

青年自學叢書

初步學籌運

許國志等著

香港益羣出版社出版

青 年 自 學 叢 書

運 籌 學 初 步

許 國 志 等 著

香 港 益 羣 出 版 社 出 版

版權所有・翻印必究
一九七八年十月六版

運籌學初步
許國志等著

香港益羣出版社出版

香港干諾道西179-180號六樓A座

The Yi Chuin Publishing Co.

Block 'A' 5th Fl. 179-180 Connaught Rd., W.,
Hong Kong

快達鍍膠印刷廠承印

葵涌華星街保盈工業大廈六樓C座

目 錄

什麼叫做「運籌學」？

——關於本書內容的說明·····	1
------------------	---

第一章 規劃論

規劃論概述·····	6
物資調運·····	10
循環路線·····	16
裝卸工人的調配·····	19
最大通過能力·····	21
場地選擇·····	23
合理下料·····	26
機器的合理利用·····	31
作物佈局·····	36
水庫調度·····	38

第二章 對策論

對策論的研究對象·····	40
有限零和二人博弈·····	43
對策論的發展和應用·····	49

第三章 排隊論

排隊問題·····	51
顧客需要和機構經濟的協調·····	52
排隊現象的共性·····	52

各種排隊現象的特性·····	53
一個例子·····	54
排隊論應用概述·····	57
第四章 質量控制	
產品的規格和公差·····	59
標準化生產·····	60
產品質量的變異和造成原因·····	61
工序控制的基本想法和具體步驟·····	62
控制圖·····	65
產品的抽樣驗收·····	67
工序控制和標準化生產·····	70
產品系列化·····	73

什麼叫做運籌學？

——關於本書內容的說明

談到「運籌」這兩個字，人們就很自然地想到「史記」中有一句：「運籌帷幄之中，決勝千里之外。」這裏的運籌，是指軍事上的安排、調度、策劃等事。「運籌學」實際上就是關於安排、調度、策劃的一種學問，只不過它不限於軍事上應用，而是在工農商各業中普遍應用，甚至在下棋中也可以應用。而且現代生活中的運籌，也和古代大不相同了，它不像張良一個人在帳幕中的運籌，而是應用到了現代的數學方面，對各方面的安排、調度，作科學的分析，從而得出一個最經濟有效的決策。這種運籌方法，對現代青年來說，是人人需要知道的，而且也是人人會感興趣的。本書各章的內容，就是對現代運籌學作通俗易懂的介紹。

現代運籌學是一門很新的科學，關於它的第一本理論著作，出版於一九三九年，當時並沒有受到重視。到第二次世界大戰，由於現代化戰爭中出現一些新的問題，而這些問題又不屬於任何一門已知的學科，於是就先後在英美兩國，集中了許多行業的專家，共同研究。他們根據在本行業中所熟悉和掌握思路和方法，提出了解決這些問題的許多建議。並提出了「運籌學」這一名稱。

以後，運籌學又有了較快的發展，出現了許多新分

支。中國在一九五六年開始研究「運籌學」，一九五八年以後，積極展開了這項工作，許多數學工作者又作了更深入的研究，在理論上和應用上都取得了一些成果。

運籌學到底可以作怎樣的實際應用呢？在本書正文開始之前，我們先簡單地介紹一下。

不管在哪一行哪一業裏面，總有許多屬於安排、調度、策劃、控制等類型的問題。這些正是運籌學研究的對象。這些問題，雖然來自不同的部門，但却有共同的規律。運籌學就是去粗存精、由表及裏，抓住這些共同規律來進行分析，從而得出理論成果，並回過頭來將其利用於指導實踐。

例如物資調撥問題，從其業務角度說，就是研究在某一地區內，某項物資如何調撥，才能使總的運費最省。

又如農場設置問題，則是研究農場場地應該設在什麼地方，才能使莊稼從各塊地裏收割後，搬運到場地所花的總運輸量最小。

又如下料問題，則又是研究許多原材料如何裁割，才能使剩下的殘料最少。

這些問題經我們加以分析概括之後，便發現它們有着一些共性。首先，無論上述哪一個問題，它都有一些必須滿足的條件。例如在物資調撥問題裏，各地的供需求必須滿足？在下料問題裏，各件毛坯的規格必須符合，各原料的長短必須照顧。同時，滿足這些要求的方案也很多，可以供我們選擇，我們自然希望選擇一個最好的方案；這樣就又產生了選擇好壞的標準。例如在物資調撥問題裏，

總運費最小的就是最好的方案；在下料問題裏，零料最少的就是最好的方案。

粗畧地說，這三個問題，在經過分析概括之後，就都成爲在滿足既定要求的所有方案中，去選擇一個最好的方案的問題。研究這一個共同規律，就形成了運籌學的一個分支——規劃論的部分內容。

在許多生產實踐問題裏，常常牽涉到大量數據，有時問題的最終答案就必須以數字表出。例如在物資調撥問題裏，最終答案就是每一產地應向每一銷地調撥多少物資。而在另一些問題裏，雖然問題的本質是「質」的性質，例如產品的質量，但它却要借助於數量分析來加以表達。最突出的例子，就是一批產品的質量。當我們講一件產品的質量，就是說它是否合乎規格的問題。這裏也牽涉到數字，但只是一個衡量的問題，而不關乎數量關係。當我們講一批產品的質量時，則是說這一批產品裏，廢品的百分比，這就是一個數量關係的問題了。因此在許多生產實踐問題裏，如果我們能夠多着眼於數量分析，往往會能更好地解決問題。運籌學就強調這一要求。

凡事精打細算，以便胸中有數，這本來是衆所周知的，運籌學又豈能專美。問題是如何能夠做到胸中有數。這裏最好舉會計作爲一個例子。在小規模生產的時代，在一個手工業作坊裏，或者在一家小商店裏，一把算盤一本帳簿，也就能把帳目管得井井有條。但是，今天在一個大工廠裏，這樣就不能解決問題，而算帳也就逐漸形成一個專門學科——會計學。運籌學也正是如此。對於許多安

排、籌劃、控制等等的問題，在今天大規模生產的時代，如果仍舊憑藉一些樸素的想法、簡單的技巧、經驗的估算，就不再能解決問題，而必須有一些科學的、系統的方法，才能做到胸中有數。

一個物資調撥問題往往有成千、甚至上萬的方案，我們不能將其逐一比較，而選其最優。怎樣辦呢？規劃論中的一些方法，幫助我們解決了這個問題。

一批產品，動輒盈千累萬，我們不能逐一檢查，而決定其合格與否。怎樣辦呢？抽樣檢查的方法，幫助我們解決了這個問題。

這就是運籌學應運而生的原因。

根據以上所述，我們不難看出，由於運籌學要求精打細算，因而數學方法在其中起了重大的作用。特別是高速電子計算機的出現，使得許多利用運籌學處理的問題，能夠在容許的時間內，得到具體數值結果，而不致成為紙上談兵。

同時，由於運籌學的發展，一些古老的數學分支，或者有趣味的問題，又重新引起人們的注意，或得到新的應用。在運籌學草創初期，參加研究的人來自許多專業，其中有一些人今天仍舊留在運籌學隊伍裏，因而有許多運籌學問題的解決方法，蘊含着理化科學的味道，這無疑使得運籌學更加豐富多彩。正如許多自然科學和技術科學中，往往有理論和實驗兩部分一樣，運籌學也有其所謂運籌實驗。近代模擬技術和計算技術的發展，為它創造了條件。我們相信在今後的年代裏，運籌實驗將有長足的進展。

在這本小冊子裏，我們將對運籌學的幾個較重要的（而不是全部）分支，即規劃論、對策論、排隊論、質量控制等，作一些初步介紹。

編 者

第一章 規 劃 論

規 劃 論 概 述

在工業、農業、商業和交通運輸中，我們經常碰到一些要求對現有資源、設備進行統一分配、全面安排和合理調度的問題。例如：幾個工業城市需要一定數量的某一規格的煤，而同時有幾個產煤地能生產這種煤；在滿足各工業城市的需要，和適應產煤地供應能力的條件下，怎樣調撥才能使所花費的總運輸力（指總的運輸「噸公里」數）或總運費最小呢？這就是常說的「物資調運」問題的一個例子。

又如：某工廠有很多種不同零件，要在幾種不同機牀上加工，而各種零件在不同機牀上加工所用的時間是不同的；如何安排加工順序，才能使總的加工時間最短呢？這是工廠內作業計劃安排問題。

再如：某一個農場，有幾種不同地理條件的土地，要種幾種莊稼，怎樣來安排一個春播計劃，才能使秋季總收穫量為最大？這便是作物的佈局問題。

這類問題，在日常的生產活動中是很多的，簡直不勝枚舉。

上述諸問題，分屬於各個不同的業務部門，有着各種不同的特點。但我們只要仔細分析一下，就能找出這些問

題的許多共性。

首先，上述問題的解決，都必須滿足一定的條件。不管煤怎麼調配，都必須要滿足每個工業城市的需要。不能因為調配上的便利而不滿足某個城市的需要。同時也不能超出某一產煤地的供應能力。不管零件的加工順序如何安排，每個零件都必須按照一定程序進行加工。農場作物種植計劃的安排，要滿足供銷的需要，而且必須在農場現有人力物力的條件下進行。不滿足這些條件，就不可能真正地解決上述問題。這便形成了規劃論中的「約束條件」。這些各種各樣的條件，可以用一些數學式子來描述。例如：我們用 x_{11} 代表第一個產煤地供給第一個城市的煤的數量（右下角第一個數碼，代表第幾個產煤地；第二個數碼代表第幾個城市。下同）， x_{21} 代表第二個產煤地供給第一個城市煤的數量，……。假如有五個產煤地，以 a_1 代表第一個城市需要煤的數量，那麼，五個產煤地供給第一個城市煤炭數量之和，應該滿足第一個城市所需要的煤。因此，可用下面一個數學式子來描述：

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = a_1$$

當然，對第二個、第三個和第四個需煤城市，分別也有類似的一個方程式。同樣地，讓 x_{12} 、 x_{13} 、 x_{14} 分別代表第一個產煤地，運給第二、第三和第四個工業城市煤的數量； b_1 代表第一個產煤地產煤的數量。則對第一個產煤地來說，可以寫出這樣一個約束方程式：

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = b_1$$

其次，上述問題的解決，有許多不同方案可以選

擇。例如甲產地的煤，可以運給 A 城市，也可以運給 B 城市，也可以分別給 A 和 B 都運去一部分。我們的目的當然不是隨便去找一個方案，而是要從這許許多多的方案中，選取一個最優的方案。最優的標準是相對的，要根據問題的性質和要求來確定。在煤的調運中，一般是要求所花費的總運輸力（或總運費）最小；在零件加工順序的安排中，希望總的加工時間最短；對農場的種植計劃，要求總產值最大；……。這些最優要求，用數量形式來描述，就成了所謂規劃論中的「目標函數」。例如在煤的調運問題中，讓 c_{11} 代表第一個產煤地到第一個需煤城市的最短距離（或者是單位運輸費用）， c_{21} 代表第二個產煤地到第一個需煤城市的最短距離，……。那麼， $c_{11}x_{11}$ 就表示從第一個產煤地，調運 x_{11} 數量的煤給第一個城市所花的運輸力； $c_{12}x_{12}$ 表示從第一個產煤地，運往第二個城市 x_{12} 數量所花的運輸力；等等。它們的和：

$$\begin{aligned} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{21}x_{21} \\ & + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + \cdots \\ & + c_{41}x_{41} + \cdots + c_{51}x_{51} + c_{52}x_{52} + c_{53}x_{53} \\ & + c_{54}x_{54} \end{aligned}$$

即代表整個調運計劃所花去的總運輸力（噸公里或總運費）數。而我們的目的，是要這總的和數達到最小，這就是所謂運輸問題的「目標函數」。雖然在不同問題中，其目標函數的表現形式可能不一樣；但在數學上看來，却不外是求函數的最大（或者最小）值。需要注意，規劃論中要求的最優，是指我們所考慮問題的整個最優，而不是某兩地

之間的局部最優。也就是說，在編制煤的調運計劃時，並不單單考慮某一產煤地，供應給那幾個城市的運費最小，而是考慮整個調運計劃完成後，所花的總運費最小。

可是，滿足一些約束條件的方案是很多的，在日常工作中，我們只能單憑經驗，就想到的很少幾種方案中選取一個，這自然不可能保證所選的方案，一定就是最優的了。而規劃論的研究，却為我們提供了一些科學方法，能儘快地找到整個問題的最優方案。在許多複雜的問題中，規劃論的方法，有時還需要借助電子計算機才能實現。

在規劃論中，就所研究問題的性質和要求來看，還可分為線性規劃、非線性規劃和動態規劃三個部分。在所考慮的問題裏，就數學上說，如果「目標函數」和「約束條件」都是線性方程（或線性不等式），則稱這類規劃問題為「線性規劃」；反之，稱為「非線性規劃」。例如在物資調運問題中，假如運費與運量之間的關係是成正比例，則物資調運問題就可歸結為線性規劃問題。假如運費與運量之間的關係不是成正比例，這時，物資調運問題就成為非線性規劃問題了。另外，在上面所考慮的問題中，整個分配或者安排，只要一旦找到了一個最優方案，問題就完全解決了。但是有些問題，不是一次最優選擇就能確定整個最優規劃，而必須要多次最優確定。例如：農場制定種植計劃時，如果只確定某一季度的最優種植計劃，顯然並不是整個最優種植計劃。因為這一季的種植計劃，要影響到下一季的接茬和來年的輪種。因此，整個種植計劃的安排，必須是在整個輪種周期內，若干季最優計劃的確定。

也就是說，需要多階段的最優確定。這種要多階段確定的規劃，便稱為「動態規劃」。相對地，如果只考慮某一季度的種植計劃，就稱為「靜態規劃」（可能是線性規劃，也可能是非線性規劃）。目前動態規劃和非線性規劃發展還很不成熟，應用的數學知識較多；因此在這本小冊子裏，我們只介紹一些簡單的線性規劃問題，而沒有接觸到動態規劃和非線性規劃。

物資調運

前面已經談到過煤的調運問題。這裏我們將比較詳細地談談這類問題，並介紹這類問題的一個簡單解法——圖上作業法。

所謂物資調運問題，就是有許多地方需要某一類物資，而另一些地方生產（或者儲存）這一類物資。要求把這類物資從生產地（或儲存點，以後簡稱「發點」）調運給需要地（以後簡稱「收點」）；在滿足產銷要求的條件下，我們希望總的運輸力最省。

究竟有哪些浪費運輸力的現象呢？

通常浪費運輸力的不合理現象有兩種：一種是對流，一種是迂迴。

所謂對流，就是在一段路線上有同一種物資往返運輸。請看圖 1，一方面把鹽從 A 城運往 D 城，而另一方面又有鹽從 E 城經 C 城運往 B 城。很明顯，在 C 城與 B 城之間便出現了「對流」現象。

再看迂迴。在成圈的道路，從一點到另一點有兩條

道路可走，一條是小半圈，一條是大半圈。如果運輸物資

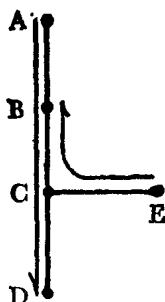


圖 1 對流

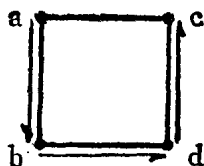


圖 2 迂迴

不是走的小半圈，而走了大半圈，如圖 2，不是直接從 a 地到 c 地，而是從 a 地經過 b 地、d 地再到 c 地，便是「迂迴」了。

從線性規劃理論上可以證明，一個物資調運方案，如果沒有對流和迂迴，它一定就是運輸力最節省の合理方案（也即最優方案）。

這裏必須說明，在實際的物資調運工作中，物資調運の合理與否，不能單單從運輸力最省（或運費最少）來衡量，還需要考慮其他許多因素。但在一般情況下，運輸力最省（或運費最少），是可以作為衡量物資調運計劃是否合理的一種重要標誌的。而規劃論所研究的合理運輸，就是指運輸力最省（或運費最少）の合理運輸。所以我們要消滅不合理運輸，就必須徹底消滅對流和迂迴。

也許有人會說：對流和迂迴這樣簡單的現象，一看就

知，還需要什麼規劃論呢？

事實並非如此。在比較複雜的調運工作中，不像我們想像得那麼簡單。例如圖3，由甲、乙、丙、丁分別把一噸物資運給A、B、C、D。表面上看，似乎沒有出現迂迴；但是，只要我們數數箭頭所走的方格數，就發現同一個方向走了10格（甲→A，2格；乙→B，1格；丙→C，2格；丁→D，5格），顯然走了大半圈（全圈共有16格）。

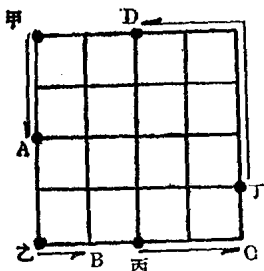


圖3 不容易看出的迂迴

這只不過是一個簡化的例子，在實際問題裏，交通線縱橫交錯，常常有好多個成圈的路線，單憑眼看是困難的。

線性規劃中的圖上作業法，能幫助我們徹底消滅物資調運工作中的對流和迂迴現象。現在把它的方法簡單敘述如下：

第一種情況：假如道路不成圈，方法便很簡單，只要按口訣「抓各端、各端供需歸鄰站」辦事，就能找到最優方案。例如圖4所示的一個物資調運問題，圓圈裏的數字是站的標號，圓圈旁的數字是收發量。其中標有負號（-）的代表收點的收量，不帶負號的表示發點的發量。現在①、④、⑤三點為端點，按「各端供需歸鄰站」：①的5噸供給②，②尚缺1噸；④由③供應，於是③缺1噸；⑤供應給③，多1噸；再供應給②。這樣就得出了一個最優