初等数论

周显编著

华中师范学院数学系

目　录

第一章　整数的可约性

§1　整除，带余除法

定义1　设 a, $d(d\neq 0)$是整数，若存在 g 使 $a=gd$ 则称 d 整除 a，记为 d/a，否则记为 $d\nmid a$，当 d/a 时称 d 为a之约数，a 为 d 之倍数。

关于整除有以下性质，作为已知不另作证明，下列各式中，a,b,c……都是整数，且 $a\neq 0$。

1-(Ⅰ) 若 a/b则 $-a/b$，$a/-b$，$-a/-b$，$|a|/|b|$.

1-(Ⅱ) 若 a/b，$b/c\,(b\neq 0)$，则 a/c.

1-(Ⅲ) 若 a/b，$b\neq 0$则 $|a|\leqslant|b|$.

1-(Ⅳ) 若 a/b 则 a/bx，x 为任意整数.

1-(Ⅴ) 若 a/b，$c\neq 0$，则 ac/bc.

1-(Ⅵ)± 1可整除任何整数，其他整数，均无此性质。

证　设 a 是任何整数，$a=1\times a=-1(-a)$，即$\pm 1/a$. 若 $|a|>1$，则据性质1-(iii)，a不是1之约数，故除± 1以外，别无其它整数能整除任意整数。

1-(Ⅶ)　0可被任何整数整除，其它整数无此性质。

证　$0=a\times 0$，a 是任意整数，即 0 被任意整数整除，另外 $a\neq 0$，则 a 不能被 $|a|+1$ 整除，故 $a\neq 0$ 时，无 0 之性质。

1-(Ⅷ) $n>1$ 为自然数

若d/a_1，d/a_2，……，d/a_n　$d\neq 0$

则　$d/(\pm a_1\pm a_2\cdots\cdots\pm a_n)$

1-(Ⅸ)若$a_1, a_2, \cdots a_n$中$d \nmid a_n$, d/a_i, (i由$1 \to n-1$)

则$d \nmid (\pm a_1 \pm a_2 \cdots \pm a_n)$

注意，不能说$a_1, a_2, \cdots, a_n$中有两个或两个以上的不是d的倍数则其代数和就不是d的倍数。例如，$6 \nmid 5$，$6 \nmid 13$，但$6/(5+13)$

1-(Ⅹ) n，m都是自然数

$a_1, a_2, \cdots a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n$都是整数。

若$a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$共$m+n$项中有$m+n-1$项都是$d$的倍数，，则其余之一项亦为$d$之倍数。

1-(Ⅺ)若$a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$内有一项不是$d$的倍数，则最少还有一项也不是$d$的倍数。

证 不防设$d \nmid a_1$，若其余$(m+n-1)$项都能整除d，则由性质1-(Ⅹ)d/a_1，这是矛盾，故其余$(m+n-1)$项不能被d整除。

定理1 若a，b是两个整数，$b \neq 0$则必有且仅有两个整数q、r，使$a=qb+r$，$0 \leqslant r < |b|$。

定理1是整除性理论的重要定理，称为带余除法，其中q称为不完全商或简称商，r称为a被b除的余数，现对定理1证明如下：

证 若$b>0$，则b的倍数按大小排列是

$$\cdots\cdots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \cdots\cdots \quad (1)$$

若$b<0$，则b的倍数按大小排列是

$$\cdots\cdots, 3b, 2b, b, 0, -b, -2b, -3b, \cdots\cdots \quad (2)$$

故a除以b，无论如何只有两种可能。

Ⅰ. a等于上列(1)、(2)中的一个b的倍数qb，故$r=0$

Ⅱ. a介于qb与$(q+1)b$之间，此时

$$a=qb+r \qquad 0<r<|b| \quad (3)$$

这样的 q，r 是唯一的。若除 q,r，还有一对 q_1，r_1 也有

$$a=q_1b+r_1 \qquad 0\leqslant r_1<|b| \tag{4}$$

将(3)－(4)得 $0=b(q-q_1)+(r-r_1)$

据性质1－(X) $b/0$，$b/b(q-q_1)$，故 $b/(r-r_1)$.

据性质1－(I) $|b|/|r-r_1|$。但 $|r-r_1|<|b|$，绝对值小于 $|b|$ 而能被 $|b|$ 整除的只有0，故 $r-r_1=0$，即 $r_1=r$；从而 $q-q_1=0$，$\therefore q=q_1$ 证毕

习　题　一

1．若 x 是自然数，求证 $\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}$ 是自然数。

2．n 为正整数，求证 $2^{4n+2}+1$ 可为异于本身及1的整数整除。

3．求证，四个连续整数之积加1，为完全平方数。

4．若 ax_0+by_0 是形如 $ax+by$ 的数中的最小整数(x,y 是任意整数，a、b 是不全为0的整数)，求证

$$(ax_0+by_0)/(ax+by)$$

5．a,b 是任一整数，$b\neq 0$ 证明存在两个整数 s、t，使得 $a=bs+t$，$t\leqslant\frac{|b|}{2}$ 成立。且 b 是奇数时，s、t 唯一存在，当 b 为偶数时，结果如何？

6．证明：

(1) $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$(n>1)$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$ 都不是整数。

7．设 $m>n\geqslant 1$，$a_1<a_2<\cdots<a_s$ 是不超过 m 且与 n 互素的全部正整数，记 $S_m^n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_s}$．则 S_m^n 不是整数。

§2 质数 质约数

定义 2 若$a>1$，只有1和a这两个正约数，则称a为质数；否则，称为合数。

如：2,3,5,7,11都只有一和本身是它的约数，故都是质数。

而：4,6,8,9,10等都是合数

由质数与合数的定义可知，全体正整数可分为三类

1．1是一类

2．全体质数

3．全体合数。合数是无穷多的，如$n\geqslant 2$,2^n都是合数。

定义 3 若一数a的一个约数是质数，则此约数称为a的质约数。

定理 2 若$a>1$，则a的大于1的最小约数是质数。定理2的另一含义是：任何大于1的整数必有一质约数。

证 1．若a是质数，a既是a的最大质约数，也是a的最小质约数，这时定理2得证。

2．若a是合数，a除1，及本身外，另有约数，设d为其约数中的最小的，则d不能是合数。

否则，d是合数，则d必有大于1，小于d之约数q，q/d，d/a，$\therefore q/a$，这与上述假设矛盾，故d不是合数，即d是质数，即a有一质约数。

定理 3 若$a>1$，而所有$\leqslant\sqrt{a}$(不超过$\sqrt{a}$)的数都不能整除a，则a是质数。

证 若a大于1，而不超过$\sqrt{a}$的所有质数都不能整除

c，则 a 为质数，因为若 a 是合数

$$a=b\cdot c \tag{5}$$

据题设条件和定理 2，$b>\sqrt{a}$，$c>\sqrt{a}$，那么

$$b\cdot c>\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a \tag{6}$$

比较(5)、(6)得出矛盾，故在所设条件下 a 是质数。

由定理 3 告诉我们

1. a 是合数，它有最小质约数 p，则 $1<p\leqslant\sqrt{a}$，即 a的最小质约数之寻求有范围是$(1,\sqrt{a}]$

2. 任何整数 $a>1$，有$1<p\leqslant\sqrt{a}$(p表示$\leqslant\sqrt{a}$的所有质数)，$p\nmid a$，则a是质数。这是断定a为质数的一个重要方法。

定理4 有无穷多个质数(质数的个数无穷)。

证 若质数只有有限个设为共 n 个，并令为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，

若使 $$a=p_1\cdot p_2\cdots p_n+1 \tag{7}$$

由(7) 知，$p_1\nmid a$，$p_2\nmid a,\cdots$，$p_n\nmid a$，按定理 2，a 必有一质约数p，故在 p_1，p_2，$\cdots$，p_n 以外，总有质数 p，这和假设矛盾。故质数个数无穷。

定理5 设 $f(x)$ 为任一整系数多项式，则在数列

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots\cdots$$

中包含有无穷个不同的质约数。

证 令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$n\geqslant1$

若 $a_n=0$，则 $f(1)$，$f(2)\cdots\cdots$包含所有的质数为约数。即定理5得证。今令 $a_n\neq0$，若该数列中仅有有限个质约数 p_1，p_2，$\cdots$，p_ν，$x=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\cdots\cdot p_\nu\cdot a_ny$，$y$ 为整数

代入多项式 $f(x)$ 中，则 $f(p_1\cdot p_2\cdot\cdots p_\nu\cdot a_ny)$式中所有系

数皆为 a_n 之倍数，故

$$f(p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_V a_n y)=a_n g(y)$$

经整理

$$g(y)=1+A_1y+A_2y^2+\cdots+A_ny^n$$

是整系数多项式，且p_1，p_2，…，p_V，整除 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若有 y_0 使$g(y_0)\neq\pm1$，即

$$1\neq 1+A_1y_0+A_2y_0^2+\cdots+A_ny_0^n$$

且 $$-1\neq 1+A_1y_0+A_2y_0^2+\cdots+A_ny_0^n$$

则

$$g(y_0)=1+A_1y_0+A_2y_0^2+\cdots\cdots+A_ny_0^n$$

不能为 p_1，p_2，…，p_V 所整除，据定理 2，$g(y_0)$ 必有一质约数 p_k，$p_k>p_i$ （i 由 $1\to V$）。

此即表明，y_0 使$f(y_0)\neq\pm1$时，$f(1)$，$f(2)$……的质约数无穷，另：使$g(y_0)=\pm1$，y_0(整数)只有有限个。

即 $1=1+A_1y+\cdots\cdots+A_ny^n$ 成立的 y_0 最多 n 个

使 $-1=1+A_1y+\cdots\cdots+A_ny^n$ 成立的 y_0 最多 n 个，共 $2n$ 个，即有限个，故定理恆可成立。

定理 6 （用尤拉法证明定理 4）

关于定理 4，尤拉有另一证法，此证法开辟了解析数论之门径，应于重视，现在证明如下：

设 p 是任意质数，因 $p\geqslant2$，故 $0\leqslant1/p<1$

而且

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^m}+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^m}\quad(8)$$

等式 (8) 的右边是递减无穷等比级数的和，首项为 1，公比$=\frac{1}{p}$，故(8)为正项收敛级数。

在数学分析的级数部分里，我们已知，若

$S_1=u_1+u_2+\cdots$　$S_2=v_1+v_2+\cdots$，$\cdots S_k=\overline{w}_1+\overline{w}_2+\cdots$

是绝对收敛的有限个级数(特别是有限个正项收敛级数)，将 S_1，S_2，$\cdots S_k$中的项构成一切可能的形如

$$u_i v_j \cdots \overline{w}_l,\ (i,\ j,\ \cdots,\ l=1,2,\cdots$$

的积，次序可以任意安排，这样所得的新级数也是一个收敛级数，且其总和等于 $S_1 \cdot S_2 \cdots S_k$．(级数乘法定理)

现在取 $N>2$ 是一正数，于是形如(8)的级数，应用乘法定理，可得

$$\prod_{p\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^m}\right)$$

$p\leqslant N$中的 p 为一切不超过 N 的质数。

$$\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^m}\right)$$

表示积中因式(无穷级数)的个数为不超过N的质数p的个数，将 $\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_m}\right)$乘起来时，据级数乘法定理，将得到形如

$$\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}}\text{的各项}$$

$p_1=2$，$p_2=3$，$\cdots$，$p_k\leqslant N$ 都是质数。

α_1、α_2、$\cdots$、α_k为任意非负整数，因此，积中包括$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}$等等项。故

$$\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^m}\right)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}+K \qquad (9)$$

(9)中K 表示其余各项之总和。

故有　$$\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^m}\right)>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

[(9)式中去掉余项]

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$为调和级数，当$M$充分大时，可使(10)式右边成为任意大之正数。

故N充分大时，

$$\prod_{p\leqslant N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

便可以使之成为任意大之正数。

若$N\to\infty$时，而质数p_1，p_2，……，p_k个数有限

$$\prod_{p\leqslant N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$$

为有限数，与上述N充分大时

$$\prod_{p\leqslant N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

能成为任意大之正数是矛盾的，故$N\to\infty$时，质数的个数是无穷的。

要选出不超过已知数N的质数表最先用的是厄拉多塞(*Eratosthenes*)的筛法，方法是写出数列

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N \qquad (11)$$

在这个数列里第一个大于1的是2，它只被1及它自己整除，故2是质数，保留2。在2之后划去2的一切倍数(这些都是合数)。

在数列(11)中2之后为3，3也是质数，应保留。在3之后划去3的一切倍数。

在数列(11)中3之后的质数为5，应保留。在5之后同样划去5的一切倍数。

如此继续进行。

当用上述方法划去小于 p 的质数的一切合数倍数时，所有小于 p^2 的未划去的数目就都是质数了。

事实上，小于 p^2 每一个合数 a 由于它的最小约数 $\leqslant\sqrt{a}<p$，已被划去了，由此可推出：

1．要划去质数 p 的倍数，可从 p^2 开始划。

2．要选出质数 $\leqslant N$ 的表，只要对不超过 $\sqrt{N}$ 的质数划去它们的合数倍数就成了。

关于质数函数 $\pi(x)$ 我们将在下章数论函数中讨论。

在这里所介绍的筛法是最原始的筛法，它在研究质数的分布上起了一定的作用。

习　题　二

1．若 a^s+1 是质数，$a>1$，s 是正整数，求证 $s=2^k$，$(k\geqslant 0)$ 且 a 是偶数。

2．a 是什么数时，$a, a+4, a+14$ 是质数？

3．证明：

(i) $4n-1$　　$(n\geqslant 0)$ 形的质数无穷；

(ii) $6n-1$　　$(n\geqslant 0)$ 形的质数无穷。

4．设 $(a,b)=1$，$m>0$，则数列 $\{a+bK\}$　$K=0,1,2\cdots\cdots$ 中存在无限多个数与 m 互素。

§3　公约数，最大公约数，公倍数，最小公倍数

定义4　$n\geqslant 2$ 是整数，若整数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 不全为 0

d/a_1，$d/a_2\cdots\cdots d/a_n$

则称 d 为a_1，a_2，……a_n 的公约数，公约数中最大数称为最大公约数，简称为大公约。

若 d 是a_1，a_2，……a_n 中最大的公约数，则记为

$$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = d,$$

定义4′ 若 a_1，a_2，……，a_n 的大公约是 1，记为

$$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = 1$$

则称 $a_1, \cdots, a_n$ 为互质的数，简称为它们互质。互质的数，个数多于 2 时，不一定是两两互质。

例如，$(6, 10, 15) = 1$，而 $(6, 10) = 2$，$(6, 15) = 3$，$(10, 5) = 5$。

定义5 若 a_1，a_2，……，a_n 中任意两数的大公约都是 1，则称为它们是两两互质。

关于两个整数 a，b 的公约数，有以下重要定理和推论作为已知（由读者自己证明）。

定理7 若 $b \neq 0$，b 是 a 的约数，则 $(a, b) = b$

定理8 若 $b \neq 0$，$a = bq + c$，则 $(a, b) = (b, c)$

定理9 用辗转相除法，求大公约的定理，

即

$$a = qb + r$$

$$b = rq_1 + r_1$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$r_{k-2} = r_{k-1}\, q_k + r_k$$

$$r_{k-1} = r_k \cdot q_{k+1}$$

则

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2)$$

$$= \cdots\cdots = (r_{k-2}, r_{k-1})$$

$$= (r_{k-1}, r_k) = r_k$$

即

$$(a, b) = r_k$$

推论1 若 $(a, b)=d$ 必有整数 m, n 使 $ma+nb=d$

推论2 $(a, b)=1$ 的充要条件是存在整数 x, y 使 $ax+by=1$

定义6 $n\geqslant 2$ 的整数，若 a_1/m，$a_2/m\cdots\cdots,a_n/m$，则 m 称为 $a_1, a_2,\cdots,a_n$ 的公倍数，任意 n 个整数，恆有公倍数 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$ 若 a_1，a_2，……，a_n 都不是 0，它们的公倍数无穷多。若 b 是公倍数，则无论 k 为何数，kb 仍为公倍数，公倍数中的最小数称为最小公倍数；若 m 是 a_1，a_2，……，a_m 的最小公倍数，则记为

$$\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}=m$$

在讨论最小公倍数时，必须假定 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 无一为 0，因任何整数都不是 0 之倍数。

定理10 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数是一切公倍数的约数。

证 若 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=m$，而 m_1 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的任意公倍数，若 $m\nmid m_1$，按带余除法，$m_1=mq+r$，$0\leq r<m$ 而 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都能整除 m_1，m。按§ 1，性质 1-（X）

$\therefore$ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都能整除 r，故 r 为 $a_1, a_2, \cdots, a$ 的公倍数，与 m 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数矛盾。

故

$$m/m_1$$

定理11 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的大公约是其全体约数的小公倍，大公约的全体约数是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的全体约数。

证 设 $d_1, d_2, d_3\cdots$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的全体约数。

设 $d=\{d_1, d_2, d_3\cdots\}$，则 $a_1, a_2, \cdots a_n, d$ 是 d_1, d_2, d_3

……，的公倍数，按定理10：d/a_1，d/a_2，… d/a_n 则 d 是 a_1，a_2，…，a_n 的公约数，故 d 是 d_1，d_2，d_3…，中之一个，且又是它们的小公倍，即 d 是 d_1，d_2，d_3…，中之最大者，按定义 d 是 a_1，a_2，…，a_n 的大公约，从而得结论：a_1，a_2，…，a_n 的大公约 d 是 a_1，a_2，…，a_n 全体约数的小公倍。

以上已经证明 a_1，a_2…，a_n 的大公约 d 是 a_1，a_2，…，a_n 全体约数的小公倍，故 d 含有，且仅含有 a_1，a_2…，a_n 的全体约数。

定理12 a_1，a_2，…a_n 是 n 个整数，有

$(a_1, a_2) = d_2$，$(d_2, a_3) = d_3$，… $(d_{n-1}, a_n) = d_n$(*)

求证 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = d_n$

证 由(※)，d_n/a_n，d_n/d_{n-1}，但 d_{n-1}/a_{n-1}，d_{n-1}/d_{n-2}，故得 d_n/a_{n-1}，d_n/d_{n-2} 依次类推可得 d_n/a_n，d_n/a_{n-1}，…，d_n/a_1 即 d_n 是 a_1，a_2，…，a_n 的公约数，又设 d 是 a_1，a_2，…，a_n 的任一公约数：d/a_1，d/a_2，据定理11，a_1，a_2 与 d_2 有相同的约数，

$\therefore$ d/d_2。

同理（据定理11），d/d_2，d/a_3，d_2、a_3 与 d_3 有相同的约数，$\therefore d/d_3$。依次类推可得 d/d_n，$\therefore d \leq d_n$，按定义，d_n 是 a_1，a_2，…，a_n 的最大公约数，证毕。

以下定理都很重要，均作为已知，留给读者自行证明。

定理13 $n \geqslant 2$，若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = d$

则必有 k_1，k_2，…k_n。使 $d = k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n$

定理14 a_1、a_2、…、a_n 两两互质

则 $\{a_1, a_2 \cdots a_n\} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$

定理15 若 $a \geqslant 2$，$a/a_1a_2\cdots a_n$

而 $(a, a_1) = (a, a_2) = (a, a_3) = \cdots = (a, a_{n-1}) = 1$

则 a/a_n

推论 $(a, b)=1$, a/c, b/c, 则$a\cdot b/c$。

定理16 若 $(a, b)=1$, 则 $(a, bc)=(a, c)$

定理17 $(a, b_1)=(a, b_2)=\cdots=(a, b_n)=1$

则 $(a, b_1\cdots b_n)=1$

定理18 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中任一整数和 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 中的任一整数互质。

则 $(a_1\cdot a_2\cdots a_n, b_1\cdot b_2\cdots b_n)=1$

定理19 若 p 为质数,对任意整数 a,或 p/a, 或 $(p, a)=1$。

定理20 若 p 是质数, $p/a_1\cdot a_2\cdots a_n$, 至少有一 a_i 被 p 整除, 即 p/a_i。$1\leq i\leq n$

论推 $p/p_1\cdot p_2\cdots p_n$

p_1, p_2, p_n 均为质数, 则 p 至少等于其中一个质数, 即存在 v 使 $p=p_v$, $(1\leq v\leq n)$

现在我们证明

定理21 a, b 是任意两个整数, $(a, b)=d$, $\{a, b\}=m$。

求证:

$$m=\frac{ab}{d} \quad 或 \quad d=\frac{ab}{m}$$

证 设 m' 是 a, b 的任一公倍数。

则 $$m'=ak=bk' \tag{12}$$

$$a=a_1\cdot d,\ b=b_1 d,\ (a_1, b_1)=1$$

$\because$ $ak=bk'$ 故有 $a_1k=b_1k'$

据定理15 b_1/k

令 $$k=b_1t \tag{13}$$

将 (13) 代入 (12)

$$m' = ak = ab_1 t = \frac{ab \cdot d}{d} \cdot t = \frac{ab}{d} \cdot t \qquad (14)$$

(14) 表示 a，b 的一切公倍数，当 $t=1$ 时为最小。

故

$$\{a, b\} = \frac{ab}{d}$$

即

$$m = \frac{a \cdot b}{d} \quad 或 \quad d = \frac{a \cdot b}{m} \qquad 证毕$$

定理22 a_1，a_2，…，a_n 是 n 个非 0 的正数，且有

$\{a_1, a_2\} = m_2, \{m_2, a_3\} = m_3, \cdots, \{m_{n-1}, a_n\} = m_n$ (※)$_2$

求证 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = m_n$

证 由 (※)$_2$ m_i / m_{i+1}，i 由 $2 \to n-1$

a_1 / m_2，a_i / m_i，i 由 $2 \to n$

故 m_n 是 a_1，$a_2 \cdots a_n$ 的公倍数。

又设 m 是 a_1，a_2、…、a_n 的任一公倍数。

当然 a_1 / m，a_2 / m

据定理 10：$\{a_1, a_2\} = m_2$，$\therefore m_2 / m$。

同理有 m_2 / m 和 a_3 / m

据定理 10：$\{m_2, a_3\} = m_3$，$\therefore m_3 / m$

依次类推，可得 m_n / m，故 $m_n \leqslant m$

按定义 $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\} = m_n$

习　题　三

1. p, q 为双生质数（相差是 2 的质数）

求证 $p^q + q^p$ 与 $p^p + q^q$ 有公因式 $p+q$