

苏联十年制学校数学教材

代 数

八 年 级

人民教育出版社

苏联十年制学校数学教材

代 数

八 年 级

盛世雄 译

人民教育出版社

1980·北京

内 容 提 要

本书根据苏联十年制学校数学教材《代数(八年级)》(A·И·马尔库雪维奇主编)1980年版译出。全书共分六章:二次函数,二元方程和二元不等式,等差数列和等比数列,有理指数幂,指数函数,常用对数和计算工作的实施。

八年级数学课程分代数和几何两科,代数每周4课时,几何每周2课时。

本书是为研究国外中小学数学教学改革情况而出版的,可供中学数学教学研究人员、师范院校数学系师生以及中学数学教师参考。

苏联十年制学校数学教材

代 数

八 年 级

盛 世 雄 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 11.25 字数 240,000

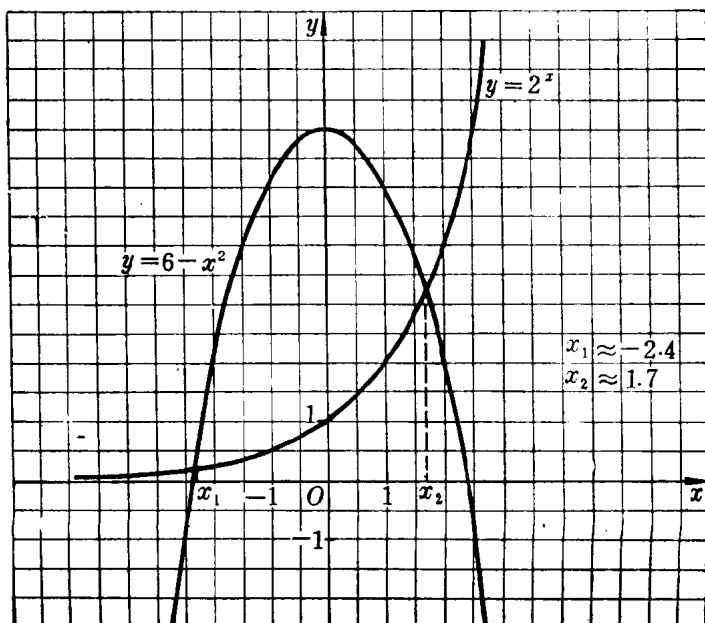
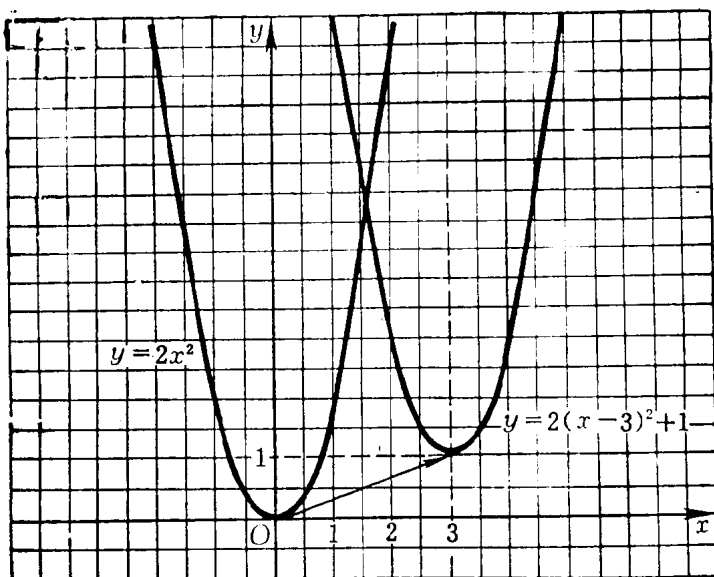
1980年7月第1版 1980年11月第1次印刷

印数 1—20,000

书号 7012·0142 定价 0.82元

(限国内发行)

附：原书内封图



目 录

第一章 二次函数	1
§ 1. 二次三项式	1
1. 二次方程(复习)	1
2. 多项式的根	4
3. 二次三项式分解因式	7
§ 2. 二次函数的图象	12
4. 函数 $y=a(x-m)^2+n$ 的图象	12
5. 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象	18
6. 一元二次不等式的解法	23
第一章补充习题	28
第二章 二元方程和二元不等式	35
§ 3. 二元方程和二元方程组	35
7. 二元方程和它的图象	35
8. 二元方程组	40
§ 4. 二元不等式和二元不等式组	47
9. 二元不等式	47
10. 二元不等式组	53
第二章补充习题	56
第三章 等差数列和等比数列	67
§ 5. 数列	67
11. 数列的概念	67
12. 给出数列的方法	74
13. 给出数列的递推法	78
§ 6. 等差数列	81
14. 等差数列的定义	81
15. 等差数列的通项公式	84
16. 等差数列前 n 项的和的公式	90

§ 7. 等比数列	95
17. 等比数列的定义	95
18. 等比数列的通项公式	98
19. 等比数列前 n 项的和的公式	103
20. 恒等式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ 和 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$	106
第三章补充习题	110
第四章 有理指数幂	127
§ 8. 已知函数的反函数	127
21. 已知关系的相反关系	127
22. 已知函数的反函数的概念	133
§ 9. n 次方根和它的性质	140
23. 函数 $y=x^n$	140
24. n 次方根的概念	144
25. 函数 $y=\sqrt[n]{x}$	149
26. n 次算术根的性质	152
§ 10. 有理指数幂	158
27. 函数 $y=a^x (x \in \mathbb{Z})$ 和它的性质	158
28. 分数指数幂的定义	163
29. 有理数指数幂的性质	169
30. 含分数指数幂的式子的变形	174
第四章补充习题	179
第五章 指数函数	191
§ 11. 指数函数的性质	191
31. 函数 $y=2^x$	191
32. 函数 $y=a^x$ 和它的性质	196
§ 12. 底数为 10 的指数函数	206
33. 数的整数部分与小数部分	206
34. 函数 $y=10^x$	210
35. 函数 $y=10^x$ 的数值表	215
第五章补充习题	217

第六章 常用对数·计算工作的实施224

§ 13. 对数函数	224
36. 对数的概念	224
37. 常用对数	227
38. 函数 $y = \lg x$	230
39. 求对数	236
40. 求真数	240
§ 14. 对数表	245
41. 对数的首数和尾数	245
42. 四位对数表	247
43. 利用四位对数表进行计算	250
§ 15. 计算尺	255
44. 对数尺度	255
45. 计算尺的基本尺度	258
46. 利用计算尺作数的乘法运算	261
47. 利用计算尺作数的除法运算	266
48. 利用计算尺作数的乘除混合运算	269
§ 16. 算法和程序设计初步	272
49. 关于算法和它的写法的概念	273
50. 算法框图	281
51. 关于电子计算机程序设计的初步知识	286
第六章补充习题	293

复习题304

计算题	304
恒等变形	305
一元方程	308
一元不等式	313
二元方程和二元不等式·二元方程组和二元不等式组	318
函数	322
难题	327
习题答案	334

第一章 二次函数

§ 1. 二次三项式

1. 二次方程(复习)

在解决许多问题时, 我们不只一次地遇到过 $ax^2+bx+c=0$ 这种形式的方程.

$ax^2+bx+c=0$ 这种形式的方程叫做二次方程, 其中 a , b 和 c 是某一个数, 并且 $a \neq 0$, x 是变量.

例如, 方程 $3x^2+5x-1=0$, $x^2-7x=0$, $5x^2-8=0$, $4x^2=0$ 都是二次方程. 第一个方程中, $a=3$, $b=5$, $c=-1$; 第二个方程中, $a=1$, $b=-7$, $c=0$; 第三个方程中, $a=5$, $b=0$, $c=-8$; 第四个方程中, $a=4$, $b=0$, $c=0$.

如果二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 b 或 c 至少有一个等于零, 那么这种二次方程就叫做不完全的二次方程. 例如, 方程 $x^2-7x=0$, $5x^2-8=0$ 和 $4x^2=0$ 都是不完全的二次方程.

我们记得, 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是不是存在以及根的个数决定于表示式 $D=b^2-4ac$ 的值, 这个表示式叫做二次方程的判别式. 依据判别式符号的不同, 可能出现三种情形:

如果 $D>0$, 那么方程有两个根;

如果 $D=0$, 那么方程有一个根;

如果 $D<0$, 那么方程没有根.

当 $D\geq 0$ 时, 方程 $ax^2+bx+c=0 (a\neq 0)$ 的根可以根据下面的公式求出:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ 其中 } D = b^2 - 4ac. \quad (\text{A})$$

解二次方程时, 有时利用写成另一种形式的根的公式比较方便.

把分式 $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ 的分子和分母除以 2, 得到:

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}}{a}.$$

把式 $\frac{1}{2}\sqrt{D}$ 中的因数 $\frac{1}{2}$ 移到根号下面, 得到:

$$\frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}.$$

因为 $D = b^2 - 4ac$, 所以 $\frac{D}{4} = \frac{b^2 - 4ac}{4} = \frac{b^2}{4} - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

因此, 公式(A)可以写成下面的形式:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ 其中 } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac. \quad (\text{B})$$

写成这种形式的公式, 可以用来解判别式不是负值的任何二次方程(显然, 如果 $D\geq 0$, 那么 $\frac{D}{4}\geq 0$). 实际上, 在 b 是偶

数(也就是 $\frac{b}{2}$ 是整数)的情况下,常常运用这个公式.

下面,我们举几个利用公式(B)解二次方程的例子.

例1 解方程

$$7x^2 - 10x - 8 = 0.$$

得到:

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 7 \cdot (-8) = 81,$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{7}, \quad x = -\frac{4}{7} \text{ 或 } x = 2.$$

$$\text{答: } \left\{ -\frac{4}{7}, 2 \right\}.$$

我们发现,如果利用公式(A),就会使计算更加繁琐.

例2 解方程

$$4x^2 - 4x + 5 = 0.$$

得到:

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 4 \times 5 = -16.$$

因为 $\frac{D}{4} < 0$, 所以 $D < 0$. 因此,这个二次方程没有根.

1. 解方程:

a) $2x^2 - 5x - 3 = 0;$

б) $3x^2 - 8x + 5 = 0;$

в) $5x^2 + 9x + 4 = 0;$

г) $36x^2 - 12x + 1 = 0;$

д) $3x^2 - 3x + 1 = 0;$

е) $x^2 + 9x - 22 = 0;$

ж) $7x^2 - 11x - 6 = 0;$

з) $x^2 - 12x + 32 = 0.$

2. 利用公式(B)解方程:

a) $3x^2 - 10x + 3 = 0;$

б) $x^2 - 8x - 84 = 0;$

в) $16x^2 + 8x + 1 = 0;$

г) $x^2 + 14x + 33 = 0;$

$$д) 5x^2 + 26x - 24 = 0; \quad e) x^2 - 34x + 289 = 0.$$

3. 用两种方法(利用根的公式和不用公式)解下列不完全的二次方程:

$$a) 2x^2 + 15x = 0; \quad 6) 25x^2 - 144 = 0.$$

4. 把下列方程写成 $ax^2 + bx + c = 0$ 的形式并求解:

$$a) 3(x+4)^2 = 10x + 32; \quad 6) 31x + 17 = 15(x+1)^2;$$

$$b) \frac{x^2 - 1}{2} - 11x = 11; \quad r) \frac{x^2 + x}{2} = \frac{8x - 7}{3}.$$

5. 不解方程, 求方程的两个根(如果存在的话)的和与积:

$$a) 10x^2 - 9x + 2 = 0; \quad 6) x^2 + 48x + 11 = 0;$$

$$b) 7x^2 - 56x + 20 = 0; \quad r) 4x^2 + x - 8 = 0;$$

$$д) 10x^2 - 59x = 0; \quad e) 5x^2 - 58 = 0.$$

6. 求下列方程根的集合:

$$a) \frac{x}{x+4} + \frac{4}{x-4} = \frac{20}{x^2-16}; \quad 6) \frac{2x}{x+5} - \frac{5}{5-x} = \frac{25}{x^2-25};$$

$$b) \frac{x}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{18}{x^2-9};$$

$$r) \frac{5}{x-1} + \frac{3x-3}{2(x+1)} = \frac{2(x^2+4)}{x^2-1}.$$

2. 多项式的根

在下表中列出了 x 取某些值时多项式 $x^3 - 2x^2 + 5x - 10$ 的值.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^3 - 2x^2 + 5x - 10$	-70	-36	-18	-10	-6	0	14	42

从上表可以看出,在所取的变量 x 值当中,有一个数(即数 2)使这个多项式变成零,即 2 是多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 的根.

一元多项式的值等于零时变量所取的值叫做这个多项式的根.

由上表我们求出了多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 的一个根.这个多项式有另外的根吗?为了回答这个问题,需要解方程 $x^3-2x^2+5x-10=0$.

把多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 分解因式,得到:

$$\begin{aligned}x^3-2x^2+5x-10 &= x^2(x-2)+5(x-2) \\ &= (x-2)(x^2+5).\end{aligned}$$

方程 $x^3-2x^2+5x-10=0$ 和方程 $(x-2)(x^2+5)=0$ 同解.对于所有的 x 值,因式 x^2+5 是正的,因此方程 $(x-2)(x^2+5)=0$ 只有一个根,就是 2. 于是,多项式 $x^3-2x^2+5x-10$ 也只有唯一的根 2.

我们来求多项式 $x^3+2x^2-9x-18$ 的解集合,为此,解方程 $x^3+2x^2-9x-18=0$:

$$x^2(x+2)-9(x+2)=0,$$

$$(x+2)(x^2-9)=0,$$

$$(x+2)(x+3)(x-3)=0.$$

$$x=-2 \text{ 或 } x=-3 \text{ 或 } x=3.$$

就是说, $\{-2, -3, 3\}$ 是多项式 $x^3+2x^2-9x-18$ 的解集合.

多项式 x^4+5x^2+1 没有根,因为对于任何 x , 它的值是正的,因此不论 x 取什么值,这个多项式都不等于零.

有时必须解决相反的问题,就是多项式的根是已知数,要

求出多项式.

举例说, 设多项式的解集合是 $\{2, 3, -4\}$, 需要求出多项式.

我们写出三个因式的积: $(x-2)(x-3)(x+4)$, 其中 x 是变量. 显然, 当且仅当变量 x 的值等于 2、3 和 -4 时, 这个积变成零.

我们把积 $(x-2)(x-3)(x+4)$ 变换成多项式:

$$(x-2)(x-3)(x+4) = x^3 - x^2 - 14x + 24.$$

多项式 $x^3 - x^2 - 14x + 24$ 的解集合是 $\{2, 3, -4\}$.

还可以举出具有同样解集合的变量 x 的多项式的其他例子. 实际上, 如果把积 $2(x-2)(x-3)(x+4)$ 写成多项式的形式, 那么就得到多项式 $2x^3 - 2x^2 - 28x + 48$, 它的解集合是 $\{2, 3, -4\}$. 把积 $(x-2)^2(x-3)(x+4)(x^2+1)$ 变换成多项式以后, 我们得到具有同样解集合的多项式 $x^6 - 3x^5 - 11x^4 + 49x^3 - 60x^2 + 52x - 48$. 总之, 存在变量 x 的多项式的无穷集合, 这些多项式的根是 2、3 和 -4 并且仅仅是这些数.

7. 下列各数是多项式 $x^4 - 7x^2 + 3x + 6$ 的根吗?

a) 1;

б) $\sqrt{2}$;

в) 2.

8. 求二次三项式的根:

a) $x^2 - 2x - 48$;

б) $3y^2 + y - 30$;

в) $5x^2 - x - 22$;

г) $4p^2 - 11p + 7$.

9. 求下列多项式的解集合:

a) $2x - 3$;

б) $x^3 - 4x$;

в) $z^2 + 8$;

г) $y^4 - 9$;

д) $x^3 - 10x^2 + 25x$;

е) $y^3 + 12y^2 + 36y$;

ж) $x^3 + 10x^2 - x - 10$;

з) $z^3 - 8z^2 - 2z + 16$.

10. 列出任何一个多项式, 使它的解集合是:

- a) $\{2, 3\}$; б) $\{-5, 5\}$; в) $\{0, 7\}$;
г) $\{4\}$; д) $\emptyset$; е) $\{-1, 0, 5\}$.

复 习 题

11. 解下列不等式并在坐标轴上表示解集合:

- a) $5x - 0.7 < 3x + 5.1$; б) $0.8x + 4.5 \geq 5 - 1.2x$;
в) $2x + 4.2 \leq 4x + 7.8$; г) $3x - 2.6 > 5.5x - 3.1$.

3. 二次三项式分解因式

我们已经不只一次地遇到过多项式因式分解的例子。现在对二次三项式的一般形式, 也就是对 $ax^2 + bx + c$ 这种形式的三项式作因式分解, 其中 x 是变量, a 、 b 和 c 是某一个数, 并且 $a \neq 0$ 。

二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 能不能分解因式, 决定于这个三项式有没有根。三项式的根是不是存在由式 $b^2 - 4ac$ (和二次方程类似, 把它叫做二次三项式的判别式) 的符号确定。

设三项式 $ax^2 + bx + c$ 的判别式 D 是正的, 那么三项式有两个根 x_1 和 x_2 , 它们是二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根。我们来证明在这种情况下, 二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 恒等于积 $a(x - x_1)(x - x_2)$ 。

为了证明这一点, 把式 $a(x - x_1)(x - x_2)$ 变换成多项式:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]. \end{aligned}$$

根据韦达定理:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

于是,

$$\begin{aligned} a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

因此, 当 $D > 0$ 和 $a \neq 0$ 时, 下面的恒等式成立:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (1)$$

当二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的判别式 D 等于零也就是当三项式有唯一的根时, 也可以利用恒等式(1). 在这种情况下, 通常认为 $x_1 = x_2$. 于是

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1),$$

也就是恒等式(1)可以写成下面的形式:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

如果二次三项式的判别式是负的, 也就是三项式没有根, 那么它就不能写成两个一次多项式的积的形式.

实际上, 如果在这种情况下, 恒等式 $ax^2 + bx + c = (kx + m)(px + q)$ 成立, 其中 k, m, p 和 q 是任何数, 并且 $k \neq 0$ 和 $p \neq 0$, 那么, 举例说, 当 $x = -\frac{m}{k}$ 时, 等式的右边等于零. 于是, 对于这个 x 值, 左边也等于零, 也就是二次三项式至少有一个根. 但这与已知条件矛盾.

我们来看几个应用恒等式(1)的例子.

例1 把二次三项式分解因式(如果可能的话):

$$\text{a) } 2x^2 - 5x - 3; \quad \text{b) } -25x^2 + 10x - 1.$$

解 a) 三项式的判别式等于 $(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)$ 是正的, 所以三项式有两个根. 根据二次方程的根的公式求出三项式

的根 3 和 $-\frac{1}{2}$ 以后, 利用恒等式(1), 得到:

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

所得到的结果可以写成另一形式, 就是:

$$2x^2 - 5x - 3 = (x-3)(2x+1).$$

6) 求出三项式的判别式:

$$D = 10^2 - 4 \cdot (-25) \cdot (-1) = 0.$$

三项式有唯一的根 $\frac{1}{5}$. 根据恒等式(1), 得:

$$-25x^2 + 10x - 1 = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2.$$

所得到的结果可以写成另一形式, 就是:

$$-25x^2 + 10x - 1 = (5x-1)(1-5x).$$

例 2 约分

$$\frac{x-5}{3x^2-13x-10}.$$

解 二次三项式 $3x^2-13x-10$ (分式的分母) 有两个根, 因为它的判别式是正的, 所以, 这个二次三项式可以分解因式.

三项式的根是 $-\frac{2}{3}$ 和 5. 得到:

$$3x^2 - 13x - 10 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-5) = (3x+2)(x-5).$$

现在可以这样来约分:

$$\frac{x-5}{3x^2-13x-10} = \frac{x-5}{(3x+2)(x-5)} = \frac{1}{3x+2}.$$

例3 解不等式 $x^2 - x - 20 < 0$.

解 验明三项式 $x^2 - x - 20$ 的判别式是正的以后, 求出这个三项式的根是 -4 和 5 . 把三项式分解因式, 得到:

$$x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5).$$

当且仅当

$$\begin{cases} x+4 > 0, \\ x-5 < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+4 < 0, \\ x-5 > 0 \end{cases}$$

时, 不等式 $(x+4)(x-5) < 0$ 成立. 第一个不等式组的解集合是数区间 $] -4, 5[$. 第二个不等式组的解集合是空集. 于是, 原不等式的解集合是数区间 $] -4, 5[$.

例4 把多项式 $4x^2 + 9bx + 5b^2$ 分解因式.

解 这个多项式可以看成关于变量 x 的二次三项式. 利用二次方程的根的公式, 我们用 b 表示变量 x . 这一点可以做到, 因为三项式的判别式 $D = (9b)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5b^2 = b^2$ 是非负的.

得到:

$$x = \frac{-9b \pm \sqrt{b^2}}{8}, \quad \text{也就是} \quad x = \frac{-9b \pm |b|}{8}.$$

$$\text{因此, } x = -\frac{5b}{4} \text{ 或 } x = -b.$$

利用恒等式(1), 得:

$$4x^2 + 9bx + 5b^2 = 4\left(x + \frac{5}{4}b\right)(x + b).$$

最后得到:

$$4x^2 + 9bx + 5b^2 = (4x + 5b)(x + b).$$

12. 求三项式的根并把它分解因式:

a) $2x^2 - 5x + 3$;

б) $5y^2 + 2y - 3$;

в) $2x^2 - 5x - 7$;

г) $x^2 - 11x + 30$;

д) $-y^2 + 6y - 5$;

е) $-z^2 - 5z + 6$.