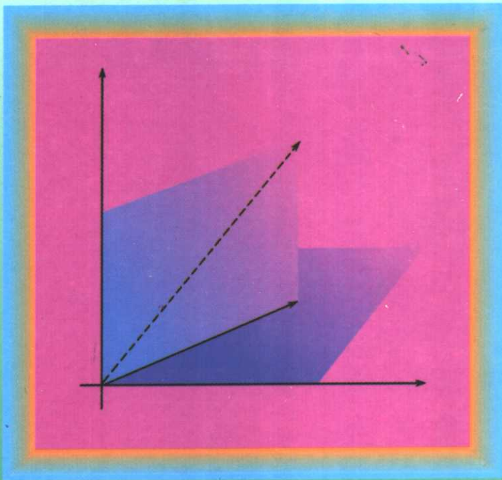
全国高等教育自学考试指定教材



工程数学

线性代数

（附工程数学线性代数自学考试大纲）

高等教育自学考试指导委员会组编

线 编

辽宁大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材

工程数学

线性代数

（附线性代数自学考试大纲）

全国高等教育自学考试指导委员会组编

辽宁大学出版社

1999 年·沈阳

图书在版编目（CIP）数据

工程数学：线性代数/魏战线编．—沈阳：辽宁大学出版社，1999.4

全国高等教育自学考试指定教材

ISBN 7-5610-3797-X

Ⅰ．工… Ⅱ．魏… Ⅲ．①工程数学-高等教育-自学考试-教材 ②线性代数-高等教育-自学考试-教材 Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 05876 号

辽宁大学出版社出版

（沈阳市皇姑区崇山中路66号　邮政编码 110036）

金城印刷厂印刷　　辽宁大学出版社发行

开本：850×1168 毫米 1/32　字数：240 千字　印张：9.75

印数：1—30，000 册

1999 年 6 月第 1 版　　1999 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑：王本浩　李洪革　责任校对：王小城

封面设计：邹本忠

定价：13.50 元

出版前言

高等教育自学考试教材是高等教育自学考试工作的一项基本建设。经国家教育部同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要。《工程数学（线性代数)》是为高等教育自学考试工科各专业组编的一套教材中的一种。这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《工程数学（线性代数）自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校的专家学者编写而成的。

工科各专业（本科）《工程数学（线性代数)》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用。现经组织专家审定同意予以出版发行。我们相信，随着高等教育自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999 年 2 月

编 者 的 话

编者按照全国高等教育自学考试指导委员会审定的本科《线性代数自学考试大纲》、并结合多年来在教学中积累的有益经验和体会、针对自学考试的特点，编写了此书。

全书共分五章：矩阵和行列式，向量空间，矩阵的秩和线性方程组，特征值与特征向量，实二次型，外加一个附录。线性代数是理工科各专业的必修课程之一，它的理论性和应用性都较强，概念较多，有些内容比较抽象。为了便于自学，使读者能更好地掌握本课程的基本内容，在本书的编写过程中，力求做到科学性和通俗性相结合。本书有以下特点：

(1) 突出了矩阵的方法。一开始就讲矩阵并引入矩阵的初等变换，并将矩阵的方法贯穿全书，这不仅为处理线性代数的有关基本问题提供了有力工具，而且有助于读者运用矩阵这一工具，提高其处理问题的能力。

(2) 内容处理上由直观到抽象，由具体到一般，由浅入深，循序渐进。例如，对向量空间的讨论就是紧密结合几何空间的具体例子和线性方程组的具体问题展开的。

(3) 突出重点，分散难点。对重点问题力求讲透，说理仔细，注意启发引导。对基本概念和基本理论加强了解释与说明，对重要的方法与计算步骤注意归纳总结。对某些较难的或次要的证明则略去，只讲清理论的意义及如何应用。

(4) 书中配备了大量典型的例题、有启发性的思考题和比较丰富的习题。每章后面还配有一套自测题，最后配有总自测题。读者可通过这些习题，更好地掌握线性代数的基本概念、

基本理论和基本方法，提高分析和解决问题的能力。自测题还可用于检查学习的效果。

本书力求叙述清晰，文字流畅，通俗易懂，易于自学。

书中带 * 号的内容是作为选学内容的，不作考试的要求。

经全国高等教育自学考试指导委员会机械类专业委员会审定，本书作为全国高等教育自学考试机械类、电子电工与信息类专业的自学考试教材。本书具有比较广泛的适用性，函授大学、电视大学、职工大学及成人教育有关专业等都可用来作为教材，全日制理工科高等院校的师生也可作为参考教材。

参加本书审稿并提出修改意见的有主审西安交通大学龚冬保教授、西安建筑科技大学崔荣泉教授和西安矿业学院褚维盘教授。参加审稿会讨论的还有西安交通大学杨林森教授。编者对以上各位教授在此一并表示感谢。

本书难免存在缺点和不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

1999 年 2 月 25 日

于西安交通大学

目　　录

第一章　矩阵和行列式

矩阵是现代科学技术不可缺少的数学工具，特别是电子计算机出现以后，矩阵的方法得到了更广泛的应用．本章主要介绍矩阵的概念及其运算，方阵行列式的概念及其计算．

§1.1　矩阵的概念

在平面直角坐标系中，坐标轴绕原点沿逆时针方向旋转 θ 角（图 1—1)，点 M 的新坐标（x'，y'）和旧坐标（x，y）之间的关系① 为

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases} \tag{1.1}$$

新旧坐标之间的这种关系显然可用矩形数表

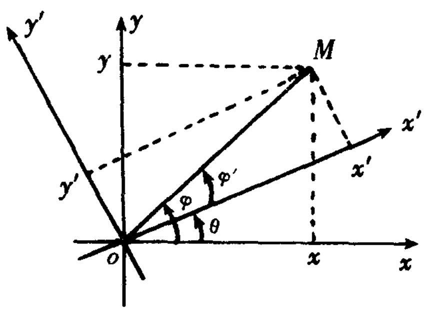


图 1—1

① 在图 1—1 中，设 $|OM| = r$，则有

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} 及 \begin{cases} x' = r\cos\varphi' \\ y' = r\sin\varphi'. \end{cases}$$

由于 $\varphi = \varphi' + \theta$，所以

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = r\cos(\varphi' + \theta) = r(\cos\varphi'\cos\theta - \sin\varphi'\sin\theta) \\ &= (r\cos\varphi')\cos\theta - (r\sin\varphi')\sin\theta = x'\cos\theta - y'\sin\theta \end{aligned}$$

同理可得 $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

来表示. 数学上把这种矩形数表就叫做一个**矩阵**.

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1, \cdots m$; $j=1, \cdots n$）排成的 m 行、n 列（横排的叫行，竖排的叫列）的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

称为一个 $\boldsymbol{m\times n}$ **矩阵**. 其中 a_{ij}称为该矩阵的第 i 行第 j 列**元素**，简称为该矩阵的（i，j）元素.

例如，矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

就是一个 2×3 矩阵，它的（1，2）元素是 -2.

通常用大写英文字母表示矩阵. 如果用 $\boldsymbol{A}$ 表示（1.3）中的矩阵，则它也可以简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，如果只强调它的行数和列数分别是 m 和 n，也可把它简记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

当 $m=n$ 时，矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$称为 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**或 $\boldsymbol{n}$ **阶矩阵**. 例如代表平面上坐标旋转变换的矩阵（1.2）就是一个 2 阶方阵. 对于方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，称元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所在的对角线为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线**，而称元素 a_{1n}，$a_{2,n-1}$，…，a_{n1}所在的对角线为 $\boldsymbol{A}$ 的**副（或次）对角线**.

我们也把 1 阶方阵 $[a]$ 写成 a，即把 1 阶方阵和一个数不加区分.

下面介绍几种重要的特殊矩阵.

1. 零矩阵

所有元素都是零的 $m\times n$ 矩阵，称为 $m\times n$ 零矩阵，记为

$\boldsymbol{O}_{m\times n}$或$\boldsymbol{O}$，即

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

2. 单位矩阵

主对角线上的元素都是 1，而其它元素全为零的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}$ 或$\boldsymbol{I}$，有时为了明确其阶数，也把它记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或$\boldsymbol{I}_n$.

3. 行矩阵与列矩阵

仅有 1 行的 $1\times n$ 矩阵

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$$

称为一个行矩阵或 n 维行向量．仅有 1 列的 $m\times 1$ 矩阵

$$\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

称为一个列矩阵或 m 维列向量．

4. 上（下）三角矩阵

主对角线下边的元素全为零的 n 阶方阵，称为上三角矩阵．例如，矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0, & 0 & 8\end{bmatrix}$$

就是一个 3 阶上三角矩阵. 类似地，把主对角线上边的元素全为零的方阵称为下三角矩阵.

5. 对角矩阵

主对角线以外的元素全为零的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

称为 n 阶对角矩阵，它也可简记成 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$.

从矩阵的定义可以看出，矩阵可以是各种各样的矩形数表. 为了判断矩阵的异同以及后面定义矩阵运算的需要，我们引入矩阵相等的概念. 简单地说，所谓两个矩阵相等，就是它们"完全相同"，用精确的数学语言来说就是：

定义 1.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$. 这里 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列数也相等，把这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 称为**同型矩阵**. 如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如

$$\begin{bmatrix} a+b & 4 \\ 0 & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & a-b \\ c & 3 \end{bmatrix}$$

意味着 $a+b=2$，$a-b=4$，$c=0$，$d=3$，因此有 $a=3$，$b=-1$，$c=0$，$d=3$.

注意两个不同型的矩阵必不相等. 特别注意两个不同型的零矩阵是不相等的（虽然它们的元素都是零），两个阶数不同的单位矩阵也是不相等的（虽然它们的形状类似）.

§1.2 消元法与矩阵的初等变换

本节对求解线性方程组的消元法作初步讨论，并由此介绍矩阵初等变换的概念.

1.2.1 线性方程组与矩阵

由 m 个方程、n 个未知量组成的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为**未知量**，a_{ij}是第 i 个方程中未知量 x_j 的**系数**（$i=1$，$\cdots$，m；$j=1$，$\cdots$，n），$b_i=(i=1,\cdots,m)$称为**常数项**. 如果 b_1，b_2，$\cdots$，b_m 不全为零，则称（1.4）为**非齐次线性方程组**，否则称（1.4）为**齐次线性方程组**.

线性方程组和矩阵有密切的关系. 由（1.4）的未知量的系数所组成的 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为方程组（1.4）的**系数矩阵**. （1.4）的常数项也可以组成一个 $m\times 1$ 矩阵，即列矩阵

$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

如果把 b 添写在系数矩阵A 的右边，便得到$m\times(n+1)$矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

称 $\overline{A}$ 为方程组（1.4）的**增广矩阵**. 显然，增广矩阵完全确定了线性方程组.

如果存在一组常数 c_1，c_2，…，c_n，使得当把 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，…，$x_n=c_n$ 代入方程组（1.4）后，每个方程都成为恒等式，则称 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，…，$x_n=c_n$ 为方程组（1.4）的一个**解**. 如果两个线性方程组有相同的解，则称它们是**同解**的.

1.2.2 消元法与矩阵的初等行变换

中学代数中已学过求解二元、三元线性方程组的消元法，这种方法也是求解一般线性方程组的有效方法. 一般消元法的基本思想是通过对方程组的一系列变换，消去一些方程中的若干个未知量（称为消元），把方程组化成易于求解的同解方程组. 那么，通过消元，要把方程组化成怎样的简单形式呢？消元的过程又都涉及到哪些变换呢？我们来看下边的例子.

例 1.1 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-2x_2-x_3=1 & \cdots ① \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 & \cdots ② \\ \qquad\quad x_2-x_3=1 & \cdots ③ \\ 2x_1+16x_2-14x_3=24 & \cdots ④\end{cases}$$

解 我们知道，未知量的个数愈少，方程组就愈容易求解．所以我们希望通过消元，使相邻两方程中，下边方程的未知量个数少于上边方程的未知量个数．先看 x_1，最上边的方程①含 x_1，因此保留方程①不变，利用它及加减消元法消去后边各方程中的 x_1，为此，把方程①的（-1）倍加到方程②上去（把第 i 个方程的 k 倍加到第 j 个方程上去，是指把第 i 个方程两端的 k 倍分别加到第 j 个方程的对应两端上去，注意在这个变换中，只有第 j 个方程改变了，第 i 个方程没有改变），把方程①的（-1）倍加到方程④上去，就把方程组化成为

$$\begin{cases}2x_1-2x_2-x_3=1 & \cdots ⑤ \\ \qquad 5x_2-4x_3=6 & \cdots ⑥ \\ \qquad\quad x_2-x_3=1 & \cdots ⑦ \\ \quad 18x_2-13x_3=23 & \cdots ⑧\end{cases}$$

化成的方程组中，除最上边的方程⑤外，后边 3 个方程都不再含 x_1．按照上面的思想，对后 3 个方程继续进行消元，先考虑 x_2，注意方程⑦中 x_2 的系数为 1，为了运算方便，将方程⑥与⑦的位置交换，方程组化成为

$$\begin{cases}2x_1-2x_2-x_3=1 & \cdots ⑨ \\ \qquad\quad x_2-x_3=1 & \cdots ⑩ \\ \qquad 5x_2-4x_3=6 & \cdots ⑪ \\ \quad 18x_2-13x_3=23 & \cdots ⑫\end{cases}$$

现在再利用方程⑩消去它下边各方程中的 x_2，为此，把方程

⑩的（-5）倍、（-18）倍分别加到方程⑪、⑫上去．方程组化成为

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 & \cdots ⑬ \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = 1 & \cdots ⑭ \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 1 & \cdots ⑮ \\ \qquad\qquad\; 5x_3 = 5 & \cdots ⑯ \end{cases}$$

化成的方程组中，除前两个方程外，后边两个方程都不再含 x_1 和 x_2，因此对后两个方程关于 x_3 进行消元，把方程⑮的（-5）倍加到方程⑯上去，就把方程组化成为（由于方程⑯化成了恒等式“$0=0$”，所以不再写出）

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 & \cdots ⑰ \\ x_2 - x_3 &= 1 & \cdots ⑱ \\ x_3 &= 1 & \cdots ⑲ \end{aligned}$$

上面最后这个方程组称为**阶梯形方程组**，其中各方程所含未知量的个数，从上一方程到下一方程在逐步减少，因此它就是我们希望转化的形式．要求出方程组的解，现在只需**逐步回代**：先把从⑲解出的 $x_3=1$ 代入⑱，得 $x_2=2$；再把 $x_3=1$，$x_2=2$ 代入⑰，得 $x_1=3$，于是得方程组的解

$$x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=1.$$

从例 1.1 可以看到用消元法求解线性方程组的全过程：首先选取含 x_1 的方程作为方程组的第 1 个（即最上面的）方程（必要时可通过交换两个方程的位置，把含 x_1 的方程调到最上面），并利用第 1 个方程消去它下边各方程中的 x_1；然后，对化成的新方程组，复盖住第 1 个方程，对余下的方程重复以上作法，即选取含 x_2 的方程作为第 1 个方程，并利用它消去它下边各方程中的 x_2．继续这样作下去，直至把方程组化成阶梯形方程组，这个过程称为**正向消元**．另一个过程是**回代过**