高等數學分析

華羅庚

凡異出版社

目　錄

第一章　線性方程組與行列式（復習提綱）

§1.　線性方程組

考慮齊次方程組：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = 0\,,\quad i = 1\,,\ \cdots,\ n\,, \tag{1}$$

這兒a_{ij}是複數（或實數）x_1，…，x_n是未知數。方程組 (1) 顯然有一個解

$$x_1 = \cdots = x_n = 0\,. \tag{2}$$

這個解稱爲顯見解。

研究齊次方程組的基本問題是：除顯見解外，(1) 是否還有其他解？能否定出所有的解來？

非齊次方程組

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = b_j\,,\quad i = 1\,,2\,,\cdots,n \tag{3}$$

的基本問題是：(3) 是否有解？能否定出所有的解來。

如果 (3) 有一個解（x_1°，… x_n°），即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j^{\circ} = b_i\,,$$

則

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(\,x_j - x_j^{\circ}\,) = 0\,.$$

命 $y_j = x_j - x_j^{\circ}$，則y_j是 (1) 的解。所以解非齊次方程組的問題一變而爲兩個：首先是是否有解，其次定出齊次方程組 (1) 的所有解來。

關於是否有解有次之重要結果：

如果 (1) 有非顯見解，則 (3) 不能對所有的 $b_1, \cdots, b_n$ 都有解。

如果 (1) 僅有顯見解，則 (3) 對任意的 $b_1, \cdots b_n$ 都有解。

§ 2. 消去法

解線性方程組 (3) 的方法我們著重複習一下 Gauss消去的原則。以四個未知數、四個方程爲例

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases} \tag{1}$$

將 (1) 中的第一個方程除以係數 a_{11} (它叫做“主導”元素）並令

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \ (j > 1), \tag{2}$$

則得一個新的方程

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}. \tag{3}$$

再由方程 (3) 及 (1) 中的後面三個方程消去 x_1，這樣便得到一個輔助方程組，它包括具有三個未知數的三個方程，此種消去法易於施行，只須順次將方程 (3) 乘以 a_{21}, a_{31}, a_{41} (也就是乘以第二、第三和第四行的“主導”元素）再由 (1) 中的對應方程減去此式即可，消去一個未知數以後所得的新方程組，其係數用 $a_{ij,1}$ 代表：

$$a_{ij,1} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} (i, j \geq 2). \tag{4}$$

其次將新方程組中的第一式除以它的“主導”元素$a_{22,1}$，則得方程

$$x_2 + b_{23,1}x_3 + b_{24,1}x_4 = b_{25,1}. \tag{5}$$

其中

$$b_{2j,1}=\frac{a_{2j,1}}{a_{22,1}}\quad(j>2), \tag{6}$$

然後仿照前面的方法繼續進行，我們便得到了一組具有兩個未知數的的兩個方程，它們的係數呈如次的形式：

$$a_{ij,2}=a_{ij,1}-a_{i2,1}\,b_{2j,1}\quad(i, j\geq 3). \tag{7}$$

將這組方程的第一式除以主導元素 $a_{33,2}$，並令

$$b_{3j,2}=\frac{a_{3j,2}}{a_{33,2}}\quad(j>3), \tag{8}$$

則得方程

$$x_3+b_{34,2}\,x_4=b_{35,2}.$$

最後再做一步，即可得出一個方程，它只含一個未知數，而其係數爲 $a_{44,3}$，將這個方程除以 $a_{44,3}$，則得

$$x_4=b_{45,3}.$$

將具有係數 $b_{ij,i-1}$（$j>i$）的一切方程合併，便得到一個三角形的方程組，它與原有的方程組等價；它的解釋就是原有方程組的解，我們要注意，上述方法只有當所有的“主導”元素都不等於零時才能使用。

我們把求三角形方程組的係數的手續稱爲正面過程，而把求三角形方程組的解的手續稱爲反面過程（參看附表）。

我們還要講一下驗算的方法，用代換 $\bar{x}_i=x_i+1$，則我們得到一組 $\bar{x}_i$ 爲變數的方程組，它的係數與原來的相同，而它的常數項等於原方程的係數與常數項之和，我們可以同時計算這兩個方程組，求出解 $\bar{x}_i$，並視其是否等於 x_i+1，這就是驗算方法。

現在簡單地說明一下附表：

正面過程是用如下方法來施行的，寫出矩陣係數（包括常數項與

核驗和）將第一行除以主導元素，並將結果寫成矩陣最末一行，再求出第一個輔助係數 $a_{ij,1}$（i ，$j \geq 2$）： 從已知矩陣任取一個元素，由它減去一個乘積—— 就是上述元素所在的那一行的主導元素與上述元素所在的那一列的最末元素的乘積，重覆施行這種手續，當我們得出了僅含一行的矩陣時，正面過程便完成了。

附 表 1

x_1	x_2	x_3	x_4		Σ						Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	1.00	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	0.42	1.00	0.32	0.44	0.5	2.68
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	0.54	0.32	1.00	0.22	0.7	2.78
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	0.66	0.44	0.22	1.00	0.9	3.22
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	1.	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92
	$a_{22,1}$	$a_{23,1}$	$a_{24,1}$	$a_{25,1}$	$a_{26,1}$		0.82360	0.09320	0.16280	0.37400	1.45360
	$a_{32,1}$	$a_{33,1}$	$a_{34,1}$	$a_{35,1}$	$a_{36,1}$		0.09320	0.70840	-0.13640	0.53800	1.20320
	$a_{42,1}$	$a_{43,1}$	$a_{44,1}$	$a_{45,1}$	$a_{46,1}$		0.16280	-0.13640	0.56440	0.70200	1.29280
	1	$b_{23,1}$	$b_{24,1}$	$b_{25,1}$	$b_{26,1}$		1	0.11316	0.19767	0.45410	1.76493
		$a_{33,2}$	$a_{34,2}$	$a_{35,2}$	$a_{36,2}$			0.69785	-0.15482	0.49568	1.03871
		$a_{43,2}$	$a_{44,2}$	$a_{45,2}$	$a_{46,2}$			-0.15482	0.53222	0.62807	1.00547
		1	$b_{34,2}$	$b_{35,2}$	$b_{36,2}$			1	-0.22185	0.71030	1.48844
			$a_{44,3}$	$a_{45,3}$	$a_{46,3}$				0.49787	0.73804	1.23591
			1	x_4	$\bar{x}_4$				1	1.48240	2.48240
		1		x_3	x_3			1		1.03917	2.03916
	1			x_2	x_2		1			0.04348	1.04348
1				x_1	x_1	1				-1.25780	0.25779

在反面過程中，我們利用包含1的各行而由最末一行開始，精確地說，在這些行的最後一行裏，我們從常數項的一列中得到了最後一個未知量的值，只要由倒數第二列的元素減去對應係數 b 與前面所得未知量 i 值的乘積即可，在表格的末尾寫出1字，可以幫助我們找出在所要各行中對應於已知 x 的系數，例如

$$x_2=b_{25,1}-b_{23,1}x_3-b_{24,1}x_4$$
$$=0.45410-0.11316\times1.03917-0.19767\times1.48240=0.04348.$$

最後，我們還要指出用這種方法解 n 個變數的線性方程組所需的乘法與除法的運算次數爲 $\frac{n}{3}(n^2+3n-1)$.

§ 3. 消去法的幾何解釋

先看兩個變數的情況。

$$l:\quad ax+by=c,\qquad l':\quad a'x+b'y=c',$$

在平面上各表示一條直線，有個直線有一交點：消去 y，得出僅有 x 的方程，這是這個交點在 x 軸上的投影。

也可以這樣看：第一、二方程表示一條直線 l 與 l'。由方程

$$\lambda(ax+by-c)+\mu(a'x+b'y-c')=0$$

定義出一族直線，這些直線由 $\lambda l+\mu l'$ 表示，這些直有一個重要性質，就是通過 l 與 l' 的交點，不難證明：反過來，凡是通過 l 與 l' 的交點直線也在這族之中，在這族直線中有一條平行於 y 軸的。這條直線便是消去 y 後的方程。

再看三個變數的情況。

$$l:\quad ax+by+cz=d,$$
$$l':\quad a'x+b'y+c'z=d',$$
$$l'':\quad a''x+b''y+c''z=d'',$$

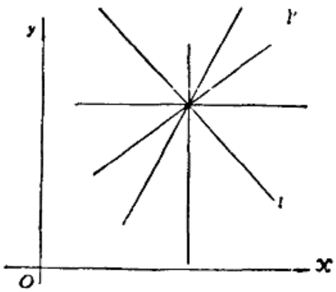

圖　1

這表示三個平面，平面族

$$\lambda l+\mu l'=0$$

代表通過 l 與 l'的交線的所有的平面。由 l 與 l'中消去 x 得出的方程可以看成爲：它代表通過交線而平行於 x 軸的平面，也可以看成爲：這條交線在(y,z)平面上的投影，就是 y，z 平面上的一條直線，再從 l，l'' 中消去 x，又得 y，z 平面上的一條直線。

因此，消去 x，可以看作把三維空間的三個平面求交點的問題變爲在 y，z 平面上求兩條直線的交點的問題。這兩條直線，正是兩條空間直線（平面的交線）的投影。

一般講來：一個

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_n=b_n$$

可以看成爲 n 維空間的超平面。消去法便是把 n 從空間 m 個超平面求交點的問題化爲 $n-1$ 維空間 $n-1$ 個超平面求交點的問題。

§ 4.　消去法的力學解釋

在一條兩端固定的弦線上取 n 點 p_1，…，p_n，在這 n 點各加一重物，也就是在這些點各有一向下的力 F_1，…，F_n，我們來研究這些點的垂度 y_1，…，y_n．

我們假定弦線上的力適合於“線性疊加原則”。

1°. 兩組力疊加，其對應的垂度也相加。

2°. 所有力都乘以同一實數，則所有的垂度也乘上這一個相同的數。

以 a_{ij} 表示當在 P_j 點上作用一個單位力時點 P_i 的垂度。這樣，力 F_1，…，F_n 的聯合作用後的垂度 y_1，…，y_n 等於

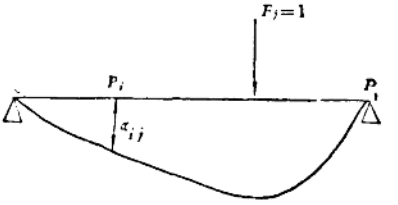

圖　2

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j = y_i$$

$(i=1,2,\cdots,n)$.　　(1)

解線性方程組的問題，也就是給了垂度 y_1，…，y_n 要求出力 F_1，…，F_n 的問題了。

在P_1點加一個反作用力 R，這樣單位力作用於 P_j 時，P_i 點的垂度等於

$$b_{ij} = a_{ij} + Ra_{i1} .$$

考慮把弦線固定於 P_1 的情況，也就是

$$b_{1j} = 0 , \qquad a_{1j} + Ra_{11} = 0 ,$$

$$R = -a_{1j} / a_{11} .$$

也就是在P_j點加一個單位力，如果要在P_1加一個力使P_1固定，這個力是$-a_{1j}/a_{11}$，這時

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{1j} a_{i1} / a_{11} .$$

從 (1) 式消去 F_1，得

$$\sum_{i=2}^{n} (a_{ij} - a_{1j} a_{i1} / a_{11}) F_j = y_i - a_{i1} y_1 / a_{11} . \qquad (2)$$

這就是加支點後的平衡方程，在P_1加了支點，在P_j 作用一個單位力，b_{ij} 就是P_i 的垂度。逐步消去，就是逐步加支點的過程。

§ 5. 經濟平衡

假定有n種生產品$p_1,\cdots p_n$ 生產一個單位P_i需要a_{ij}單位P_i，如果各產品的數量是$x_1,\cdots,x_n$，爲了生產這些產品，P_i類產品的總消耗是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ , \ 1\leq i\leq n \ .$$

能夠供給市場的數量是

$$x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \ .$$

因此，知道了市場需要$b_1,\cdots,b_n$，反回來考慮給各工業的生產指標$x_1,\cdots,x_n$也是一個解線性方程的問題。

這類方程當然可以用消去法解，但更好是用疊代法解。關於疊代法將來再談。

§ 6. 線性迴歸分析

某一變量ξ決定於n個因素

$$\eta_1 \ ,\cdots, \ \eta_n \ .$$

我們已經做了N次實驗得出的實驗數據是

$$\xi^{(i)},\eta_1^{(i)},\eta_2^{(i)},\cdots,\eta_n^{(i)}, \ i=1,\cdots,N.$$

我們考慮線性關係

$$\xi=\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j$$

問題是怎樣的線性關係，差方和最小，也就是，如果使

$$\zeta^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)} \ ,$$

求怎樣的 a_j 使

$$\sum_{j=1}^{n}(\xi^{(i)}-\zeta^{(i)})^2$$

最小即求

$$F(a_1,\cdots a_n)=\sum_{i=1}^{N}(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)})^2 \tag{1}$$

的極小值。

命

$$a_{jk}=\sum_{i=1}^{N}\eta_j^{(i)}\eta_k^{(i)}\quad,\qquad b_k=\sum_{i=1}^{N}\xi^{(i)}\eta_k^{(i)}\ .$$

我們現在證明

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jk}x_j=b_k\quad,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

的解答 $x_j=a_j$ 使(1)取最小值。

我們現在來證明這一點：如果 a_1 ，…， a_n 並不合於 (2) 。例如：有一個 k 使

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jk}a_j-b_k=-\alpha_k\neq 0\ .$$

我們考慮

$$\begin{aligned}
&F(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,a_{k+1},\cdots,a_n)\\
&=\sum_{i=1}^{N}(\xi^{(i)}-\sum_{i=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)}+\varepsilon\eta_k^{(i)})^2\\
&=\sum_{i=1}^{N}(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)})^2+2\varepsilon\sum_{i=1}^{N}(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_i\eta_j^{(i)})\eta_k^{(i)}+\varepsilon^2\\
&\quad\cdot\sum_{i=1}^{n}(\eta_k^{(i)})^2
\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\,\eta_j^{(i)})^2+2\varepsilon(b_k-\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\,a_j)+\varepsilon^2 a_{kk}$$

$$=F(a_1\,,\cdots,\,a_k)+2\varepsilon\alpha_k+\varepsilon^2 a_{kk}\,.$$

湊方得

$$F(a_1\,,\cdots,a_{k-1}\,,a_k+\varepsilon\,,a_k\,,\cdots,a_n)$$

$$=F(a_1\,,a_2\,,\cdots,a_n)+a_{kk}\,(\,\varepsilon+\frac{a_k}{a_{kk}}\,)^2-\frac{a_k^2}{a_{kk}}\quad. \qquad (3)$$

如果$\alpha_k \neq 0$，則$F(a_1\,,\cdots,\,a_n\,)$不是最小值，因爲在 (3) 式中取$\varepsilon=-\alpha_k\mid\alpha_{kk}$，則

$$F(a_1\,,\cdots,\,a_{k-1}\,,\,a_k+\varepsilon\,,\,a_k\,,\,\cdots,\,a_n)$$

的數值小於$F(a_1\,,\cdots,a)$的數值了。

因此：求迴歸平面的問題一變而爲解線性方程的問題了。

至於要證明，適合於 (2) 的解一定使F取最小值，這一點的證明不難，如果 (2) 僅有一個解，當然毫無問題，因爲由 (3) 可知不適合 (2) 的都不可能使F極小。（讀者自證：(2) 一定有解，並處理 (2) 有不止一個解的情況。）

方程組 (2) 當然可以用消去法來解，但是這是一個有對稱系數的聯立方程式，即

$$a_{jk}=a_{kj}\quad,$$

關於這樣的方程組我們另有較好的計算方法。

以上的證明的優點之一，也許有人會指出，它避開了微積分，直接用初等的“湊方”法來處理了，實際上，更好的優點在於這個方法介紹了計算數學上的一個重要的方法── 鬆弛法。

特別在計算迴歸分析時，鬆弛法更有價值。方法是：

1） 先任意地取一組$a_1\,,\cdots,a_n$.

2）任意地算一個

$$\alpha_k=\sum_{j=1}^{n}a_{jk}a_j-b_k\text{ ,}$$

如果把$\alpha_k\neq0$，把

$$a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,\cdots,a_n$$

作爲原出發點，如果$\alpha_k=0$，則要换一個k。

3）一般的辦法是$k=1,2,\cdots,n,1,2,\cdots,n,\cdots$周而復始地進行計算，這樣便可以得出所求的解答了。

這方法之所以命名爲鬆弛法的原因在於此，另一點是如果算錯了，不必從頭算，依錯算下去，依然得出正確的結果來（即算錯了的（$a_1,\cdots,a_n$)再開始算下去，依然能得出結果來的）。

當然，並不是說常常錯，而是說偶然算錯了關係不大而已。

雖然“鬆弛”，但偶而略爲緊張些可以幫我們更有效地解決問題，例如：比較一下

$$\alpha_k/a_{kk}\ ,\quad k=1,2,\cdots,n$$

誰大，取使這值最大的整數k出發最有利，因爲由(3)可知在F上減得多了，這方法一定可以逐步逼近原解答的。

§7. 行列式

建議從§1的關係引進行列式，也就是用數學歸納法來定義行列式，即行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}\ .$$

此處A_{ij}是由原行列中劃掉第i行，第j列所得出的$n-1$行的行列數