高等学校试用教材

初等几何研究

朱德祥 编

高等教育出版社

本书是编者以历年使用的自编讲义为基础改编的. 改编时，参照了师专初等数学研究课程大纲(几何部分)，并充分考虑了师范本科初等几何选课的需要.

全书分四章. 前三章是平面几何，第四章是立体几何. 本书开头，系统讲述证题通法，把证题术渗透到具体实例中. 本书注重联系中学数学教学实际，对中学几何课教材的薄弱环节，或讲的不深透，或学生较生疏处，加以分析研究、补充提高.

本书可作师院数学系，师专数学科，教育学院学生的试用教材及中学数学教师的自修用书.

高等学校试用教材

初等几何研究

朱德祥 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.75 字数 209,000

1985年2月第1版 1987年2月第3次印刷

印数 41,201—62,070

书号 13010·01012 定价 1.55 元

前　言

本书是以昆明师院数学系《初等几何复习及研究》讲义为基础编写的. 1982 年接受任务，对原讲义加以增、删、改，作为师院和师专初等几何研究的试用教材. 1983 年九月在昆明开审稿会，北京师大丁尔升、钟善基同志，华东师大余元希、田万海同志，陕西师大朱恩宽同志，芜湖师专吴雪庐同志，南通师专高笃生同志，泰安师专周诚询同志，昆明师专李世泽同志，昆明师院徐绍珍、李忠映同志等提了许多宝贵意见，又进行了改写. 兼顾师院和师专，但愿不致顾此失彼.

在编写过程中，无意系统地复习中学教材，但进行本课程教学时，无疑要有一点复习回忆的工作，教学才能顺利进行. 希望本书在培养对几何问题的观察、分析、综合、推究的能力，通用方法的掌握，熟练技巧的养成等方面，能作出贡献. 几何课在中学数学教学中的地位与作用，是不容低估的. 使用本教材的经验表明，读者对它是有兴趣的，积极主动的. 能独立思考，便能学得生动活泼，有助于智力开发.

审稿会上，大家认为，高师的数学课程中，初等数学课程直接关系到中学数学教学质量，应该受到足够的重视.

师专的《初等数学研究与教学法大纲》，规定有小平板测量、解三角形和制图基本知识的内容. 解三角形，指正弦定律和余弦定律的应用，这里割爱了. 制图和测量是实践性很强的课程，如果不是走过场，得要多占一点时间. 审稿会上，多数人倾向由各校写点小册子，重在指导实践.

本书分四章. 前三章讲平面几何,第四章讲立体几何. 书的开头部分,系统讲述证题通法,把证题术渗透到各具体实例中,将中学几何课讲得不深透或学生较生疏之处加以分析研究,补充提高.

轨迹和作图是中学数学教材的薄弱环节,但轨迹和作图最能加强学生分析和全面观察问题的能力,并加深对几何各部分的理解,因之有必要系统讲述,而且所占篇幅并不多. 结合解作图题常用的方法,本书还适当介绍了位似及图形的变换.

本书着重联系实际,着重作为一个中学数学教师所必需具备的基础理论和基本训练及技巧. 讲正面题材的同时,注意提防发生错误、片面性和一些容易疏忽之处.

我国地广人众,历史遗留的不平衡一时难以消灭.各地区各学校间差别还是相当大的. 一刀切的思想是行不通的. 编者热忱希望任课教师实事求是地对教材作适当的增删和变动.

使用过原讲义的许多学校和教师给我们提供了不少宝贵的意见和帮助,对他们以及关心本书出版的同志,一并致谢. 限于本人水平,疏漏错误之处必多,敬希读者见教,以便更正提高.

朱德祥

1984,2. 昆明师院.

目　录

第一章　证题法·初等几何变换·度量与计算

I. 证题法与证题术

§1.1　引　　言

数学是研究空间形式和数量关系的学科. 在初等几何课程里,这两方面的内容特别明显.

初等数学研究,在师专数学科是必修课,在高师数学系是选修课. 高师要不要设初等数学课程,意见从来就不统一. 1954年中华人民共和国教育部颁布的高师数学系教学计划,是中国有史以来的第一个国家规定的计划,其中对初等数学的要求是"熟练精通"四个字,值得深思.

初等几何研究的对象是多方面的. 如中学缺陷的补充,教材内容的融会贯通,独立工作能力的养成,克服学习中困难的刚毅精神的培养等等. 通过这课程的学习,对初等几何,要有概括而联贯的知识,获得观察、分析、综合、推究的能力,掌握通用方法,具备足够的熟练技巧,并能愉快胜任中学几何教学,从中发现问题、解决问题,便中得到锻炼、提高.

对于最后一点,这里举例说明. 例如,把圆的切线定义为与圆只有一个交点的直线就不恰当,因这样定义不利于推广到一般二次曲线. 圆是二次曲线,抛物线也是. 与抛物线主轴平行的任一直线,总是与抛物线交于一点,难道这些都是切线吗?一条也不是!圆的切线是与圆相交于两个相重合的点的直线.

再举一例. 现行中学数学教科书,利用与欧几里得第五公设

等价的平行公理，证明了"三角形的内角和是180°"，然后推出外角定理："三角形的每个外角大于跟它不相邻的内角"。

凡必须利用平行公理证明的命题，称为欧氏几何命题．不须利用这公理证的，称为绝对几何命题．例如，三角形两边之和大于第三边，等腰三角形两底角相等，都是绝对几何命题．

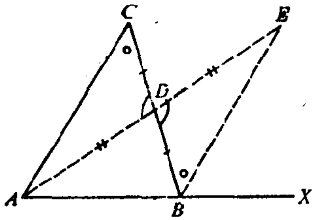


图 1.1

这样，可能认为三角形外角定理是欧氏几何命题．其实不然．例如，要证 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBX>\angle C$（图1.1），可将中线 AD 延长一倍至 E，连 BE，则 BE 在 $\angle CBX$ 内部，从而 $\angle CBE<\angle CBX$．由于 $\triangle ACD$ 与 $\triangle EBD$ 有两边及其夹角对应相等，所以

$$\triangle ACD\cong\triangle EBD,$$

从而有

$$\angle C=\angle DBE=\angle CBE<\angle CBX.$$

仿此可证 $\angle A<\angle CBX$.

可见外角定理是绝对几何命题．它不仅在欧氏几何正确，在罗巴切夫斯基几何也正确①．

这一类涉及到几何学本质的问题，在几何基础这个科目里讨论．各种几何学有各自的公理系统．关于欧氏几何的公理系统，十三院校协编组编的《中学数学教材教法分论》（高等教育出版社出版）中有，在编者写的《高等几何》第九章里也有，这里不重复了．本书的论述以中学几何为基础，在结构上没有两样，有些观点有所不同．

① 在罗氏几何，三角形三内角之和小于180°，外角定理必然成立．参考朱德祥编《高等几何》（高等教育出版社 1983 年版）第九章 § 9.7.2 定理 4.

§1.2 关于数学证明

数学这门研究现实世界空间形式和数量关系的学科，是古往今来人们认识自然、改造自然、利用大自然的最重要的工具之一。它源出于实际，在实践中丰富，发展，完善，所以能应用于诸多实践。数学证明了的命题，还要在实践中经受检验，加以提炼，深化提高。

历史证明，仅仅有经验的累积，还不能上升为理论，构成系统的科学。古埃及丰富的几何知识的积累，一经与古希腊的形式逻辑相结合，便使几何学光照环宇，成了最早成熟的科学典范。这里起作用的，是严格的逻辑证明。只有经过严格的逻辑证明，才能使我们从观察到的事物的表面的、片段的、偶然的、不相联系的状态中，通过自觉的主观能动作用，抓住客观事物的本质，上升为一般理论，发现事物的内在联系，得出具有规律性、普遍性的结果，从而使数学具有高度的抽象性和广泛的应用性。

直观和推理 实物是最好的教具，其次是模型，再其次是图形。但实物和模型难能要有就有，因此，图形在教学上起重要作用。几何图形的直观能化抽象为具体，往往是启发抽象思维的有力工具。但图形无论画得如何准确，也无法代替逻辑思维。直观不一定可靠，还往往和实际情况不符，甚至相反。并且复杂的问题，直观就无能为力。所以，尽管直观和实验对我们获得感性认识起重要作用，证明命题还主要靠逻辑推理。

关于命题证明 定义，公理，定理，都是命题。命题由两部分组成。第一部分称前提或假设，第二部分称结论。前者表明全部已知条件，后者表明由这些条件必然得出的事实。

前提不能互相矛盾，否则命题毫无意义。

数学上的命题常写成假言命题的形式，即

若 P，则 Q；或简写作 $P\Rightarrow Q$（P 蕴含 Q）。在命题“平行四边

形的对角线互相平分”中，平行四边形是已知条件，对角线互相平分是要证明的结论．若将它写成假言推理的形式，就成：“设一四边形是平行四边形，则其两条对角线互相平分”．无论写成这两种形式的哪一种，都算作抽象命题．读者在证明之先，要先将它具体化，写成

“设四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$, $AD\parallel BC$, O 是 AC、BD 的交点．

求证 $AO=OC$, $BO=OD$.”

然后再进行证明．

命题不一定是真的，即不一定成立．真命题称为定理．

所谓数学证明，实际上是由假设经过推理以得出结论．推理的每一步都要求言必有据．每次都要言必有据，逐步深入．倘若向回追溯，穷根究底，势必山穷水尽．为了解脱这种困境，古希腊哲学家把最原始的依据称作公设或公理，约定承认其真确，称之为自明之理，绝大多数是经过亿万次实践，其真实性是无用置疑的．这办法一直为数学界所沿用．其实，欧几里得的第五公设就不是自明的．在本书里，我们把基础放在中学的几何学，不去研究公理基础的问题．

证命题时，一定要确切理解题意，给了我们什么条件，要我们得出什么结论，并在初学时就要求学会简洁、明白地写出．这样才知道从哪里出发，目标在何方．然后才谈得上如何去证明．

§1.3　命题的四种变化

我们来介绍两个名词，一个叫命题的换位，即把一个命题的前提和结论互换其地位，前提变为结论，结论变为前提．换位以后的命题称为原命题的逆命题．因而，逆命题的逆命题就变回为原命题，二者互为逆命题．

设原命题为"若 P 则 Q"，则逆命题为"若 Q 则 P"．以符号表达，原命题是 $P\Rightarrow Q$；逆命题是 $Q\Rightarrow P$．

另一个名词叫做命题的换质，即把命题的两部分同时加以否定，至于地位则保持不变．换质以后的命题称为原命题的否命题．否定的否定就是肯定，因而否命题的否命题就变回为原命题，二者互为否命题．

否定 P、Q（即 P、Q 的反面）记为 $\bar{P}$、$\bar{Q}$．所以，否命题以符号表为 $\bar{P}\Rightarrow\bar{Q}$．

务必注意，$a\geqslant0$ 的反面并非 $a<0$，而应该是 $a\leqslant0$．否定"点 P 在圆 O 内"得不出"点 P 在圆 O 外"的结论，这时，点 P 可能在圆 O 外，也可能在圆周上，等等．

经过换位、换质这两个措施，由一个命题可得出四个命题，它们的名称和内容是：

(1) 原 命 题：若 P 则 Q，　$(P\Rightarrow Q)$；

(2) 逆 命 题：若 Q 则 P，　$(Q\Rightarrow P)$；

(3) 否 命 题：若 $\bar{P}$ 则 $\bar{Q}$，　$(\bar{P}\Rightarrow\bar{Q})$；

(4) 逆否命题：若 $\bar{Q}$ 则 $\bar{P}$，　$(\bar{Q}\Rightarrow\bar{P})$．

举例说明如下：

例 1

(1) 原 命 题：平行四边形的两条对角线互相平分．

(2) 逆 命 题：若四边形两条对角线互相平分，那末它是平行四边形．

(3) 否 命 题：若四边形不是平行四边形，那末它的两条对角线不互相平分．

(4) 逆否命题：若四边形的两条对角线不互相平分，那末它不是平行四边形．

例 2

(1) 原 命 题：菱形的对角线互(相)垂(直)。　　(真)

(2) 逆 命 题：若四边形的对角线互垂，那末它是菱形。　　(假)

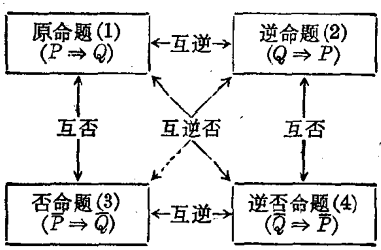
(3) 否 命 题：若四边形不是菱形，那末它的对角线不互垂。　　(假)

(4) 逆否命题：若四边形的对角线不互垂，那末它不是菱形。　　(真)

可以注意，将一个命题换质以后再跟着换位，或换位以后再跟着换质，都达到既换位又换质。即是说，否命题的逆命题以及逆命题的否命题，都是原命题的逆否命题。

上面的例中，(1)和(2)互为逆命题，(1)和(3)互为否命题，(1)和(4)互为逆否命题，(2)和(3)也互为逆否命题。

四种命题的关系，图示如下：



§1.3.1　四种命题的真假关系

命题有真有假(真就是命题成立，假就是不成立)，试问四种命题的真假之间有没有什么内在联系？

例 3

(1) 三角形中若两边相等，则其对角亦等。　　(真)

(2) 三角形中若两角相等，则其对边亦等。　　(真)

(3) 三角形中若两边不等，则其对角亦不等。　　(真)

(4) 三角形中若两角不等，则其对边亦不等. (真)

例 4

(1) 若两角为对顶角，则此两角相等. (真)

(2) 若两角相等，则此两角为对顶角. (假)

(3) 若两角非对顶角，则此两角不等. (假)

(4) 若两角不等，则此两角非对顶角. (真)

例 5

(1) 若四边形四边相等，则为正方形. (假)

(2) 若四边形为正方形，则四边相等. (真)

(3) 若四边形四边不等，则非正方形. (真)

(4) 若四边形非正方形，则四边不等. (假)

由例 2 和例 4，原命题真，它的逆命题和否命题未必真. 所以，一个定理的逆命题和否命题，必须通过证明才能判断其成立.

上面五例表明，(1)和(4)真则同真，假则同假. 事实上，这可以归纳为一条规律：互为逆否的两命题，真则同真，假则同假. 因为，如果肯定了(1)成立，一经肯定 P，就必然要肯定 Q；一经否定了 Q，就必然只能否定 P 而不能肯定 P 了，即 $\bar{Q}\Rightarrow\bar{P}$，这就是(4).

所以(1)、(4)可以互推，同理(2)、(3)可以互推. 我们说原命题(1)跟逆否命题(4)是等效或等价的. (2)、(3)也互为逆否命题，也是等价的.

所以要证(1)、(2)、(3)、(4)四个命题同真，只要证

(1)和(2)， (1)和(3)， (2)和(4)， (3)和(4)

四组中有一组成立就够了.

初学的人往往在证明命题时，不去证这命题(或跟它等效的逆否命题)，而去证逆命题(或否命题)，这是原则性错误.

§1.3.2　充分条件，必要条件，充要条件

命题“平行四边形的两条对角线互相平分”和“菱形的对角线互相垂直”可以换个方式陈述为：

四边形两双对边平行 $\Rightarrow$ 这四边形的对角线互相平分；

四边形的四边相等 $\Rightarrow$ 这四边形的对角线互垂.

即是说，四边形具有了两双对边平行的性质，足以保证也具有对角线互相平分的性质；四边形具有了四边相等的性质，便保证也具有对角线互垂的性质.

反过来讲，既然四边形一经具有两双对边平行的性质，便必然具有对角线互相平分的性质，那末两条对角线不互相平分的四边形便不可能是平行四边形了．仿此，两条对角线不互垂的四边形，也就必然不是菱形了，因为它不具有一切菱形所共同具有的属性——对角线互垂.

一般而论，在定理

$$P \Rightarrow Q$$

中，条件 P 称为性质 Q 的充分条件，有了 P 便保证有 Q；Q 称为 P 的必要条件，没有 Q，P 就不成立.

如象上面的例1和例3，原命题与逆命题同时成立：

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P,$$

P 是 Q 的充分和必要的条件，简称充要条件．Q 也是 P 成立的充要条件．它们互为充要条件.

作为一个教师，如果没有彻底理解什么是必要条件、充分条件、必要而不充分的条件、充分而不必要的条件、充要条件，那就不可能随时随地纠正学生们的错误.

关于必要和充分的意义，可用几个字概括如下：

必要：无它必不行，有它未必行.