R}$ 的一切区间构成的集族 P 上定义函数 f 如下：对以 a、b 为端点的区间 I，令 $f(I)$ 为区间 I 的长度 $b-a$，则 f 即为定义在 P 上的集函数.

1.1.3 R 上的可数集与不可数集

给定集合 Ω 及某个与 Ω 中的元素有关的命题 P. 设 $A=\{x\in\Omega: x\text{ 满足 }P\}$，$B=A^C$. 一个极有意义的问题是：$P$ 在 Ω 上成立的可能性与不成立的可能性哪个大?这一问题实际上涉及到集合论中集合 A、B 所含元素多少的比较. 如果 A、B 均为有限集，它们的元素个数分别为 n_A，n_B，则由初等概率论可知：命题 P 在 Ω 上成立的可能性为$\dfrac{n_A}{n_A+n_B}$，不成立的可能性为$\dfrac{n_B}{n_A+n_B}$. 比较 n_A 与 n_B 的大小便可知问题的结论. 故在集合论中对集合元素个数进行讨论是非常重要的. 任一有限集合所含元素个数为一自然数. 对无限集合，元素个数问题的讨论非常复杂且深奥，不像我们想象的那样简单：无限集合所含元素的个数都是一样的，均为 $+\infty$. 本节我们只从元素个数的角度粗略地讨论两类根本不同的无限集合.

定义 1.1 设 A、B 为二集合，$f:A\to B$ 为 A 到 B 的映射. 如果 $\forall\, a, b\in A$，$a\neq b$ 时 $f(a)\neq f(b)$，则称 f 为一单射. 如果 $\forall\, b\in B$，$\exists\, a\in A$ 使 $f(a)=b$，则称 f 为一满射. 称一个既是单射又是满射的映射为一一映射. 如果 A、B 间存在一一映射，则称 A 与 B 对等(对等集合所含元素个数相同).

有限集：如果存在自然数 N，使集合 A 与集合 $M=\{1, 2, 3, \cdots, N\}$ 对等，则称 A 为有限集.

无限集：不是有限集的集合称为无限集.

可数集：如果 A 与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等，则称 A 为可数集. 集合 A 是可数的与集合 A 的元素可排成一列等价.

不可数集：不是可数集的集合称为不可数集，即不可数集不能与 $\mathbf{N}$ 对等，或不可数集的元素不能排成一列，故常称可数集为可列集.

定理 1.1

i）任一无限集必含一可数子集.

ii）可数集的任一无限子集是可数的.

iii）有限个或可数个可数集的并是可数的.

证明 i）设 A 为无限集，取 $a_1 \in A$，则 $A \backslash \{a_1\}$ 是一无限集. 取 $a_2 \in A \backslash \{a_1\}$，则 $A \backslash \{a_1, a_2\}$ 是无限集. 再取 $a_3 \in A \backslash \{a_1, a_2\}$，…. 如此下去便得 A 的一个可数子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

ii）设 E 是可数集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 的一个无限子集，则 E 中元素可按其在 A 中排列的先后次序排成一列，即 E 是可列的，从而为可数的.

iii）我们先对可数个互不相交的数集进行证明. 设 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为一列可数集，并设

$$A_i=\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots\}, i \in \mathbf{N}$$

则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 中的元素可按如下箭头方向排列：

$$\begin{array}{lllllll}
A_1=\{a_{11} \rightarrow & a_{12}, & a_{13} \rightarrow & a_{14}, & a_{15} \rightarrow & a_{16}, & \cdots\} \\
 & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \\
A_2=\{a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, & a_{26}, & \cdots\} \\
\quad\ \downarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & \\
A_3=\{a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & a_{35}, & a_{36}, & \cdots\} \\
 & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & & \\
A_4=\{a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & a_{45}, & a_{46}, & \cdots\} \\
\quad\ \downarrow & \nearrow & \swarrow & & & & \\
A_5=\{a_{51}, & a_{52}, & a_{53}, & a_{54}, & a_{55}, & a_{56}, & \cdots\} \\
\quad\ \vdots & & & & & &
\end{array}$$

即

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23} \cdots\}$$