新编考研冲刺系列丛书

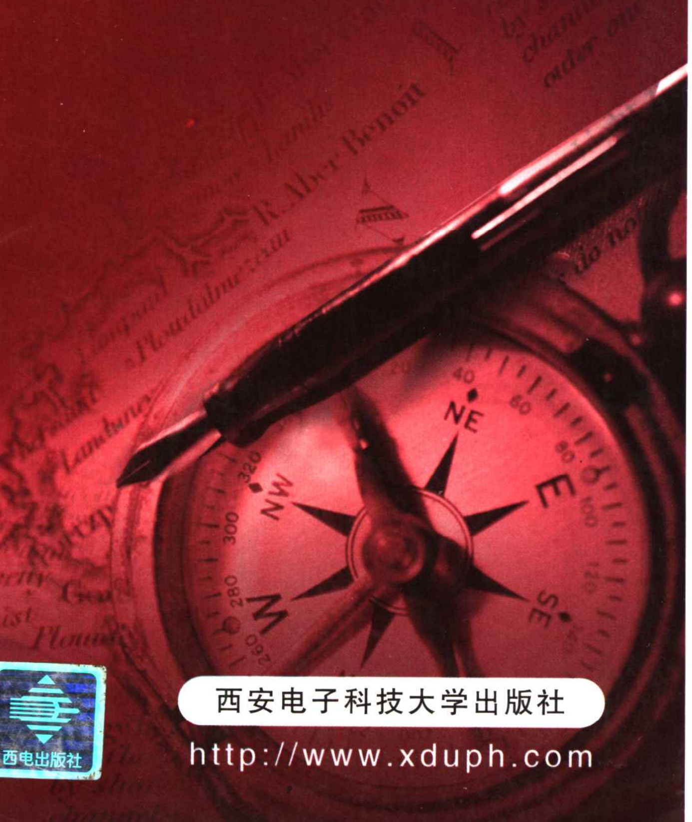
洞穿数学考研

——历年考研数学试题考点分析与预测

段兴 主编 考研命题研究组 编著

掌握本书80%的定式思路，
你的数学成绩可以轻松过关

★ 考点破译
★ 定式思路
★ 试题解析
★ 总结预测



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

□新编考研冲刺系列丛书　□2003版

掌握本书80%的定式思路，你的数学成绩可以轻松突破70分

洞穿数学考研

——历年考研数学试题考点分析与预测

段　兴　　主编

考研命题研究组　编著

西安电子科技大学出版社

2002

内 容 简 介

本书针对当前研究生入学考试(数学)的特点和最新的命题趋向，运用纯粹应试型的思路，从考生实践得分的角度，将1987～2002年的部分历年试题，根据出现的频次与分值，按考查的用意(考点)分类，一一解析. 同时，将所有考点分类总结为定式思路，考生可以迅速了解各章的考点分值分布规律(重要性分布规律)，迅速掌握各考点的解题技巧，轻松而充满信心地迎接考研.

本书出版较晚，主要是为了进一步了解2003年新大纲的修订情况及最新命题趋向，以便使预测更具科学性与准确性.

图书在版编目(CIP)数据

洞穿数学考研：历年考研数学试题考点分析与预测/段兴主编．
—西安：西安电子科技大学出版社，2002.8
(新编考研冲刺系列丛书)
ISBN 7-5606-1141-9
Ⅰ.洞… Ⅱ.段… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第039254号

责任编辑　马晓娟　张晓燕
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)8227828　　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　　E-mail:xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　西安兰翔印刷厂
版　　次　2002年8月第1版　2002年8月第1次印刷
开　　本　787毫米×960毫米　1/16　印张16.625
字　　数　333千字
印　　数　1～4 000册
定　　价　22.00元
ISBN 7-5606-1141-9/O·0055

XDUP 1412001－1

前　　言

在研究生入学考试中，数学是非常关键的一门，每年考研失败者60%以上是由于数学单科不达线而落榜的. 近三年，数学的及格率都被严格地限制在30%以下，尤其是2001年. 预计2003年数学会在2002年的基础上偏难. 数学类参考资料虽然相当繁多，但大部分仍然遵循传统的教科书加大量习题的形式，不是完全针对考试的高效率的应试型，使考生付出了大量的时间和精力但仍然不能抓住重点，遇到稍加变化的题即感无从下手，并且由于在数学复习上花了过多的时间，直接影响了总体复习，也影响了考研的信心.

本书根据应试型典型原则，争取以少而精的题(90%以上为历年试题，外加我们精选的少量有代表性的题型)，严格按照考研大纲要求，透过各种题目繁杂的表面，直接抓住其考查的中心环节，重点讲解典型考点及解题思路. 目的就是使考生在考场上一见考题，就知道其考查的用意，即能洞穿考题，既快又对地做题，确保数学轻松过关.

本书结构清晰，极其便于考生在最短时间内理清考研数学的出题思路、近年趋向、解题要领. 全书按照考查的用意分成19章，基本涵盖了考研大纲的所有要求，每章分为三部分.

1. 考点破译与解题定式思路

此部分按历年试题的出题频率、分值等将本章考点排序，结合相关考研试题，详述本类题目考查的用意、解析此类题目首先要想到的定式思路、相关变换技巧及应对策略等，这是考生须仔细阅读体会的关键，也是本书的精华所在.

2. 历年考研试题解析

结合从1987～2002年历年考研数学题所涉及到的每类考点对应的试题，按照时间顺序，从后向前一一分析，使得考生对此类主要考点的重要程度、考题考查的用意、主要解题方法豁然明了，即所谓洞穿考研.

3. 总结及预测

本书综合历年试题、近年趋向及考研政策等多种因素，对各部分出题量、重要性及2003年可能出题情况进行总结预测.

科学预测是本书的一大特点，本书所选题目主要采用历年试题，其出发点是“黑箱原理”：考研题库好比一个黑箱，它的内容我们无法尽知，但它使用得越多，它的内容暴露得越多，也越能反映出它的真实内容. 实际上，分析1987～2002年的历年考研试题，透过各种繁多的甚至是让人摸不着头脑的变换的题目表面，可以惊人地发现其命题内在的规律性

及重复性．在本书每一个大类的“考点破译与解题定式思路”部分，就揭示了考研数学命题内在的规律．

经过深入分析历年试题、考研大纲、当年的考试政策等多方因素，我们发现一些有价值的结论：前二三年内的考点基本不重复出，而是出同一大类(即本书的一章)的其余考点；而四五年后，重复的概率则相当大，甚至有的原样稍作变化即重复出现．故本书预测的原则就是综观1987～2002年历年考题，以近三年定考试趋向，以近4～7年甚至更远(同时结合近三年)定重复概率，同时将各年各类题型以不同的加权值代入，计算出各类题型最可能的出现概率，再根据今明两年的考试政策等多方因素加以调整，对新大纲的增补要求，按增补重点单独考虑，得出2003年的预测．可以说，在全国各类考研辅导中，本书首次将科学的预测方法引入到数学考研辅导中；对各考点，众编者总结出一系列相关题型的应试解题定式思路．因此，完全可以负责任地说：只要掌握本书80%的定式思路，你的数学成绩可以轻松突破70分．

另外需要说明的一点是，由于2001年的考题较难也较偏，与大纲基本精神偏离较大，也偏离了前几年的趋向，而2002年进行了较大调整，这与我们去年的预测完全吻合，这种情形与1998年的情形很类似(当年录取线为41分)．

本书列举到的19个考点破译与解题定式思路，实为众位编者从考试拿分的应试角度出发，呕心沥血的智慧结晶．考生应对每章的考点力争全面掌握，至少应对每章前一、二个考点纯熟掌握，因为这都是2003年最可能出题的考点．一定要记住：模棱两可与纯熟掌握在实际考试中将会是天壤之别，这是总结历届考研成功者与失败者关键差异之所在．在此，编者以十二分的苦心忠告欲考研的同学们，对本书提到的基本考点、基本题型、常用公式(如微分方程通解公式等)一定要达到纯熟掌握的程度；要熟练做题，不能一看全会，一做全错；公式要提前记住，决不可在考前才突击记忆．

本书实为编者呕心沥血的经验与教训的结晶，若广大考生能有所收获，也算是不枉编者的一片苦心．

段　兴

2002.6

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概　率

第　一　篇

高 等 数 学

第一章　极　　限

一、考点破译与解题定式思路

（一）洛比达法则、无穷小代换与连续函数实值代入相结合

此类题主要适用于$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型、$0\cdot\infty$型．

（二）幂指类函数

此类题形如1^{∞}型、0^0型、∞^0型，先利用对数恒等式$N=e^{\ln N}$，将原式变形，再对指数部分用$\frac{0}{0}$型与$\frac{\infty}{\infty}$型解法求解．

例如，对于0^0型，设$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)^{g(x)}$（$0^0$型）$=\lim\limits_{x\to 0}e^{g(x)\ln f(x)}$（指数部分为$0\cdot\infty$型）.

∞^0型与1^{∞}型可做类似处理．

注意　1^{∞}型极限有两种求法：

（1）利用对数恒等变形变为$0\cdot\infty$型，再化为$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型求解．

（2）利用公式$\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\text{ 或 }\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\right)$求解. 一般来讲，幂指函数的底呈$(1+u(x))$型，或易化为这种形式的（其中$u(x)\to 0$），用后者简单．

（三）含有分项、根式的极限式

（1）对含有分项的极限式（如两项和、差），形如$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\pm g(x))$，在求极限前，首先通分，再用方法（一）处理．

（2）对含有根号的极限式（形如极限式中含有$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$的题型），在求极限前，先用它们的共轭根式（$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$）分别乘以它们的分子、分母，再用方法（一）处理．

（四）含绝对值号的极限式

对含有绝对值号的极限式，应先去掉绝对值号，化为分段函数，再用分段函数求极限法，求出间断点处的左、右极限，比较得出原函数极限；对形如$\lim\limits_{x\to x_0}a^{\frac{1}{x-x_0}}$的极限问题，也应按分段函数分别求出左、右极限进行分析．

（五）极限式中常数项的确定

此类题主要采用方法(一)、(二)求解．

（六）其余几种特殊情况

本章的试题中，还有下面几种出现频率较低的题型：

（1）对 x 与 $\sin x$、$\cos x$、$\ln x$、e^x、$\sqrt{1\pm x}$等同时存在的极限式，可将 $\sin x$、$\cos x$、$\ln x$、e^x、$\sqrt{1\pm x}$等按泰勒级数展开．

（2）求数列极限主要有三种方法，按重要性依次为幂级数求和法、定积分定义应用法、夹逼定理．

（3）求递推公式中通项的极限时，一般用两种方法证明其存在性：① 证明其单调、有界，则必有极限．② 先假设其极限存在，从递推公式中解出通项极限，再用极限定义证明此极限即为原欲证的极限(用于数列不单调时)．

注意 以上类型是按出题者应考查要点依次排序，可能在一些复习资料中还涉及大量其余方法，但此书的目的是为了应考之用，而非泛泛地研究解题方法，故不在考查要点之列的解题方法一概略去，以便突出重点．

二、试题解析

（一）洛比达法则、无穷小代换与连续函数实值代入相结合(1～5 题)

1.（1998 年理工数学一）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解析 此题为$\dfrac{0}{0}$型，应采用洛比达法则．

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{4\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} \quad \text{（提出非零因子式）}\\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} \quad \text{（实值代入）}\\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} \quad \text{（提出非零因子式）}\\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

小结 在解题过程中时刻注意有无非零因子式，以便实值代入，这在历年试题中出现

频率较高．另外，对$\frac{0}{0}$型极限式，往往可用等价无穷小量的代换来简化计算．但若题中不便直接用已知的常见等价关系式，可考虑按更精细的皮亚诺余项型泰勒展开式求解．

2.（1997年理工数学一）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

解析 当$x\to 0$时，$1+\cos x\to 2$，$\ln(1+x)\sim x$，于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

由于有界变量乘以无穷小量仍为无穷小量，故$\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$，因而原式$=\frac{3}{2}$.

小结 在求极限过程中，应时刻注意非零因子$\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$及无穷小代换$\ln(1+x)\sim x$ $(x\to 0)$. 对常见的等价无穷小量关系应熟记，一般常用到的有以下几个：

当$x\to 0$时，有

$$
\begin{aligned}
&\sin x\sim x,\ \arcsin x\sim x\\
&\tan x\sim x,\ \arctan x\sim x\\
&\ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x\\
&1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x
\end{aligned}
$$

另外，若函数表达式中含有$\sin\frac{1}{x}$、$\cos\frac{1}{x}$（当$x\to 0$时），或$\sin x$、$\cos x$（当$x\to\infty$时），一般不用洛比达法则，而应用有界变量乘以无穷小量仍为无穷小量的原则．

3.（2000年理工数学二）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$.

解析 此题为典型的无穷小代换结合洛比达法则的极限计算．

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=-\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

4.（1993年理工数学二）$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=$________.

解析 此题为 $0\cdot\infty$ 型，先将题变为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，再用洛比达法则计算．

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

5.（1991 年理工数学二）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$．

解析 此题采用无穷小代换结合洛比达法则计算．

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\quad（无穷小代换）\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\quad（洛比达法则）\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

（二）幂指类函数（6～14 题）

6.（2001 年理工数学二）求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$．求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型．

解析

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}\\&=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}\end{aligned}$$

函数 $\sin x$ 的零点即为间断点，即 $x=0$，$k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$．

当 $x=0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类（可去型）间断点．

当 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，由于

$$\lim_{x\to 2k\pi^+}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to 2k\pi^-}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to(2k+1)\pi^-}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to(2k+1)\pi^+}f(x)=0$$

所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的第二类（无穷型）间断点．

小结 此类题属于考研中较难的常见题型，一般出现形式为已知 $f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，判别间断点类型．对这种类型的题应分两步求解，即先求出 $f(x)$ 的表达式及 $f(x)$ 的极限，再分析 $f(x)$ 的间断点情况，而不要一开始就分析 $g(x)$ 的情况．

7. （1996 年理工数学一）设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$，求 a .

解析 利用第二类重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 求解 .

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8$$

所以，$a=\ln 2$.

8. （1991 年理工数学一）求 $\lim\limits_{x\to0^{+}}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

解析 此题利用重要极限 $\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}$ 或取对数方法求极限均可.

方法一： 原式$=\lim\limits_{x\to0^{+}}\left[(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right]^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\cdot\pi}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

方法二： 原式$=\lim\limits_{x\to0^{+}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{\pi\ln\cos\sqrt{x}}{x}}=\mathrm{e}^{\pi\cdot\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{-\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

9. （1994 年理工数学二）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{n}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

解析 此题可利用第二类重要极限计算 .

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}}=\mathrm{e}^{4}$$

注意 本题也可转化为函数极限来计算 .

10. （1992 年理工数学二）求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

解析 本题可利用第二类重要极限计算 .

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{6+x}\right)^{-\frac{x+6}{3}}\right]^{\frac{-3(x-1)}{2(6+x)}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$$

11. (1989 年理工数学二) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解析 此题用对数恒等变形来求解.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln(2\sin x+\cos x)\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\right\}=\mathrm{e}^2$$

12. (1988 年理工数学二) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

解析 此题用对数恒等变形求解.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}\exp\left\{\tan x\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\tan x\cdot\ln x\right)\right\}$$

而
$$\lim_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=0$$

故原式 $=\mathrm{e}^0=1$.

13. (1987 年理工数学二) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n$.

解析 此题用第二类重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 求解.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{3}}\right]^{\frac{-3n}{n+1}}=\mathrm{e}^{-3}$$

另外，有些题好似幂指类，其实只是含有幂指数因子，而非整体幂指数形式，如下题.

14. (1991 年理工数学二) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

解析 当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\to 0$，于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1}{x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

(三) 含有分项、根式的极限式(15～23 题)

15. (1999 年理工数学一) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$.

解析 本题可先通分，再利用无穷小量的等价代换和洛比达法则进行计算.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}=\lim\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x}{6x}=\frac{1}{3}$$

16. （1994 年理工数学一）求 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

解析 此题可先通分，再利用无穷小代换与实值代入求解．

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

17. （1987 年理工数学二）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

解析 本题先通分，再利用洛比达法则求解．

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\quad\text{（洛比达法则）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

小结 只要符合$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，洛比达法则可以连续用几次．

18. （2001 年理工数学二）求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.

解析 $$\text{原式}=-\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})(x^2+x-2)}$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

小结 本题是典型的考查本章重点(三)的题型，即对极限号中含有根号的，首先想到有理化，用它们的共轭根式分别乘以它们的分子、分母，再用常见的方法(通常都用方法(一))去处理．本题即对因式消去公共项后，再用实值代入．

19. （1992 年理工数学一）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

解析 **方法一**：用洛比达法则．

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}(e^x-\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}\quad\left(\frac{0}{0}型\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{1}=1$$

方法二：用等价无穷小代换．

因为 $x\to 0$ 时，$1-\sqrt{1-x^2}\sim\frac{1}{2}x^2$，所以

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}\quad\left(\frac{0}{0}型\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}=1$$

方法三：分母有理化．

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\sin x-1)(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x^2})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

20.（1999 年理工数学二）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$．

解析　本题先有理化，再用洛比达法则求解．

$$原式=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{-x}{1+x}}=-\frac{1}{2}$$

21.（1997 年理工数学二）求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$．

解析　**方法一**：分子、分母同除以最大项．注意到 x 趋于负无穷，为了避免出错，可令 $t=-x$，则

$$原式=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}\sin t}}=1$$

方法二：先有理化，再计算．

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right]} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

注意　本题也可用多项式相除$\left(\text{形如}\dfrac{f(x)}{g(x)}\right.$，其中 $f(x)$、$g(x)$ 皆为多项式$\left.\right)$求极限的方法，即分子、分母同除以最大项．有些资料也称其为“抓大头”的方法．

22.（1993 年理工数学二）求 $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$．

解析　有理化后，用“抓大头”之多项式求极限法．（见上题）

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1} = -50
\end{aligned}
$$

小结　一般分式形式带有根号的，应先有理化分子或分母，但此题的解法一般不易想到，请注意其用法．此法一举两得，有理化的同时构造成分式$\dfrac{\infty}{\infty}$型，再用洛比达法则或“抓大头”方法．

23.（1992 年理工数学二）求 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}$．

解析　用洛比达法则（结合有理化）求极限．

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^2}{e^x-\cos x} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to0} \frac{x^2}{e^x-\cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0} \frac{2x}{e^x+\sin x} = 0
\end{aligned}
$$

（四）含绝对值号的极限式（24、25 题）

24.（2000 年理工数学一）求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$．

解析　去掉绝对值号，变为分段函数求极限问题．

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right] \quad \text{（多项式除以最高项）}$$

$$=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=2-1=1$$

故原式=1．

25.（1992 年理工数学一）求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$.

解析 因 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，而 $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在但不为$\infty$.

小结 注意求 $\lim\limits_{x\to 0}a^{\frac{1}{x}}$时，因 $\lim\limits_{x\to 0^+}a^{\frac{1}{x}}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^-}a^{\frac{1}{x}}$ 不同，故需按分段函数考虑．

（五）极限中常数项的确定（26～30 题）

26.（2000 年理工数学二）设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则常数 a、b 应满足______.

(A) $a<0$, $b<0$　　(B) $a>0$, $b>0$

(C) $a\leqslant 0$, $b>0$　　(D) $a\geqslant 0$, $b<0$

解析 显然 $b<0$，否则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\neq 0$，又由 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，知应有 $a\geqslant 0$，因此(D)为正确答案．

27.（1998 年理工数学二）确定常数 a、b、c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c$ $(c\neq 0)$.

解析 当 $x\to 0$ 时，$ax-\sin x\to 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}$ 存在而不为 0，故 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$，因此 b 必为 0.

因若 $b>0$，则在$(0,b]$内$\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$；若 $b<0$，则在$[b,0)$内$\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$.

利用洛比达法则有