

薄板按弹性和 塑性理论计算

丁大钧 编著

东南大学出版社



薄板按弹性和塑性理论计算

Calculations of Thin Slabs following
Elastic and Plastic Theories

丁大钧 编著



东南大学出版社

内 容 提 要

本书分“薄板按弹性理论计算方法”和“薄板按塑性理论计算方法”两篇，计15章。主要侧重介绍实际应用。上篇除阐述多种情况圆板和矩形板的古典解法外，对一异形板也给出了计算或弯矩公式，并介绍了四边支承板力矩分配法和差分法，还给出圆、环形板和多种有直角边板的近似计算方法。下篇介绍板按功法、平衡法和应用场法计算的上限解和下限解，还给出国际上已求得的“正确解”，并作了一些典型的证明，对板的薄膜效应也作了介绍。

本书可作为土建专业研究生选修课教材，也可供教师及工程技术人员参考。

薄板按弹性和塑性理论计算

丁大钧 编著

东南大学出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行 武进县第三印刷厂印刷

开本850×1168 毫米1/32 印张10.8125 字数269千字

1991年8月第1版 1991年8月第1次印刷

印数：1—1 000册

ISBN 7-81023-507-9

TU·33 定价：5.30元

责任编辑：张新建

前 言

各类双向板在工程中的应用十分广泛，它可以是钢筋混凝土做成的，也可以是金属的。它可以按弹性理论计算，也可以按塑性理论计算。本书分别阐述以上两种计算方法。该书是编者在历年讲授钢筋混凝土结构双向板经验和学习研究有关问题的基础上编写的，因此对钢筋混凝土教材中有关双向板试验时出现的现象从力学角度作了必要的论述。全书分上、下两篇，计15章，前8章讨论按弹性理论的计算，包括编者提出的简化计算(第七、八章)，在此批判了国际上袭用多年的 Marcus 方法中两向荷载的不正确分布和考虑扭矩影响的近似性，提出改进的荷载分布和较准确地考虑扭矩影响的计算，因而可推广应用于除沿周边支承的矩形板外的其他情况双向板的计算。在第四章的双向板力矩分配法中，指出国外资料的一些错误，并提出编者的一些看法。后7章阐述按塑性理论计算方法。本书书稿曾两次在东南大学用作研究生选修课教材。本书考虑今后再版时增加有限元计算方法。书中关于塑性理论计算方法，较多地引用了丹麦至友 M.P.Nielsen 教授和好友 M.W.Braestrup 博士著作中的资料，并承他们提供了有价值的参考文献，在此表示真挚的谢意。并对李猗穉同志为精心描绘全部底图和邵扣霞同志为打印讲义和出版本书所做的工作，编辑张新建同志为进行细致校对和武进县第三印刷厂为精心排印，表示衷心的感谢。

对书中的错误欢迎批评指正。

丁 大 钧

于东南大学1991年5月

PREFACE

In engineering, various kinds of two-way thin slabs which may be made of reinforced concrete and also made of metal (in this case, called plates generally) are extensively used. These slabs can be calculated following elastic or plastic theory. This book deals with these two calculation methods. It was edited on the basis of the experience for teaching two-way slabs in the course of reinforced concrete structures for many years, and of learning and studying the relevant problems; therefore, a necessary explanation of the phenomena appearing in two-way slab tests, mentioned in the text of reinforced concrete structures, was also given from the view of mechanics. This book is divided into two parts, both contain 15 chapters altogether. The first eight chapters discuss the calculation following elastic theory, including the simplified methods proposed by the author and mentioned in seventh and eighth chapters, in the latter the author criticizes the incorrect load distribution along two directions and the approximate character for considering the torsion in slabs, taken account in Marcus' method used world-widely for many years, and suggests the calculation including improved distribution of load and exact consideration of torsion influence, so it can be extended to use in the calculations of two-way slabs in the other cases besides that with rectangular plane and supported along four sides. For the moment distribution method of two-way slabs in fourth chapter, the author points out some problems in foreign material and gives his own views. The

second seven chapters deal with the calculation methods following plastic theory. This book has been mimeographed for using as a text of elective course for two times at Southeast University. The calculation method by FEM will be added in the 2nd edition for the future. For the calculations following plastic theory introduced in this book, more materials from the books written by my best friend, Danish Prof. M. P. Nielsen, the Honorary Professor of Southeast University, and from the paper by my good friend, Danish Dr. M. W. Braestrup, have been cited, and they have also provided valuable reference literatures, the author wishes to express his heartfelt gratitude to them. Besides, Mr. Li Yinong, an old man, traced all illustrations meticulously, Ms. Tai Kouxia transcribed the draft of lecture material by hand and finished much preparation work for publishing and Southeast University Press takes the task for publication of this book, the Editor Mr. Zhang Xinjian for checking carefully and the 3rd Press of Wujin County for typesetting and printing meticulously. The author thanks them from the bottom of his heart.

The criticisms to this book are welcome.

Ding Dajun

May 1991 at Southeast University

目 录

绪论	(1)
----------	-------

上篇 薄板按弹性理论计算方法

第一章 基本微分方程式和边界条件	(9)
§ 1-1 按直角坐标表示的基本方程式	(9)
§ 1-2 按极坐标表示的基本方程式	(17)
§ 1-3 边界条件	(24)
第二章 圆板与环形板	(27)
§ 2-1 一般情况	(27)
§ 2-2 承受均布荷载的圆板	(28)
§ 2-3 中心作用有集中荷载的圆板	(33)
§ 2-4 环形板	(36)
§ 2-5 圆板与环形板公式汇总	(43)
第三章 单块矩形板	(67)
§ 3-1 四边简支板	(67)
§ 3-2 承受局部均布荷载的简支板	(81)
§ 3-3 沿周边承受弯矩载的板	(84)
§ 3-4 四边嵌固板	(89)
§ 3-5 两对边简支、一边嵌固、一边自由的均布荷载板	(96)
§ 3-6 支承在等间距柱行列上的板	(99)
§ 3-7 承受轴向压力板的稳定	(104)
第四章 连续板的弯矩分配法	(109)
§ 4-1 概述	(109)
§ 4-2 板在沿边长按正弦规律分布的弯矩作用下的挠度和旋 转角	(109)
§ 4-3 板的刚度和弯矩传递系数	(117)

§ 4-4 跨中弯矩的确定	(132)
第五章 其他形状的板	(142)
§ 5-1 椭圆形板	(142)
§ 5-2 半圆形板	(145)
§ 5-3 扇形板	(149)
§ 5-4 三角形板	(150)
§ 5-5 梯形板	(153)
§ 5-6 多边形板	(158)
第六章 计算矩形板的有限差分法	(159)
§ 6-1 网格的差分方程	(159)
§ 6-2 截面内力	(162)
§ 6-3 网格边界条件	(165)
§ 6-4 计算例题	(167)
第七章 轴对称板的简化计算	(175)
§ 7-1 基本概念	(175)
§ 7-2 圆板	(176)
§ 7-3 环形板	(179)
第八章 有直边板的简化计算	(182)
§ 8-1 H. Marcus方法简介	(182)
§ 8-2 准确考虑扭矩影响时的板带法	(186)
§ 8-3 简支板	(188)
§ 8-4 嵌固板	(194)
§ 8-5 弹性支承板	(196)
§ 8-6 有自由边的板(悬空板)	(198)
§ 8-7 连续板	(203)
§ 8-8 三角形板	(205)
§ 8-9 板的稳定计算	(212)

下篇 薄板按塑性理论计算方法

第九章 概述	(216)
§ 9-1 屈服线	(216)
§ 9-2 屈服条件	(218)
§ 9-3 上、下限解	(220)
§ 9-4 按弹性和按塑性理论设计的经济比较	(224)
第十章 上限解(一)——功法	(227)
§ 10-1 基本原理	(227)
§ 10-2 矩形板	(232)
§ 10-3 圆板	(248)
§ 10-4 三角形板	(251)
§ 10-5 梯形板	(253)
§ 10-6 有柱支承时	(254)
§ 10-7 有自由边的板	(259)
第十一章 上限解(二)——平衡法	(261)
§ 11-1 基本概念	(261)
§ 11-2 节点力	(263)
§ 11-3 矩形板	(268)
§ 11-4 有洞口的矩形板	(270)
§ 11-5 三角形板	(273)
§ 11-6 两邻边简支, 两邻边自由, 承受均布荷载的板	(276)
第十二章 板的薄膜效应	(278)
§ 12-1 基本概念	(278)
§ 12-2 流动理论解	(283)
§ 12-3 形变理论解	(287)
第十三章 下限解(应力场法)	(290)
§ 13-1 满足平衡和边界条件的通解	(290)
§ 13-2 下限解	(296)
§ 13-3 相似法	(305)
第十四章 准确解的综述	(307)

§ 14-1	公式的汇总	(307)
§ 14-2	解的证明举例	(310)
第十五章	板带法	(326)
§ 15-1	基本概念	(326)
§ 15-2	举例	(327)
参考资料		(331)

CONTENTS

PART I. CALCULATION METHODS OF THIN SLABS FOLLOWING ELASTIC THEORY

Introduction

Chapter 1. Fundamental Differential Equations and Boundary Conditions

Chapter 2. Circular and Annular Slabs

Chapter 3. Single Rectangular Slabs

Chapter 4. Moment Distribution Method of Continuous Slabs

Chapter 5. Slabs of Various Shapes

Chapter 6. Finite-Difference Method for Calculating Rectangular Slabs

Chapter 7. Simplified Calculation for Axially Symmetric Slabs

Chapter 8. Simplified Calculation for Slabs with Straight Sides

PART II: CALCULATION METHODS OF THIN SLABS FOLLOWING PLASTIC THEORY

Chapter 9. Brief Introduction

Chapter 10. Solutions of Upper Bound (I) — Energy Method

Chapter 11. Solutions of Upper Bound (II) — Equilibrium Method

Chapter 12. Membrane Effect of Slabs

Chapter 13. Solutions of Lower Bound (Stress Field Method)

Chapter 14. Summary of Exact Solutions

Chapter 15. Strip Method

绪 论

1. 概述

板为平面六面体结构，其厚度可能是不变的或变化的，厚度较平面尺寸小较多或很多。

板的内力有弯矩 M 及由此引起的法向应力、剪力 Q 及由此引起的垂直剪应力 τ_v 和扭矩及由此引起的水平剪应力 τ_h 。有时还沿板的中心平面作用有压力或拉力及由此引起的“链应力”。板内应力特征与下列因素有关：

- (1) 尺度关系——板的厚度和平面尺寸；
- (2) 支承特点（简单支承、固定支承、弹性支承、整片支承或集中支承等）；
- (3) 荷载形式及其分布特征（横向的，作用在中心平面及沿周边等）。

根据应力状态和计算方法特征，对板采用下列分类：

- (1) 厚板；
- (2) 薄板或刚性板；
- (3) 有限刚度板；
- (4) 薄膜。

各类板的特征如下：

(1) 厚板承受三向应力状态，这用弹性空间理论微分方程式体系描述。当厚度与其最小平面尺寸之比大于 $1/5$ 甚或 $1/3$ 的板，称为厚板。

(2) 弹性薄板或刚性板当在横向荷载下受弯时，“链应力”和

弯曲应力比较总是很小(不大于后者的5%)。作为划分,此处取下列板的柔度指数:

$$S = \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4$$

式中 q ——横向荷载集度;
 E ——板材料的弹性模量;
 a ——板在平面中的最小尺度;
 h ——板厚。

表 0-1 薄板柔度指数S的下限

支承种类	板的边长比	柔度指数
刚性固定支承	1:1.0	55
	1:1.5	33
不动铰固定支承	1:1.0	12
	1:1.5	5
简单支承	1:1.0	26
	1:1.5	13

如果所研究的板的柔度等于或大于表0-1中列出的S值时,则认为这种板为薄的或刚性的。

从实用观点,对厚度不超过跨度的1/5,而挠度不超过厚度一半的板可视为薄板。

按弹性理论计算薄板和梁计算理论相似,是根据板弯曲的古典理论,利用平截面假定来进行的。

(3) 有限刚度板则不同,它的弯曲在其中心平面内(板厚中间平面)将还引起很大的拉或压应力(链应力)。发生在有限刚度板内的链应力对弯曲力矩引起重要的影响,特别是当铰支承边缘时,弯矩和挠度减小几倍,而且破坏了出现在刚性板中弯矩和挠度与横向荷载之间的线性关系。

在有固定(嵌固)边的板中,链应力的影响小于有不动铰支边的板。因此在有限刚度板中,支承边缘的固定不仅不减小中心部分的应力值,如在刚性板中出现的那样,而且在大多情况下甚至引起这些应力的某些增大。

在有限刚度板内最大应力较小,而与板跨 a 和厚度 h 之比有关,特别是当这项比值很大时($a/h > 100$)。在这种情况下,板厚减小到2~3倍,对总应力值的影响是很小的,而且在某些情况下(当 a/h 很大时),板厚的减小甚至会引起板中应力的降低。这是由于比值 a/h 增大超过100时,随着链应力的增大,同时弯曲应力减小,以致总应力则几乎维持常数。

在有限刚度板中,所述的链应力是由于存在推曳力而出现在板中心平面内的拉或压力所引起,后者(推曳力)则是由于支承边缘在板的平面内的自由移动受阻碍所导致。分有限刚度板为两种情况。

(I) 不大挠度的柔性薄板,如果除横向荷载外,板还在其中心平面内承受很大压力的(刚性)薄板属于这组。板是这样的薄并在中心平面内承受这样大而不能忽视的力。但这种板承受的横向荷载则不大,以至挠度和厚度比较是很小的。计算这种板相似于计算在已知纵向力下梁的组合弯曲。

(II) 大挠度柔性薄板,这种板是这样的薄以至链应力对在横向荷载作用下的挠度产生很大的影响。由于这种板弯挠很大,因此不能忽视其挠度对企图引起板中心层变形的力的影响。计算大挠度的柔性板是利用描述弯曲和拉伸共同变形的微分方程式系来进行的。

(4) 薄膜。当在横向荷载作用下引起的弯曲应力很小,以至和链应力比较可以忽视,称这种板为薄膜。薄膜分为两组:金属的和绝对柔性的。

金属薄膜，在其中由弯曲引起的应力和链应力比较为很小，但它不仅可引起拉力，而且可引起压力。

绝对柔性薄膜不产生弯矩。此外相似于柔线，也不能产生压力。

在上述分类中，究竟属于哪种板的问题，可考虑影响板变形的所有因素来解决。这些因素不仅有板尺寸的比例，而且有材料的力学特征和作用荷载的值。

当考虑仅作用在板中心平面内的力时，照例称之为盘体或梁—墙。

2. 简史

(1) 关于弹性理论解

板根据其厚度与其跨度之比大小的不同，分为厚板、薄板和薄膜，已如上述。本书仅限于讨论在工程中最常遇到的薄板，即厚度与其跨度(边长或直径)之比为很小的板。

早在1820年，C.L.M.H.Navier即送交法国科学院一篇论文，提出用重三角级数解简支矩形板，1923年，在 Bull. soc. philomath. 中发表了此文的摘要。

1829年，S.D.Poisson给出圆板弯曲问题的解。

1850年，G.Kirchhoff证明了自由边三个边界条件 $(M_x)_{x=a}=0$ 及 $(M_{xy})_{x=a}=0$ ， $(Q_x)_{x=a}=0$ 过多，可将 M_{xy} 与 Q_x 合并成 $V_x =$

$$\left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = 0.$$

1883年，Saint Venant导出承受均布荷载及在其平面内的力作用下矩形板的微分方程式。1891年 G. H. Bryan讨论了平板在其平面内作用压力时的稳定问题。

1899年M.Levy提出承受均布荷载矩形板的单级数解。

1916年M.T.Huber研究了交叉配筋混凝土板的合理计算，

1925年他提出各向异性板的准确计算。

1920年N.S.Nielsen提出板的差分解。

1925年H.Marcus提出板带法的简化计算。①

1938年S.Woinowsky-krieger研究了连续板的计算。1955年W.Brunner在N.W.Newmark(1938)及G.Fischer(1952)研究的基础上,提出连续板的力矩分配法。

(2) 关于塑性理论解

虽然按弹性理论进行钢结构分析对在使用荷载下的变形和应力可给出满意的结果,但对承载能力的估算将给出较大的误差。在破坏时,弹性理论的基本假定已不再有效。在很多情况下,弹性理论设计过份保守,但也有这种情况,按弹性理论甚至可能给出不安全结果。此外,除简支情况外,因为数学的困难,弹性分析严格受到限制,尽管基于计算机的广泛应用的现代数值方法可能解非常复杂的板的问题,但明显需要有一简单的分析方法,借以校核计算机解。

1914年G.V.Kazinzy已观察到嵌固钢梁的极限承载力远高于按弹性理论预测的。承载能力的这种增大是由于大多数材料塑性(延性)所导致,例如钢、铝和钢筋混凝土。因为考虑材料的塑性,则在结构破坏瞬间,嵌固钢梁截面中的应力图形将成曲线形,外边纤维最大应力为 $\sigma_s =$ 屈服强度 f_y ,甚至可进入硬化阶段,即 $\sigma_s > f_y$ (图0-1),而当拉压应力图形都为 $\sigma = f_y$ 的矩形时,截面承载能力较仅外边缘纤维应力 $= f_y$ 时大50%。此外嵌固的超静定梁还将发生内力重分布,即仅当一个截面进入塑性状态时,结构尚是几何稳定的,而可继续承受荷载,如图0-2中最大应力

①1968年编者提出准确考虑扭矩影响的板带法简化计算,并推广应用于其他多种情况(参看第8章)。

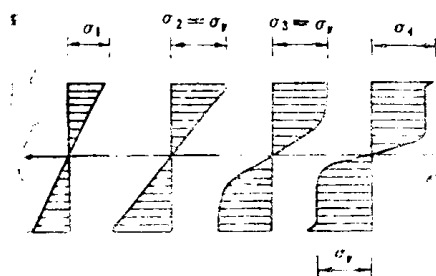


图 0-1

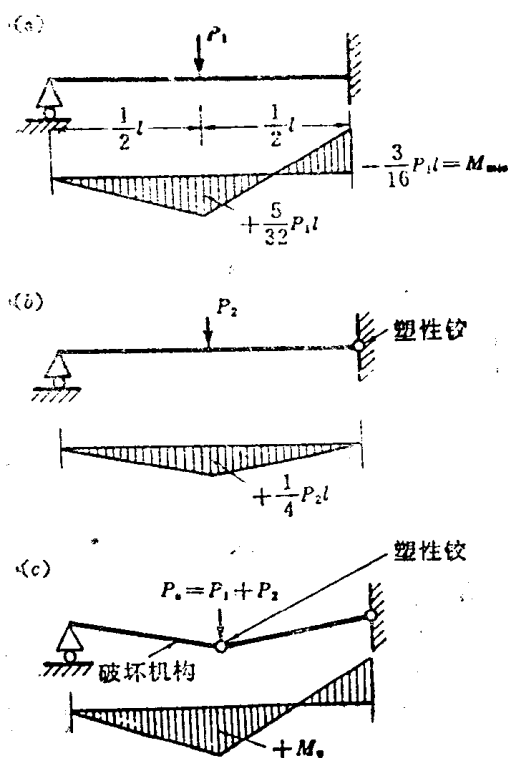


图 0-2