21世纪计算机专业重点课程辅导丛书

高等数学
习题与解析

胡新启　湛少锋　编著

Exercise & Analysis

清华大学出版社

▶ 21世纪计算机专业重点课程辅导丛书

高等数学习题与解析

胡新启　湛少锋　　编著

清 华 大 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是根据高等数学教学大纲的基本要求，融入作者多年的教学实践经验，面对广大学生编写的一本同步辅导教材。

全书共分 11 章：第 1 章极限与连续，第 2 章导数与微分，第 3 章中值定理与导数应用，第 4 章不定积分，第 5 章定积分及其应用，第 6 章空间解析几何，第 7 章多元函数微分学，第 8 章重积分，第 9 章曲线积分与曲面积分，第 10 章级数，第 11 章常微分方程。书中每一章首先对该章的知识点进行详细的归纳总结，然后对覆盖面广且有代表性的例题（包括大量考研真题）从多侧面、多角度进行讲解。希望能帮助读者加深对高等数学基本内容的理解，进而掌握解题的方法、技巧，以达到复习巩固教学内容、培养分析问题和解决问题能力的目的。

本书可作为高等院校理工科各专业本科生高等数学课程的辅导教材或练习指导参考书，也可作为报考硕士研究生的复习参考书。

版权所有，盗版必究。
本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签，无标签者不得销售。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题与解析/胡新启，湛少锋编著. —北京：
清华大学出版社，2004. 2
（21 世纪计算机专业重点课程辅导丛书）
ISBN 7-302-08142-5

I. 高… II. ①胡… ②湛… III. 高等数学—高等学校—解题 IV.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 012996 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：夏非彼
文稿编辑：潘秀燕
封面设计：付剑飞
版式设计：科海
印 刷 者：北京市耀华印刷有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×1092　1/16　　**印张**：26.75　　**字数**：651 千字
版　　次：2004 年 3 月第 1 版　　2004 年 3 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-08142-5/TP・5886
印　　数：1～6000
定　　价：35.00 元

丛 书 序

《计算机专业教学辅导丛书——习题与解析系列》自 1999 年推出以来，一直被许多院校采用并受到普遍好评，广大师生也给我们反馈了不少中肯的改进建议。这些都是我们修订、扩充该丛书的动力之源。同时，计算机科学与技术的持续发展和不断演化，使得传统的计算机专业教学模式也随之扩充与革新。随着计算机教学教材改革不断深化，如何促进学生将理论用于实践，提高分析与动手能力，以及通过实践加深对理论的理解程度，都是我们 21 世纪计算机教学亟待解决的问题。正是基于这样的需求，经过对原有丛书的使用情况的深入调研，并组织专家和一线教师对自身教学经验进行认真总结提炼之后，我们重新修订了这套《21 世纪计算机专业重点课程辅导丛书》。本丛书根据计算机专业普遍采用的课程体系，在原有丛书的基础上新增了“高等数学”、“线性代数”、“概率统计”、“计算机系统结构”等专项分册，同时，依据各门课程的最新教学大纲，对原有图书内容进行了全面的修订和扩充，使其更加完备、充实。修订之后的新版丛书几乎囊括了计算机专业的各个科目，与现行计算机专业课程体系更加吻合。

《21 世纪计算机专业重点课程辅导丛书》包括：

- 《高等数学习题与解析》
- 《线性代数习题与解析》
- 《概率统计习题与解析》
- 《离散数学习题与解析》（第 2 版）
- 《C 语言习题与解析》（第 2 版）
- 《C++语言习题与解析》（第 2 版）
- 《数据结构习题与解析》（第 2 版）
- 《数据库原理习题与解析》（第 2 版）
- 《操作系统习题与解析》（第 2 版）
- 《编译原理习题与解析》（第 2 版）
- 《计算机网络习题与解析》（第 2 版）
- 《计算机组成原理习题与解析》（第 2 版）
- 《计算机系统结构习题与解析》
- 《汇编语言习题与解析》
- 《软件工程习题与解析》

本套丛书除保留原有丛书的体例风格外，还强化了如下特点：

☑ 以典型题目分析带动能力培养

本丛书注重以典型题目的分析为突破口，点拨解题思路，强化各知识点的灵活运用，启发解题灵感。所有例题不仅给出了参考答案，还给出了详细透彻的分析过程，便于读者在解题过程中举一反三，触类旁通，从而提高分析问题和解决问题的能力。

☑ 全面复习，形成知识体系

本丛书以权威教材为依托，对各知识点进行了全面、深入的剖析和提炼，构成了一个完备的知识体系。往往在各类考试中，一个微小的知识漏洞，就可能造成无法弥补的损失，因此复习必须全面扎实。

☑ 把握知识间的内在联系，拓展创新思维

把握知识点之间的关系，这样，掌握的知识就能变“活”。本丛书通过对知识点的分解，找出贯穿于各知识之间的内在联系，并配上相关的例题，阐明如何利用这些内在联系解决问题，从而做到不仅授人以“鱼”，更注重授人以“渔”。

本套丛书由长期坚持在教学第一线的教授和副教授编写，他（她）们结合自己的教学经验和见解，把多年的教学实践成果无私奉献给读者，希望能够提高学生素质、培养学生的综合分析能力。

如果说科学技术的飞速发展是 21 世纪的一个重要特征的话，那么，教学改革将是 21 世纪教育工作不变的主题，也是需要我们不断探索的课题。要紧跟教学改革，不断更新，真正满足新形势下的教学需求，还需要我们不断地努力实践和完善。本套教材虽然经过细致的编写与校订，仍然难免有疏漏和不足之处，需要不断地补充、修订和完善。我们热情欢迎使用本套丛书的教师、学生和读者朋友提出宝贵意见和建议，使之更臻成熟。

本丛书出版者的电子邮件：info@khp.com.cn

2004 年元月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　言

高等数学是高等院校工科类各专业的最重要的基础理论课之一，学生对它掌握的好坏，不仅直接影响到后续课程的学习，而且对今后的工作都将产生重要的影响。通过本课程的教学，应使学生理解高等数学的基本概念，掌握基本理论和方法，提高学生的运算技能和抽象思维、逻辑推理、综合运用等能力。

本书根据高等数学课程教学大纲的基本要求，内容上分为 11 章：第 1 章极限与连续，第 2 章导数与微分，第 3 章中值定理与导数应用，第 4 章不定积分，第 5 章定积分及其应用，第 6 章空间解析几何，第 7 章多元函数微分学，第 8 章重积分，第 9 章曲线积分与曲面积分，第 10 章级数，第 11 章常微分方程。

书中每一章均分为基本知识点和例题分析两部分。基本知识点部分对每章的知识点进行详细的归纳总结，注重各章节前后的融会贯通，以便读者对该章节内容的复习与归纳。例题分析部分则列举了相关知识点的大量的、较为全面的例题和题型，以基本概念、基本理论、基本方法为重点，难度由浅入深，有较简单的基本知识点，也有较难的考研模拟题，并精选了大量的考研真题作解题分析，对典型例题从多侧面、多角度，用多种解法进行讲解，注重对基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养。

本书融入作者多年的教学实践与经验，初稿曾多次在工科专业的学生中结合教学使用，受到学生的普遍欢迎，对提高教学质量、培养学生能力，起了积极作用。

本书可作为高等院校工科、理科各专业本科生高等数学课程的辅导教材或复习参考书，也可用作报考硕士研究生的复习参考书。

作者在编写本书时，参考了众多的教材、教学资料和考研试卷，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在这里向有关人员表示衷心感谢。

由于习题较多，解答上可能存在不准确或不完美之处，敬请读者与同仁不吝指教。读者若有意见或问题，请与作者联系，联系方式：huxinqifox@163.com

作　者

2003 年 11 月

目　　录

第 1 章　极限与连续

本章学习要点：

☑ 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用题中的函数关系式。

☑ 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。

☑ 理解复合函数、分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

☑ 掌握基本初等函数的性质及其图形。

☑ 理解极限的概念（对极限的 $\varepsilon - N, \varepsilon - \delta$ 定义中给出的 ε 求 N 或 δ 不作过高要求），理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系。

☑ 掌握极限的性质及四则运算法则。

☑ 掌握极限存在的两个准则（夹逼准则和单调有界准则），并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限（$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$）求极限的方法。

☑ 理解无穷小、无穷大以及无穷小阶的概念，掌握无穷小的比较方法，会利用等价无穷小代换求极限。

☑ 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），了解间断点的概念，并会判别函数间断点的类型。

☑ 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

1.1　基本知识点

函数、极限、连续等基本概念及运算，是学习高等数学的基础。也是从初等数学过渡到高等数学的一座桥梁，函数、极限、连续等基本概念及其运算掌握得好坏，直接影响到整个高等数学课程的学习，因此必须把这部分的概念理解清楚，基本运算牢牢掌握。

1.1.1　一元函数的概念与性质

函数是高等数学研究的中心概念和主要对象，它贯穿于整个高等数学之中，高等数学的主要任务就是讨论各类函数的性质。

1. 函数的概念

函数　设 x 与 y 是两个变量，$D\subseteq R$，如果对于 $x\in D$，变量 y 就按照一定的对应法则

f，总存在惟一确定的值与之对应，则称 y 为 x 的一元函数（简称为函数），记作 $y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量。自变量的取值范围 D 称为函数的定义域，记为 $D(f)=D$，D 中所有元素对应的 y 值所构成的集合称为函数的值域，记为 $f(D)$，即 $f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$，而集合 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像（图形）。在几何上一元函数的图形表示的是 xOy 面上的一条曲线。

复合函数 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in D(f)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，$x\in D(\varphi)$，且 $\varphi(D)\subseteq D(f)$，则称 y 是 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)],x\in D(\varphi)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量。

分段函数 在两个或两个以上的数集上，函数的不同部分需要不同的式子表示其对应规律，这种函数关系，称为分段函数。

反函数 对于函数 $y=f(x)$，如果每一个 $y\in f(D)$，都可以通过 $y=f(x)$ 惟一确定一个 $x\in D(f)$，这样得到的以 y 为自变量，x 为因变量的函数关系记作 $x=f^{-1}(y)$，习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，即反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，且 $f[f^{-1}(x)]=x$，函数 $y=f(x)$ 与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称。

隐函数 设有两个变量 x,y 构成的方程 $F(x,y)=0$，如果存在一函数 $f(x),x\in D(f)$，且满足 $F[x,f(x)]=0$，则称方程 $F(x,y)=0$ 定义了 y 为 x 的隐函数。

基本初等函数 通常把幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数、双曲函数、反双曲函数等函数称为基本初等函数。

初等函数 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算与有限次复合，且能用一个分析式表示的函数，称为初等函数。

- 初等函数
  - 代数函数
    - 有理函数
      - 有理整式函数（多项式）
      - 有理分式函数（多项式的商）
    - 无理函数（有理函数的根式）
  - 超越函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数
    - 反三角函数
    - 双曲函数
    - 反双曲函数

2. 函数的性质

单值性 根据函数的定义，在定义域内函数值是惟一的，这称为函数的单值性。

单调性 设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若 $\forall x_1,x_2\in D$，且当 $x_1\le x_2$ 时有 $f(x_1)\le f(x_2)$（或 $f(x_1)\ge f(x_2)$），则称 $y=f(x)$ 在 D 上单调增加(或单调减少)。当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $y=f(x)$ 在 D 上严格单调增加（或严格单调减少）。

有界性 设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，如果存在正数 M，使对 $\forall x\in D$ 都有不等式 $|f(x)|\le M$ 成立，则称 $y=f(x)$ 在 D 上有界，且称 $y=f(x)$ 为有界函数。特别是若存在常

数M（或m），使对$x \in D$有$f(x) \le M$（或$f(x) \ge m$），则称$y=f(x)$为上有界（或下有界）。

奇偶性 设函数$y=f(x)$在D上有定义，若$x \in D$，则$-x \in D$，且有$f(-x)=f(x)$（或$f(-x)=-f(x)$），则称$y=f(x)$是偶函数（或奇函数）。

周期性 设函数$y=f(x)$在D上有定义，若存在不为零的常数T，对于$x, x+T \in D$，有$f(x+T)=f(x)$，则称$y=f(x)$为周期函数。显然nT（$n=\pm1,\pm2,\cdots$）也是$y=f(x)$的周期，一般函数的周期指的是其最小正周期。

3. 主要结论

单调性

（1）两个单调增加（或单调减少）函数之和是单调增加（或单调减少）函数。

（2）两个正的单调增加（或单调减少）函数之积是单调增加（或单调减少）函数。

（3）$y=f(x)$（$f(x) \neq 0$）为单调增加函数的充要条件是$\dfrac{1}{f(x)}$为单调减少函数。

（4）$y=f(x)$为单调增加函数的充要条件是$-f(x)$为单调减少函数。

（5）单调增加函数（或减少函数）$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$亦为单调增加函数（或单调减少函数）。

（6）两个单调增加（或单调减少）函数之复合函数（满足复合函数的条件）亦是单调增加函数。

奇偶性

（1）两个偶（或奇）函数之代数和是偶（或奇）函数。

（2）两个偶（或奇）函数之积是偶函数。偶函数与奇函数之积是奇函数。

（3）两个偶（或奇）函数之复合是偶（或奇）函数。一奇一偶函数之复合是偶函数。

（4）函数$y=f(x)$与函数$y=\dfrac{1}{f(x)}$（$f(x) \neq 0$）有相同的奇偶性。

周期性

（1）如果$f(x)$是一周期为ω的周期函数，则$f(ax+b)(a>0)$是一周期为$\dfrac{\omega}{a}$的周期函数。

（2）如果$f_i(x)$是周期为ω_i（$i=1,2,\cdots,n$）的周期函数，则$\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$是周期为$\omega$的周期函数（其中$\omega$是$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$的最小公倍数）。

1.1.2 极限的概念与性质

1. 极限的概念

邻域定义

开区间$(a-\delta, a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta(\delta>0)\}$称为点$a$的$\delta$邻域，记为$U(a,\delta)$，$a$称为邻域中心，$\delta$称为邻域半径；而对于除点$a$以外的邻域$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$称为$a$的去心邻域，

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

记为$\overset{0}{U}(a,\delta)$。

数列收敛定义

设$\{x_n\}$为一数列，A是一常数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$收敛，且称A为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。数列$\{x_n\}$不收敛时，则称数列$\{x_n\}$发散。数列发散包含三种情形：

（1）$\forall M>0$，总$\exists$自然数N，使得$n\geq N$时恒有$x_n>M$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。

（2）$\forall M<0$，总$\exists$自然数N，使得$n\geq N$时恒有$x_n<M$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不确定。

函数收敛的定义

（1）若$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$当$x\to\infty$时收敛，且称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。特别是若$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$x>X$（或$x<-X$）时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$当$x\to+\infty$（或$x\to-\infty$）时收敛，且称$A$为函数$f(x)$当$x\to+\infty$（或$x\to-\infty$）时的极限，记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$）。函数$f(x)$不收敛时，则称函数$f(x)$发散。函数$f(x)$当$x\to\infty$时发散包括以下情形：

- $\forall M>0$，总$\exists$实数$X>0$，使得$|x|\geq X$（$x>X$）时恒有$f(x)>M$，即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$（$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$）。
- $\forall M<0$，总$\exists$实数$X>0$，使得$|x|\geq X$（$x<-X$）时恒有$f(x)<M$，即$\lim\limits_{x\to-\infty}x_n=-\infty$。
- $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不确定。

（2）设$y=f(x)$在$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$内有定义，$A$是一常数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$当$x\to x_0$时收敛，且称$A$为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。特别是若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$（或$x_0<x<x_0+\delta$）时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$当$x\to x_0^-$（或$x\to x_0^+$）时收敛，且称$A$为函数$f(x)$当$x\to x_0^-$（或$x\to x_0^+$）时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$）。而$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$）称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左（或右）极限。函数$f(x)$不收敛时，则称函数$f(x)$发散。函数$f(x)$当$x\to x_0$时发散包括以下情形：

- $\forall M>0$，总$\exists\delta>0$，使得$|x-x_0|<\delta$（$x_0-\delta<x<x_0$或$x_0<x<x_0+\delta$）时恒有$|f(x)-A|>M$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq A$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq A$）。

- $\forall M>0$，总$\exists\delta>0$，使得$|x-x_0|<\delta$（$x_0-\delta<x<x_0$或$x_0<x<x_0+\delta$）时恒有$|f(x)|>M$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$）。
- $\forall M>0$，总$\exists\delta>0$，使得$|x-x_0|<\delta$（$x_0-\delta<x<x_0$或$x_0<x<x_0+\delta$）时恒有$f(x)>M$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$）。
- $\forall M<0$，总$\exists\delta>0$，使得$|x-x_0|<\delta$（$x_0-\delta<x<x_0$或$x_0<x<x_0+\delta$）时恒有$f(x)<M$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$）。
- 当$x\to x_0$时，$f(x)$的极限不惟一。

无穷大、无穷小定义

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称$f(x)$是当$x\to\infty$或$x\to x_0$时的无穷大量。若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称$f(x)$是当$x\to\infty$或$x\to x_0$时的无穷小量。

2. 极限的性质

数列极限的性质

（1）惟一性：收敛数列的极限必惟一。

（2）有界性：收敛数列的极限必有界。

（3）保号性：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$A\neq 0$，则必存在正整数$N$，当$n>N$时，$x_n$与$A$同号。

（4）保序性：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且存在正整数$N$，当$n>N$时，恒有$x_n\le y_n$，则$A\le B$。

（5）极限的有理运算：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n=A\pm B,\quad \lim_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}y_n=AB$$

若$B\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}$。

数列极限的几个判别法

（1）柯西准则：数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是，$\forall\varepsilon>0$，总存在自然数N，对一切$n,m>N$，恒有不等式$|x_n-x_m|<\varepsilon$。

（2）夹逼法则：若数列$\{x_n\}$对一切的n满足条件$y_n\le x_n\le z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。

（3）单调有界准则：单调有界数列必有极限。

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$的充要条件是数列$\{x_n\}$的每一个子列$\{x_{n_k}\}$均以$A$为极限（即$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$）。

（5）有界实数列必有收敛的子列。

几个常用数列的极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}+\infty & x>1\\ 1 & x=1\\ 0 & |x|<1\\ \text{不确定} & x\le -1\end{cases}$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n}}=\mathrm{e}$

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$

（6） $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a(a>0)$

（7） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

（8） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$

函数极限的性质

首先指出的是函数极限同样有惟一性、有界性、保号性、保序性以及极限的有理运算。望读者自己给出。

函数极限存在的判别法（$\lim$ 表示 $x\to x_0$ 或 ∞）

（1）函数极限存在的充要条件是其左右极限存在且相等。

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \exists x_n\ne x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

（3）夹逼法则：若 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，且 $\lim g(x)=A, \lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$。

（4） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \exists\alpha,\ \lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，且 $f(x)=A+\alpha$。

（5） $\lim f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$。

有关无穷小的定理

（1）有限个无穷小量之和是无穷小量。

（2）有界量与无穷小量之积是无穷小量。

（3）常数与无穷小量之积是无穷小量。

（4）有限个无穷小量之积是无穷小量。

有关无穷小的分类

设 $\lim f(x)=0, \lim g(x)=0$。

（1）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=k(k\ne 0,k\ne\pm\infty)$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小。

（2）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小（或 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小）。记为 $f(x)=o(g(x))$。

（3）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小。记为 $f(x)\sim g(x)$。

（4）若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^k}=0$，则记为 $f(x)=o((x-a)^k)$，这时称 $f(x)$ 为 $x\to a$ 时，是比 $x-a$ 高 k 阶的无穷小。

重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

常用的等价无穷小（$x\to 0$）

（1）$\sin x\sim x$　（2）$\cos x\sim 1-\dfrac{x^2}{2}$　（3）$\tan x\sim x$

（4）$(1+x)^a-1\sim ax$　（5）$a^x\sim 1+x\ln a$　（6）$\arcsin x\sim x$

（7）$\arctan x\sim x$

3. 函数连续及其性质

连续与间断

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一点邻域内有定义，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。即当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 时，称函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续，并称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点。

$f(x)$ 在 x_0 点处连续的充要条件是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$。

而 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$）称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点处左（或右）连续。

函数不连续的点称为间断点。间断点有以下情形：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但此极限值不等于 $f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在 x_0 处没定义，则称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点。

（2）$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，但不相等，则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

（1）、（2）统称为第一类间断点。

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to x_0^-)\\(x\to x_0^+)}}f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点。

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，且在 x_0 的邻域内，$f(x)$ 能无数次取 A、B 两个数之间的一切值，则称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点。

（3）、（4）统称为第二类间断点。

闭区间上连续函数的性质

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续；若 $f(x)$ 不仅在 (a,b) 内连续，而且在 a 点右连续，b 点左连续，则称其在闭区间 $[a,b]$ 上连续。闭区间上的连续函数有以下性质：

（1）闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数必有最大最小值。

（2）闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数必有界。

（3）若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且有 $f(a)<f(b)$，对于 $f(a)<c<f(b)$ 的任意实数，必存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=c$（闭区间上连续的函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值）。

（4）若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

连续函数的性质

（1）如果 $f(x),g(x)$ 在 x_0 点连续，则 $f(x)\pm g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在 x_0 点连续。

（2）如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续，$g(u)$ 在 $u_0=f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 处连续。

（3）若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 严格单调且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 $[f(a),f(b)]$（或 $[f(b),f(a)]$）上连续。

（4）初等函数在其定义域上是连续的。

1.2 例题分析

1.2.1 选择题

【例 1.1】 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列结论正确的是______。

A. 若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　B. 若 x_n 无界，则 y_n 必无界

C. 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　D. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

解 应选 D。因为 x_ny_n 是无穷小量，若 $\dfrac{1}{x_n}$ 是无穷小，则 $y_n=\dfrac{1}{x_n}x_ny_n$ 即 y_n 为两个无穷小量之积为无穷小量。

【例 1.2】 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有______。

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在

解　应选 D。可用反证法证明之，若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 存在，又 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ 存在，由极限的四则运算可知 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n c_n}{b_n}$ 存在，与题设矛盾，故 D 正确。

【例 1.3】　设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n} & 若n为奇数 \\ \dfrac{1}{n} & 若n为偶数 \end{cases}$，则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是______。

A. 无穷大量　　B. 无穷小量　　C. 有界变量　　D. 无界变量

解　应选 D。由题设可知，

$$x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2+\sqrt{2n-1}}{2n-1} = +\infty\ ,\quad x_{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$$

所以 x_n 是无界变量。

【例 1.4】　函数 $f(x) = x\sin x$______。

A. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界　　B. 当 $x\to\infty$ 时为无穷大

C. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界　　D. 当 $x\to\infty$ 时有有限极限

解　应选 C。这是因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 的极限不存在，也不是无穷大，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & 当x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 当x = 2n\pi \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界。

【例 1.5】　$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} =$______。

A. 2　　B. 0　　C. ∞　　D. 不存在但不是 ∞

解　应选 D。因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} x e^{\frac{1}{x-1}} + \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$，$\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com