苏联十年制学校数学教材

代数

八年级

人民教育出版社

苏联十年制学校数学教材

代　数

八年级

盛世雄　译

人民教育出版社

1980·北京

内容提要

本书根据苏联十年制学校数学教材《代数(八年级)》(А·И·马尔库雪维奇主编)1980年版译出。全书共分六章：二次函数，二元方程和二元不等式，等差数列和等比数列，有理指数幂，指数函数，常用对数和计算工作的实施。

八年级数学课程分代数和几何两科，代数每周4课时，几何每周2课时。

本书是为研究国外中小学数学教学改革情况而出版的，可供中学数学教学研究人员、师范院校数学系师生以及中学数学教师参考。

苏联十年制学校数学教材

代　数

八年级

盛世雄　译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 11.25　字数 240,000

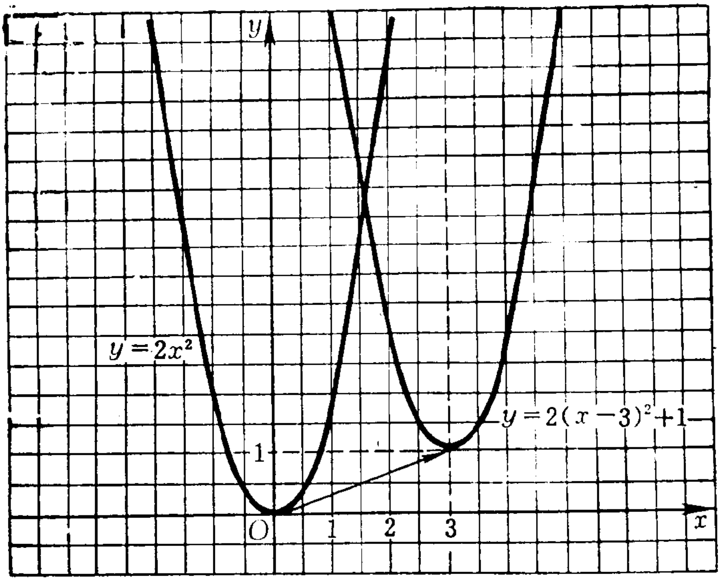
1980年7月第1版　1980年11月第1次印刷

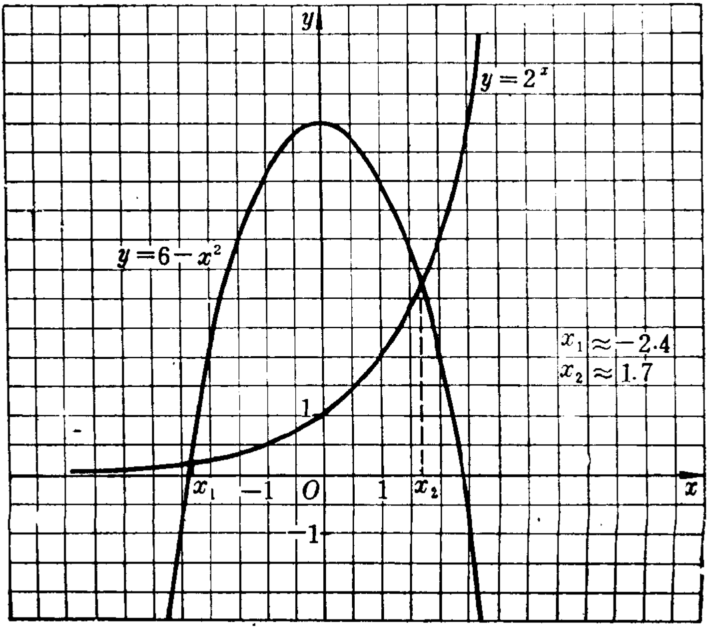
印数　1—20,000

书号 7012·0142　定价 0.82 元

(限国内发行)

附：原书内封图


y
$y=2x^2$
$y=2(x-3)^2+1$
1
O
1
2
3
x


y
$y=2^x$
$y=6-x^2$
$x_1\approx-2.4$
$x_2\approx1.7$
1
x_1
−1
O
1
x_2
x
−1

目　录

第一章　二次函数

§1. 二次三项式

1. 二次方程(复习)

在解决许多问题时，我们不只一次地遇到过 $ax^2+bx+c=0$ 这种形式的方程.

$ax^2+bx+c=0$ 这种形式的方程叫做二次方程，其中 a、b 和 c 是某一个数，并且 $a\neq 0$，x 是变量.

例如，方程 $3x^2+5x-1=0$，$x^2-7x=0$，$5x^2-8=0$，$4x^2=0$ 都是二次方程．第一个方程中，$a=3$，$b=5$，$c=-1$；第二个方程中，$a=1$，$b=-7$，$c=0$；第三个方程中，$a=5$，$b=0$，$c=-8$；第四个方程中，$a=4$，$b=0$，$c=0$.

如果二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 b 或 c 至少有一个等于零，那么这种二次方程就叫做不完全的二次方程．例如，方程 $x^2-7x=0$，$5x^2-8=0$ 和 $4x^2=0$ 都是不完全的二次方程.

我们记得，二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是不是存在以及根的个数决定于表示式 $D=b^2-4ac$ 的值，这个表示式叫做二次方程的判别式．依据判别式符号的不同，可能出现三种情形：

如果 $D>0$，那么方程有两个根；

如果 $D=0$, 那么方程有一个根;

如果 $D<0$, 那么方程没有根.

当 $D\geqslant 0$ 时, 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根可以根据下面的公式求出:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ 其中 } D=b^2-4ac. \tag{A}$$

解二次方程时, 有时利用写成另一种形式的根的公式比较方便.

把分式$\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$的分子和分母除以 2, 得到:

$$\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{D}}{a}.$$

把式$\frac{1}{2}\sqrt{D}$中的因数$\frac{1}{2}$移到根号下面, 得到:

$$\frac{-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{D}}{a}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}.$$

因为 $D=b^2-4ac$, 所以 $\frac{D}{4}=\frac{b^2-4ac}{4}=\frac{b^2}{4}-ac=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$.

因此, 公式(A)可以写成下面的形式:

$$x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ 其中 } \frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac. \tag{Б}$$

写成这种形式的公式, 可以用来解判别式不是负值的任何二次方程$\left(\text{显然, 如果 } D\geqslant 0, \text{ 那么 } \frac{D}{4}\geqslant 0\right)$. 实际上, 在 b 是偶

数$\left(\text{也就是}\dfrac{b}{2}\text{是整数}\right)$的情况下，常常运用这个公式.

下面，我们举几个利用公式(Б)解二次方程的例子.

例 1　解方程

$$7x^2-10x-8=0.$$

得到:

$$\frac{D}{4}=(-5)^2-7\cdot(-8)=81,$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{81}}{7},\ \ x=-\frac{4}{7}\text{ 或 }x=2.$$

答: $\left\{-\frac{4}{7},2\right\}$.

我们发现，如果利用公式(A)，就会使计算更加繁琐.

例 2　解方程

$$4x^2-4x+5=0.$$

得到:

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-4\times5=-16.$$

因为$\frac{D}{4}<0$，所以 $D<0$. 因此，这个二次方程没有根.

1. 解方程:

а) $2x^2-5x-3=0$;　　б) $3x^2-8x+5=0$;

в) $5x^2+9x+4=0$;　　г) $36x^2-12x+1=0$;

д) $3x^2-3x+1=0$;　　е) $x^2+9x-22=0$;

ж) $7x^2-11x-6=0$;　　з) $x^2-12x+32=0$.

2. 利用公式(Б)解方程:

а) $3x^2-10x+3=0$;　　б) $x^2-8x-84=0$;

в) $16x^2+8x+1=0$;　　г) $x^2+14x+33=0$;

д) $5x^2+26x-24=0$;　　е) $x^2-34x+289=0$.

3. 用两种方法(利用根的公式和不用公式)解下列不完全的二次方程:

а) $2x^2+15x=0$;　　б) $25x^2-144=0$.

4. 把下列方程写成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式并求解:

а) $3(x+4)^2=10x+32$;　　б) $31x+17=15(x+1)^2$;

в) $\frac{x^2-1}{2}-11x=11$;　　г) $\frac{x^2+x}{2}=\frac{8x-7}{3}$.

5. 不解方程,求方程的两个根(如果存在的话)的和与积:

а) $10x^2-9x+2=0$;　　б) $x^2+48x+11=0$;

в) $7x^2-56x+20=0$;　　г) $4x^2+x-8=0$;

д) $10x^2-59x=0$;　　е) $5x^2-58=0$.

6. 求下列方程根的集合:

а) $\frac{x}{x+4}+\frac{4}{x-4}=\frac{20}{x^2-16}$;　　б) $\frac{2x}{x+5}-\frac{5}{5-x}=\frac{25}{x^2-25}$;

в) $\frac{x}{x-3}+\frac{4}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$;

г) $\frac{5}{x-1}+\frac{3x-3}{2(x+1)}=\frac{2(x^2+4)}{x^2-1}$.

2. 多项式的根

在下表中列出了 x 取某些值时多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 的值.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^3-2x^2+5x-10$	-70	-36	-18	-10	-6	0	14	42

从上表可以看出，在所取的变量 x 值当中，有一个数(即数 2)使这个多项式变成零，即 2 是多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 的根.

一元多项式的值等于零时变量所取的值叫做这个多项式的根.

由上表我们求出了多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 的一个根. 这个多项式有另外的根吗？为了回答这个问题，需要解方程 $x^3-2x^2+5x-10=0$.

把多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 分解因式，得到：

$$\begin{aligned}x^3-2x^2+5x-10&=x^2(x-2)+5(x-2)\\&=(x-2)(x^2+5).\end{aligned}$$

方程 $x^3-2x^2+5x-10=0$ 和方程 $(x-2)(x^2+5)=0$ 同解. 对于所有的 x 值，因式 x^2+5 是正的，因此方程 $(x-2)(x^2+5)=0$ 只有一个根，就是 2. 于是，多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 也只有唯一的根 2.

我们来求多项式 $x^3+2x^2-9x-18$ 的解集合，为此，解方程 $x^3+2x^2-9x-18=0$：

$$x^2(x+2)-9(x+2)=0,$$

$$(x+2)(x^2-9)=0,$$

$$(x+2)(x+3)(x-3)=0.$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=-3 \quad 或 \quad x=3.$$

就是说，$\{-2, -3, 3\}$ 是多项式 $x^3+2x^2-9x-18$ 的解集合.

多项式 x^4+5x^2+1 没有根，因为对于任何 x，它的值是正的，因此不论 x 取什么值，这个多项式都不等于零.

有时必须解决相反的问题，就是多项式的根是已知数，要

求出多项式.

举例说，设多项式的解集合是 $\{2,3,-4\}$，需要求出多项式.

我们写出三个因式的积：$(x-2)(x-3)(x+4)$，其中 x 是变量．显然，当且仅当变量 x 的值等于 2、3 和 -4 时，这个积变成零.

我们把积 $(x-2)(x-3)(x+4)$ 变换成多项式：

$$(x-2)(x-3)(x+4)=x^3-x^2-14x+24.$$

多项式 $x^3-x^2-14x+24$ 的解集合是 $\{2,3,-4\}$.

还可以举出具有同样解集合的变量 x 的多项式的其他例子．实际上，如果把积 $2(x-2)(x-3)(x+4)$ 写成多项式的形式，那么就得到多项式 $2x^3-2x^2-28x+48$，它的解集合是 $\{2,3,-4\}$．把积 $(x-2)^2(x-3)(x+4)(x^2+1)$ 变换成多项式以后，我们得到具有同样解集合的多项式 $x^6-3x^5-11x^4+49x^3-60x^2+52x-48$．总之，存在变量 x 的多项式的无穷集合，这些多项式的根是 2、3 和 -4 并且仅仅是这些数.

7. 下列各数是多项式 x^4-7x^2+3x+6 的根吗？

а) 1;　　б) $\sqrt{2}$;　　в) 2.

8. 求二次三项式的根：

а) $x^2-2x-48$;　　б) $3y^2+y-30$;

в) $5x^2-x-22$;　　г) $4p^2-11p+7$.

9. 求下列多项式的解集合：

а) $2x-3$;　　б) x^3-4x;

в) z^2+8;　　г) y^4-9;

д) x^3-10x^2+25x;　　е) y^3+12y^2+36y;

ж) x^3+10x^2-x-10;　　з) $z^3-8z^2-2z+16$.

10. 列出任何一个多项式，使它的解集合是:

а) $\{2,3\}$;　　б) $\{-5,5\}$;　　в) $\{0,7\}$;

г) $\{4\}$;　　д) $\varnothing$;　　е) $\{-1,0,5\}$.

复　习　题

11. 解下列不等式并在坐标轴上表示解集合:

а) $5x-0.7<3x+5.1$;　　б) $0.8x+4.5\geqslant 5-1.2x$;

в) $2x+4.2\leqslant 4x+7.8$;　　г) $3x-2.6>5.5x-3.1$.

3. 二次三项式分解因式

我们已经不只一次地遇到过多项式因式分解的例子. 现在对二次三项式的一般形式，也就是对 ax^2+bx+c 这种形式的三项式作因式分解，其中 x 是变量，a、b 和 c 是某一个数，并且 $a\neq 0$.

二次三项式 ax^2+bx+c 能不能分解因式，决定于这个三项式有没有根. 三项式的根是不是存在由式 b^2-4ac(和二次方程类似，把它叫做二次三项式的判别式)的符号确定.

设三项式 ax^2+bx+c 的判别式 D 是正的，那么三项式有两个根 x_1 和 x_2，它们是二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根. 我们来证明在这种情况下，二次三项式 ax^2+bx+c 恒等于积 $a(x-x_1)(x-x_2)$.

为了证明这一点，把式 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 变换成多项式:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)$$
$$=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2].$$

根据韦达定理:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

于是，

$$a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=ax^2+bx+c.$$

因此，当 $D>0$ 和 $a\neq0$ 时，下面的恒等式成立：

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).\qquad(1)$$

当二次三项式 ax^2+bx+c 的判别式 D 等于零也就是当三项式有唯一的根时，也可以利用恒等式(1)．在这种情况下，通常认为 $x_1=x_2$．于是

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_1),$$

也就是恒等式(1)可以写成下面的形式：

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2.$$

如果二次三项式的判别式是负的，也就是三项式没有根，那么它就不能写成两个一次多项式的积的形式．

实际上，如果在这种情况下，恒等式 $ax^2+bx+c=(kx+m)(px+q)$ 成立，其中 k、m、p 和 q 是任何数，并且 $k\neq0$ 和 $p\neq0$，那么，举例说，当 $x=-\frac{m}{k}$ 时，等式的右边等于零．于是，对于这个 x 值，左边也等于零，也就是二次三项式至少有一个根．但这与已知条件矛盾．

我们来看几个应用恒等式(1)的例子．

例 1　把二次三项式分解因式(如果可能的话)：

a) $2x^2-5x-3$;　　　　б) $-25x^2+10x-1$.

解　a) 三项式的判别式等于 $(-5)^2-4\cdot2(-3)$ 是正的，所以三项式有两个根．根据二次方程的根的公式求出三项式

的根 3 和$-\frac{1}{2}$以后，利用恒等式(1)，得到：

$$2x^2-5x-3=2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

所得到的结果可以写成另一形式，就是：

$$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1).$$

б) 求出三项式的判别式：

$$D=10^2-4\cdot(-25)\cdot(-1)=0.$$

三项式有唯一的根$\frac{1}{5}$. 根据恒等式(1)，得：

$$-25x^2+10x-1=-25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2.$$

所得到的结果可以写成另一形式，就是：

$$-25x^2+10x-1=(5x-1)(1-5x).$$

例 2　约分

$$\frac{x-5}{3x^2-13x-10}.$$

解　二次三项式 $3x^2-13x-10$ (分式的分母) 有两个根，因为它的判别式是正的，所以，这个二次三项式可以分解因式.

三项式的根是$-\frac{2}{3}$和 5. 得到：

$$3x^2-13x-10=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-5)=(3x+2)(x-5).$$

现在可以这样来约分：

$$\frac{x-5}{3x^2-13x-10}=\frac{x-5}{(3x+2)(x-5)}=\frac{1}{3x+2}.$$

例 3　解不等式 $x^2-x-20<0$.

解　验明三项式 x^2-x-20 的判别式是正的以后，求出这个三项式的根是 -4 和 5. 把三项式分解因式，得到：

$$x^2-x-20=(x+4)(x-5).$$

当且仅当

$$\begin{cases}x+4>0,\\x-5<0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x+4<0,\\x-5>0\end{cases}$$

时，不等式 $(x+4)(x-5)<0$ 成立. 第一个不等式组的解集合是数区间 $]-4, 5[$. 第二个不等式组的解集合是空集. 于是，原不等式的解集合是数区间 $]-4, 5[$.

例 4　把多项式 $4x^2+9bx+5b^2$ 分解因式.

解　这个多项式可以看成关于变量 x 的二次三项式. 利用二次方程的根的公式，我们用 b 表示变量 x. 这一点可以做到，因为三项式的判别式 $D=(9b)^2-4\cdot4\cdot5b^2=b^2$ 是非负的.

得到：

$$x=\frac{-9b\pm\sqrt{b^2}}{8},\ \text{也就是}\quad x=\frac{-9b\pm|b|}{8}.$$

因此，　$x=-\frac{5b}{4}$ 或 $x=-b$.

利用恒等式(1)，得：

$$4x^2+9bx+5b^2=4\left(x+\frac{5}{4}b\right)(x+b).$$

最后得到：

$$4x^2+9bx+5b^2=(4x+5b)(x+b).$$

12. 求三项式的根并把它分解因式：

а) $2x^2-5x+3$;　　б) $5y^2+2y-3$;

в) $2x^2-5x-7$;　　г) $x^2-11x+30$;

д) $-y^2+6y-5$;　　е) $-z^2-5z+6$.