逻辑演算

● 刘壮虎　著

现代逻辑丛书

LUOJI YANSUAN

逻辑演算

● [illegible] 著

现代逻辑丛书

●此项研究成果受国家社会科学基金资助●

逻 辑 演 算

刘壮虎 著

中国社会科学出版社

(京)新登字030号

图书在版编目（CIP）数据

逻辑演算/刘壮虎著. 一北京：中国社会科学出版社，1993
（现代逻辑丛书/王宪钧主编）
ISBN 7-5004-1425-0
Ⅰ. 逻…
Ⅱ. 刘…
Ⅲ. ①形式逻辑-演绎推理②演绎推理-形式逻辑
Ⅳ. B812.23

中国社会科学出版社出版发行
（北京鼓楼西大街甲158号）
地质印刷厂印刷 新华书店经销
1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷
开本：850×1168 毫米1/32 印张：6.5 插页：2
字数：170 千字 印数：1－1400册
定价 9.00 元

内 容 提 要

数理逻辑基本上有五个分支学科：逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。其中逻辑演算是最基础的部分，它是数理逻辑中逻辑方面的最主要的内容，或者说，它是学习和研究其他分支学科的基础理论。本书主要介绍古典逻辑演算的公理系统和自然推演系统，最后简要介绍一些非古典逻辑演算系统。

《现代逻辑丛书》出版说明

现代逻辑内容很丰富，特别是符号逻辑或称数理逻辑，包括几个分支，如：逻辑演算，集合论，模型论，递归论，证明论等。在古典逻辑演算以外，近年来模态逻辑有了很大的发展，它又被称作哲学逻辑。

符号逻辑不仅内容丰富，还和许多学科如哲学、数学、计算机科学、语言学及心理学等有联系，影响及于这些学科，有些影响甚至是带根本性的。

我国大学的逻辑专业，计算机专业，数学专业，哲学专业等，都开设和符号逻辑有关的课程。

但是，这方面介绍性的书籍和教材在国内还不多见。本丛书的目的是提供一批叙述简明易懂和不需要较多数学知识的入门性书籍和教材。

《现代逻辑丛书》被列入国家第七个五年计划期间重点研究课题，由北京大学哲学系逻辑教研室王宪钧教授主编，教研室及校外任课教员执笔编写。

目　　录

前　言

数理逻辑最早的思想是由莱布尼茨（*G. Leiboniz*，1646—1716）在十七世纪末叶提出的，到了上世纪末和本世纪初，弗雷格（*G. Frege*，1848—1925），皮亚诺(*G. Peano*，1888—1932)和罗素（*B. Russell*，1872—1970）建立了古典逻辑演算，康托尔（*G. Gantor*，1845—1918）创立了集合论，奠定了数理逻辑的基础。本世纪三十年代后，这门学科得到了迅速发展。

数理逻辑有以下几个重要特征：

一、数理逻辑是边缘性的学科，在它的范围内，逻辑内容和数学内容时常是交织在一起的。它和数学、计算机科学、人工智能及语言学等有广泛的联系，并且日益显示其重要的作用。

二、数理逻辑使用特制的表意符号，一般地，一个符号表示一个概念。这就克服了自然语言表达上的不精确之处，便于严格地表达思想并进行推演。另外，使用表意符号还有信息容量大和便于交流的作用。

三、数理逻辑使用公理化方法。公理化方法产生于数学。所谓公理方法，就是从一些称为公理的命题出发，根据明确的推理规则，推出一系列称为定理的命题来。数理逻辑中采用的公理化方法是最形式化和最严格的。

四、数理逻辑的逻辑方面就是现代形式逻辑，它扩大了古典形式逻辑研究的范围。特别地，它研究了古典形式逻辑没有研究的逻辑体系的整体结构和整体性质。

数理逻辑基本上有五个分支：逻辑演算、证明论、公理集合

论、递归论和模型论。其中逻辑演算是最基础的部分，它是数理逻辑中逻辑方面的最主要的内容。甚至可以说，逻辑演算就是现代形式逻辑。

在本书中主要介绍古典逻辑演算的公理系统和自然推演系统。最后简单介绍一些非古典逻辑演算系统。

在本书中使用一些最基本的集合概念和集合符号。$x \in A$（x是A的元素，称为x属于A），$A \subseteq B$（A是B的子集），$A \cup B$（A和B的并），$A \cap B$（A和B的交），$A \setminus B$（A和B的差），$\{x \mid \varphi(x)\}$（所有具有性质φ的元素组成的集合），$\{x \mid x \in A且\varphi(x)\}$（$A$中所有具有性质$\varphi$的元素组成的$A$的子集），$\{x_1, \cdots, x_n\}$（由$n$个元素$x_1, \cdots, x_n$组成的集合），$\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$（由$n$个元素$x_1, \cdots, x_n$组成的有序组）等。

在本书的编写过程中，得到了王宪钧教授、晏成书教授的指导和帮助。本书的初稿曾由叶峰同志审阅并提出了许多宝贵的意见。对此本人表示衷心的感谢。

作　者

1992.9.

第一章

命题逻辑

§1 真值联接词和真值形式

在分析逻辑形式时，只分析到命题为止的逻辑形式及其规律，叫做命题逻辑。命题逻辑以简单命题作为基本单位，不再分析其内部结构。

由简单命题可以组成复合命题，组成复合命题的简单命题称为这个复合命题的支命题。复合命题除了由它的支命题作为它的成份外，还有将这些支命题联接起来的联接词。

如在复合命题“如果$x=2$，则$2x=4$”中，“$x=2$”和“$2x=4$”是它的两个支命题，“如果…则”是联接词。又如在复合命题“雪是白的并且煤是黑的”中，“雪是白的”和“煤是黑的”是它的两个支命题，“并且”是联接词。

在复合命题中，联接词决定了这个复合命题的逻辑结构，从而也就决定了它的逻辑性质。如在“雪是白的并且煤是黑的”中，将它的两个支命题分别换成“今天下雨”和“今天刮风”，就得到新的复合命题“今天下雨并且今天刮风”。这个复合命题和原来的复合命题有相同的逻辑结构。

命题的重要特征是有真假，命题的真假取决于它是否如实地反映客观情况。一般来说，一个简单命题反映的是一件事实，如果这件事实存在，则简单命题为真，否则简单命题为假。复合命题的情况就不同了，是否存在相当于复合命题的事实，并不是一

件容易分析的事情。我们承认复合命题的真假也取决它相应的客观背景，至于这种客观背景是什么，就不是本书中所讨论的。

命题逻辑从另外的角度考虑复合命题的真假。命题逻辑从支命题的真假和由联接词所确定的逻辑结构来考虑复合命题的真假。它反映了复合命题和其支命题间真假方面的联系，这是它们之间最一般的联系。这样考虑的结果就是真值联接词和真值形式。

反映复合命题和其支命题间真假方面联系的联接词叫做**真值联接词**。它们和日常联接词不同，是日常联接词的一种抽象。命题逻辑中不讨论具体的命题，只讨论抽象的命题，称为命题变项，用 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots\cdots$ 等表示。由命题变项和真值联接词构成相当于复合命题形式结构的形式，称为**真值形式**。特别地，单个命题变项也是真值形式。

真值形式反映了复合命题和其支命题间真假方面的联系。为了刻画这种联系，我们让命题变项取真或假，真和假都称为真值（从这种意义上来说，命题变项并不是命题的变项，而是真值的变项）。在一个真值形式中，如果所有的命题变项都取定了真值，则这个真值形式就有唯一的真值。

在命题逻辑中，最常用的真值联接词有五个，称为五个基本的真值联接词，它们是$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$和$\neg$。这五个真值联接词和命题变项构成了五个基本的真值形式 $p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_2, p_1 \rightarrow p_2, p_1 \leftrightarrow p_2$ 和$\neg p_1$。以下逐个讨论。

（1）联接词$\wedge$（**合取**），真值形式 $p_1 \wedge p_2$（读作 p_1 并且 p_2）。

$p_1 \wedge p_2$ 称为 p_1和 p_2 的合取式，简称合取式。p_1 和 p_2 都称为 $p_1 \wedge p_2$ 的合取分支。

$\wedge$是日常联接词“并且”的抽象。根据我们对“并且”的理解，可知只有当 p_1 和 p_2 都取真时，$p_1 \wedge p_2$ 才真，其它情况 $p_1 \wedge p_2$ 都取假。可用以下图表表示：

p_1	p_2	$p_1 \land p_2$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

（2）联接词$\lor$（析取），真值形式 $p_1 \lor p_2$（读作 p_1 或者 p_2）。

$p_1 \lor p_2$ 称为 p_1和 p_2 的析取式，简称析取式。p_1 和 p_2 都称为 $p_1 \lor p_2$ 的析取分支。

$\lor$是日常联接词“或者”的抽象。“或者”有两种意义，一种是相容的，一种是不相容的。$\lor$是相容意义下的“或者”的抽象。所以只有当 p_1 和 p_2 都假时，$p_1 \lor p_2$ 才假，其它情况 $p_1 \lor p_2$ 都取真。可用以下图表表示：

p_1	p_2	$p_1 \lor p_2$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

（3）联接词$\rightarrow$（蕴涵），真值形式$p_1 \rightarrow p_2$（读作 p_1 蕴涵p_2）。

$p_1 \rightarrow p_2$ 称为蕴涵式，其中 p_1 称为 $p_1 \rightarrow p_2$ 的前件，p_2 称为 $p_1 \rightarrow p_2$ 的后件。

$\rightarrow$是日常联接词“如果…则”的抽象。假言命题“如果p_1则p_2”的基本涵义是：p_1 是p_2 的充分条件。这个涵义要求 p_1和 p_2 有内容上的联系，所以只从真假方面来考虑假言命题是不够的，假言命题的前件和后件之间有更复杂的联系。然而，在命题逻辑

中只考虑假言命题在真假方面的联系，这种联系的抽象就是→。为了和假言命题其它方面的抽象有所区别，真值联接词→也称为**实质蕴涵**。

因为 p_1 是 p_2 的充分条件，所以 p_1 真时 p_2 不能为假。因此当 p_1 真 p_2 假时，$p_1 \to p_2$ 为假，其它情况下，$p_1 \to p_2$ 为真。可用以下图表表示：

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

（4）联接词↔（**等值**），真值形式 $p_1 \leftrightarrow p_2$（读作 p_1 等值 p_2）。

$p_1 \leftrightarrow p_2$ 称为等值式，p_1 称为 $p_1 \leftrightarrow p_2$ 的左边，p_2 称 $p_1 \leftrightarrow p_2$ 的右边，p_1 和 p_2 同时称为 $p_1 \leftrightarrow p_2$ 的两边。

↔是日常联接词“当且仅当”在真假关系方面的抽象。和“如果…则”一样，“当且仅当”还有其它方面的内容。但只从真假方面来考虑“当且仅当”，就可知 $p_1 \leftrightarrow p_2$ 在 p_1 和 p_2 取同样真值时为真，在 p_1 和 p_2 取不同真值时为假。可用以下图表表示：

p_1	p_2	$p_1 \leftrightarrow p_2$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	真

（5）联接词¬（**否定**），真值形式 $\neg p_1$（读作非 p_1）。

$\neg p_1$称为p_1的否定式，简称否定式。$\neg$是日常联接词“非”的抽象。否定命题是一种特殊的复合命题，它只是一个命题的复合，相应的真值形式也是由一个命题变项和联接词$\neg$组成。根据我们对否定的理解，$\neg p_1$的真值情况可用以下图表表示：

p_1	$\neg p_1$
真	假
假	真

为了便于比较，将$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$的图表写在一起：

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_1 \leftrightarrow p_2$
真	真	真	真	真	真
真	假	假	真	假	假
假	真	假	真	真	假
假	假	假	假	真	真

§2 用真值形式表示复合命题

任何两个真值形式，可以用真值联接词联接起来，构成更为复杂的真值形式。如$p_1 \vee \neg p_1$，$\neg p_1 \rightarrow p_2$，$(p_1 \vee p_2) \wedge p_3$，$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$和$p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow p_4))$等。以后用$A, B, C, D$等表示一般的真值形式。根据真值形式的构成方法，如果A和B是真值形式，则$A \wedge B$，$A \vee B$，$A \rightarrow B$，$A \leftrightarrow B$和$\neg A$也是真值形式，它们也分别称为合取式，析取式，蕴涵式，等值式和否定式。

这样构成的真值形式，就其种类来说，是极其丰富的，就其

数量来说，是无限的。真值形式提供了我们从真假方面研究和分析复合命题的充分工具。

一个复合命题，无论多么复杂，总是具有一定的形式结构，从而能表示为一个真值形式。求一个复合命题的真值形式，一般分成两个步骤。

首先，确定复合命题的支命题，将不同的支命题代以不同的命题变项，将相同的支命题代以相同的命题变项。其次，用真假关系分析复合命题中的联接词。如果联接词是“并且”、“或者”、“如果…则”、“当且仅当”和“非”，则直接用五个基本的真值联接词来表示它们。如果联接词不是以上五个，就要想法在保持真假关系不变的条件下，将命题变换成可用五个基本真值联接词所能表示的新命题。还要注意，在一个复合命题中，有些联接词可能省略，需要将它们补上。

下面是一些具体的例子。

例1.1 如果甲是乙的父亲，乙是丙的父亲，则甲是丙的祖父。

这个命题中的三个支命题“甲是乙的父亲”、“乙是丙的父亲”和“甲是丙的祖父”各不相同，用不同的命题变项 p_1，p_2，p_3 来表示。在“如果”后面的两个支命题，虽然没有联接词，实际上等于用“并且”将它们联接起来。所以整个复合命题的真值形式就是 $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_3$。

例1.2 并非有些乌鸦是白的并且所有的乌鸦都不是白的。

注意在这里，“所有的乌鸦都不是白的”整个作为一个简单命题，用 p_1 表示。而“并非有些乌鸦是白的”是简单命题“有些乌鸦是白的”（用 p_2 表示）的否定。因此整个命题可表示为 $p_1 \wedge \neg p_2$。

例1.3 只要天不下雨，我就去跑步。

这个命题中的支命题是“天下雨”和“我去跑步”分别用 p_1 和 p_2 表示，“天不下雨”是“天下雨”的否定，就表示为 $\neg p_1$。