

高等职业技术学院通用教材

应用数学习题集

YINGYONGSHUXUE XITIJ

屈宏香 / 主编

黄旭 / 主审

44
7

中国铁道出版社

高等职业技术学院通用教材

应用数学习题集

屈宏香 主编
黄旭 主审

中 国 铁 道 出 版 社

2002年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书为《高等职业技术学院通用教材·应用数学》上、下册的配套习题集。作者根据教育部最新制定的“高职高专高等数学课程教学基本要求”，并结合高职教育的特点选编了这本习题集，以期对学生更好地学习《应用数学》有所帮助。

本书适用于招收高中毕业生和中职毕业生的三年制高职教育，也可供三年普通大专的教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学学习题集/屈宏香主编. —北京：中国铁道出版社，2002.2
高等职业技术学院通用教材
ISBN 7-113-04527-8

I. 应… II. 屈… III. 应用数学—高等学校：技术学校—习题 IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007004 号

书 名：应用数学学习题集

作 者：屈宏香 等

出版发行：中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑：赵 静 编辑部电话：(路电)021-73133
(市电)010-51873133

封面设计：陈东山

印 刷：北京市燕山印刷厂

开 本：850×1168 1/32 印张：5.75 字数：148 千

印 本：2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷

印 数：1 ~ 6000 册

书 号：ISBN 7-113-04527-8/O·90

定 价：10.80 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书，如有缺页、倒页、脱页者，请与本社发行部调换。

发行部电话：(路电)021-73169 (市电)010-51873169

高等职业技术学院通用教材

编 委 会

主 任:	黄 旭	钟建宁	
副 主 任:	姚和芳	贾崇田	赵承荻
常务编委:	肖 翔	肖耀南	廖兆荣
	彭 勇	刘铭良	齐绍琼
	杨利军	黎晓明	曾江初
	屈宏香	丁茂华	廖镇卿
	王新初		
本书主编:	屈宏香		
本书主审:	黄 旭		
本书参编:	陈雄波	廖镇卿	胡忠安
	黄晓津	岑荣康	李寿军
	李绍中		

前言

摆在大家面前的是一本与《应用数学》配套使用的习题集。它是根据教育部最新制定的“高职高专高等数学基本要求”编写的,是高职学生、普通大专学生、成人高校学生深入学习应用数学不可缺少的参考书。本书有以下特色:

(1) 重视基本概念、基本方法、基本运算的训练,有利于对基本知识的理解和掌握。

(2) 针对容易出错、容易混淆、容易误解的知识点选题,有利于对基本知识的深化和扩展。

(3) 注重在与实际问题、专业课问题联系紧密的知识点上选题,有利于对基本知识的应用和提高。

(4) 注意选编综合性强、串联知识较多、解法独特的习题,有利于对基本知识的综合运用和迁移。

全书共编有 1561 道题,包括一元微积分、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数、概率论与数理统计等内容。其中陈雄波编 257 道题(第一章函数与极限),廖镇卿编 170 道题(第二章导数与微分),胡忠安编 139 道题(第三章微分中值定理和导数应用),屈宏香编 542 道题(第四章不定积分,第六章常微分方程,第八章拉普拉斯变换),黄晓津编 148 道题(第五章定积分),岑荣康编 125 道题(第七章无穷级数),李寿军编 58 道题(第九章线性代数),李绍中编 122 道题(第十章概率论与数理统计)。书后附有习题答案和提示。

由于成书仓促、水平有限,错漏之处,恳请同行和读者指正。

编 者

2002 年 3 月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
绝对值的运算	(1)
函数值的求法	(1)
函数的定义域	(3)
建立函数关系	(4)
函数性质的讨论	(5)
函数的图形	(7)
双曲函数及复合函数	(8)
数列的极限	(9)
函数的极限	(10)
无穷小与无穷大	(11)
极限的求法	(12)
杂题	(14)
函数的连续性	(15)
第二章 导数与微分	(17)
导数的概念	(17)
求函数的导数	(18)
杂题	(19)
导数的应用	(20)
微分及其应用	(21)
高阶导数	(23)
隐函数的导数	(24)

参变量方程的导数	(25)
第三章 微分中值定理和导数的应用	(27)
第四章 不定积分	(37)
不定积分的概念	(37)
简单不定积	(38)
换元积分法	(38)
分部积分法	(40)
分式有理函数的积分	(41)
三角函数有理式的积分	(42)
杂题	(42)
第五章 定积分及其应用	(47)
定积分的概念	(47)
定积分的性质	(47)
上限(或下限)为变量的定积分	(48)
定积分的计算	(49)
杂题	(51)
广义积分	(51)
平面图形的面积	(52)
体积	(53)
平面曲线的弧长	(54)
定积分在力学及物理学上的应用	(54)
定积分的其他应用	(55)
第六章 常微分方程	(57)
基本概念	(57)
可分离变量的微分方程	(58)
齐次微分方程	(59)

线性微分方程及贝努利微分方程	(59)
可降阶的高阶微分方程	(61)
二阶线性微分方程	(62)
应用题	(63)
杂题	(66)
第七章 无穷级数	(70)
第八章 拉普拉斯变换	(76)
第九章 线性代数	(81)
第十章 概率论与数理统计	(90)
习题答案	(104)

第一章 函数与极限

绝对值的运算

解不等式:

1.1 $|x| < 3.$

1.2 $|x| > 2.$

1.3 $|x-2| < 5.$

1.4 $|x+3| > 6.$

1.5 $|x+5| \leq 3.$

1.6 $|x-3| \geq 8.$

1.7 $x^2 < 4.$

1.8 $0 < (x-2)^2 \leq 4.$

1.9 $|x| > x.$

1.10 $|x^2-3x+2| > x^2-3x+2.$

求下列方程的实根:

1.11 $|x| = x+1.$

1.12 $|x| = x.$

1.13 $|x| = -x.$

1.14 $|\sin x| = \sin x + 2.$

1.15 $|2x+3| = x^2.$

函数值的求法

1.16 设 $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, 求 $f(1), f(-1), f(0), f(a), f(a+b).$

1.17 若 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(t^2), [\varphi(t)]^2.$

1.18 若 $f(x) = x^2 - 3x + 5$, 求 $f(x+\Delta x), f(x+\Delta x) -$

$f(x)$.

1.19 设 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$, 求 $f(f(x))$.

1.20 已知 $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = 3^x$, 求 $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $f(\varphi(0))$, $\varphi(f(1))$.

1.21 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

1.22 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} (x > 0)$, 求 $f(x)$.

1.23 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

1.24 若 $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } x = 1 \\ 1 & \text{当 } 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求 $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$,

$f\left(\frac{6}{5}\right)$, $f(2)$.

1.25 设 $\varphi(x) = \begin{cases} 2^x & \text{当 } -1 < x < 0 \\ 2 & \text{当 } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{当 } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 求 $\varphi(3)$, $\varphi(2)$,

$\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(-0.5)$.

1.26 设 $F(t) = \begin{cases} |\sin t| & \text{当 } |t| < 1 \\ 0 & \text{当 } |t| \geq 1 \end{cases}$, 求 $F(1)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $F(-2)$.

1.27 若 $\varphi(x) = \ln x$, 证明 $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \varphi(x(x+1))$.

1.28 若 $F(x) = x^2 + \cos x$, 证明 $F(x) = F(-x)$.

1.29 若 $\varphi(\theta) = \tan \theta$, 证明 $\varphi(a+b) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{1 - \varphi(a)\varphi(b)}$.

1.30 已知 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, 求证 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

函数的定义域

求 1.31~1.55 题各函数的定义域:

$$1.31 \quad y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$1.32 \quad y = \frac{1}{x^4 + 1}.$$

$$1.33 \quad y = \sqrt{3x + 5}.$$

$$1.34 \quad y = \frac{1}{x} + \sqrt{1 - x^2}.$$

$$1.35 \quad y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$1.36 \quad y = \frac{1}{\ln(1-x)}.$$

$$1.37 \quad y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

$$1.38 \quad y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$1.39 \quad y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}.$$

$$1.40 \quad y = \sqrt{\ln \frac{5x - x^2}{4}}.$$

$$1.41 \quad y = \ln(\ln x).$$

$$1.42 \quad y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}.$$

$$1.43 \quad y = \frac{1}{\sin x - \cos x}.$$

$$1.44 \quad y = \tan(x + 2).$$

$$1.45 \quad y = \cot \sqrt{x}.$$

$$1.46 \quad y = \arccos \sqrt{2x}.$$

$$1.47 \quad y = \arcsin \frac{x-3}{2}.$$

$$1.48 \quad y = \ln \sin x.$$

$$1.49 \quad y = \sqrt{3-x} + \arccos \frac{x-2}{3}.$$

$$1.50 \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{当 } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{当 } x > 1 \end{cases}.$$

$$1.51 \quad y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{当 } -1 < x < 2 \\ x^3 - 3 & \text{当 } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

$$1.52 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{当 } x < 0 \\ x & \text{当 } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{当 } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$$1.53 \quad y = \ln \left(\cos \frac{\pi}{x} \right).$$

$$1.54 \quad y = \frac{\ln |x-1|}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$1.55 \quad y = \sqrt{\lg \frac{x+1}{x-2}}.$$

1.56 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 问:

(1) $f(x^2)$

(2) $f(\sin x)$

(3) $f(x+a)$ ($a > 0$)

(4) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$)

的定义域各是什么?

下列各题中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数?

$$1.57 \quad f(x) = \frac{x}{x}, g(x) = 1.$$

$$1.58 \quad f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x.$$

$$1.59 \quad f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2.$$

$$1.60 \quad f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}.$$

建立函数关系

1.61 一物体作直线运动, 已知阻力的大小与物体运动的速度成正比, 但方向相反. 当物体以 1 m/s 的速度运动时, 阻力为 2 gf , 试建立阻力与速度间的函数关系.

1.62 电压在某电路上等速下降. 在实验开始时电压为

12 V, 经过 8 s 后电压降落到 6.4 V, 试把电压 U 表为时间 t 的函数.

1.63 已知三角形中有两边长分别是 a 与 b , 设 α 为该两边之间的夹角, 试将三角形的面积 S 表为夹角 α 的函数, 并求其定义域.

1.64 已知圆锥的体积为 V , 试把圆锥的底半径 R 表为其高 h 的函数, 并求其定义域.

1.65 一物体受压缩弹簧的推力而运动. 若这弹簧一端固定于原点, 原长 $2l$, 压缩后长度为 l , 弹性系数为 k . 试将物体所受力表为距离的函数(只考虑弹簧长度由 l 变为 $2l$ 的过程).

1.66 设 M 为密度不均匀细杆 OB 上的一点, 若 OM 的质量与 OM 的长度的平方成正比. 又知 $OM = 4$ 单位, 其质量为 8 单位. 试求 OM 的质量与长度间的函数关系.

1.67 某公共汽车路线全长 30 km, 票价规定如下: 乘坐 5 km 以下者收费 1 元, 乘坐 5~20 km 者收费 1.5 元, 20 km 以上者收费 2 元. 试将票价表为路程的函数.

1.68 在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱, 试将圆柱的体积表为其高的函数, 并求此函数的定义域.

1.69 高为 H 、半径为 R 的正圆锥体, 被平行于底面的平面相截, 求截面的面积与截面到顶点的距离之间的函数关系.

1.70 在直角梯形 $ABCD$ 中(如图 1-1 所示), 底边 $AD = 10$, $BC = 7$, 高 $CD = 12$, 引平行线 $MN \parallel CD$, MN 与顶点 A 的距离 $AM = x$. 试把阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

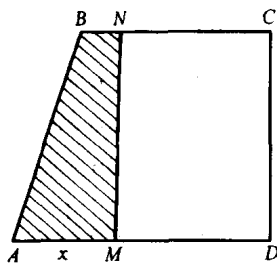


图 1-1

函数性质的讨论

指出 1.71~1.80 题各函数的奇偶性:

1.71 $y = x^4 - 2x^2$.

$$1.72 \quad y = x - x^2.$$

$$1.73 \quad y = \cos x.$$

$$1.74 \quad y = 2^x.$$

$$1.75 \quad y = \sin 3x.$$

$$1.76 \quad y = \sin x - \cos x.$$

$$1.77 \quad y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

$$1.78 \quad y = e^{-x^2}.$$

$$1.79 \quad y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

$$1.80 \quad y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}.$$

$$1.81 \quad \text{证明函数 } y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ 为奇函数.}$$

1.82 证明: 不论 $f(x)$ 是定义在 $(-l, l)$ 内的什么函数, $f(x) + f(-x)$ 都是偶函数, 而 $f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

1.83~1.92 题各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$1.83 \quad y = \sin^2 x.$$

$$1.84 \quad y = \sin x^2.$$

$$1.85 \quad y = x \cos x.$$

$$1.86 \quad y = \cos 2x.$$

$$1.87 \quad y = \sin \pi x.$$

$$1.88 \quad y = \sin \frac{1}{x}.$$

$$1.89 \quad y = \sin(x + 1).$$

$$1.90 \quad y = 3\cos(2x - 1).$$

$$1.91 \quad y = |\sin x|.$$

$$1.92 \quad y = 4.$$

验证 1.93~1.96 题各函数在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的:

$$1.93 \quad y = 3x - 1.$$

$$1.94 \quad y = 2^{x-1}.$$

$$1.95 \quad y = \ln x + x.$$

$$1.96 \quad y = x^3.$$

验证 1.97~1.100 题各函数在所给区间内是单调减少的:

$$1.97 \quad y = x^2, (-\infty, 0].$$

$$1.98 \quad y = \cos x, [0, \pi].$$

$$1.99 \quad y = 2^{-x}, (-\infty, +\infty).$$

$$1.100 \quad y = -2x + 1, (-\infty, +\infty).$$

求 1.101~1.106 题各函数的反函数:

$$1.101 \quad y = \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$1.102 \quad y = \frac{2^x}{2^x + 1}.$$

$$1.103 \quad y = 3 \sin \frac{x-1}{x+1}.$$

$$1.104 \quad y = 1 + \ln(x+2).$$

$$1.105 \quad y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$1.106 \quad y = \begin{cases} x & \text{当 } -\infty < x < 1 \\ x^2 & \text{当 } 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x & \text{当 } 4 < x < +\infty \end{cases}.$$

$$1.107 \quad \text{验证: 函数 } f(x) = \frac{ax-b}{cx-a} \text{ 的反函数就是它本身.}$$

函数的图形

作出 1.108~1.115 题各函数的图形:

$$1.108 \quad y = |x|.$$

$$1.109 \quad y = -|x-2|.$$

$$1.110 \quad y = \frac{1}{x^2}.$$

$$1.111 \quad y = |x^2 - 1|.$$

$$1.112 \quad y = 1 - \cos x.$$

$$1.113 \quad y = |\sin x|.$$

$$1.114 \quad y = 2x + 1, x \in \{1, 2, 3\}.$$

1.115 $y = 2^x, x \in [0, 1)$.

1.116 利用 $y = \sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1) $y = \sin 2x$;

(2) $y = \frac{1}{2} \sin x$;

(3) $y = \frac{1}{2} \sin(x - 1)$;

(4) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1.117 利用 $y = 2^x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1) $y = 2^x + 1$;

(2) $y = 3 \cdot 2^x$;

(3) $y = 2^{2x}$.

1.118 作函数 $y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{当 } x < 0 \end{cases}$ 的图形.

1.119 作函数 $y = \begin{cases} |x - 1| & \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{当 } x > 2 \text{ 或 } x < 0 \end{cases}$ 的图形.

1.120 已知函数 $f(x)$ 以 2 为周期, 且

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{当 } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{当 } 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

试在 $(-\infty, +\infty)$ 内作出 $y = f(x)$ 的图形.

双曲函数及复合函数

证明 1.121 ~ 1.129 题各关系式:

1.121 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

1.122 $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$.

1.123 $2\cosh x \cdot \sinh x = \sinh 2x$.

1.124 $\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh \alpha \cdot \cosh \beta \pm \cosh \alpha \cdot \sinh \beta$.

1.125 $\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cdot \cosh \beta \pm \sinh \alpha \cdot \sinh \beta$.

$$1.126 \quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$1.127 \quad 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

$$1.128 \quad \sinh x + \cosh x = e^x.$$

$$1.129 \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$$

将 1.130~1.133 题各函数表成 y 是 x' 的函数:

$$1.130 \quad y = u^2, u = x + 1.$$

$$1.131 \quad y = \sqrt{u^3 + 1}, u = \tan x.$$

$$1.132 \quad y = \cos u, u = \log_2 v, v = 1 + x^2.$$

$$1.133 \quad y = 1 + u, u = \cos v, v = \sqrt{k}, k = 2^x.$$

指出 1.134~1.144 题各函数的复合过程:

$$1.134 \quad y = \sin^5 x.$$

$$1.135 \quad y = \sin x^5.$$

$$1.136 \quad y = \sin^2 6x.$$

$$1.137 \quad y = \sqrt{3 - x^2}.$$

$$1.138 \quad y = \sqrt{\cos x^2}.$$

$$1.139 \quad y = \sqrt[3]{(1+x)^2}.$$

$$1.140 \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1.141 \quad y = 2^{\sin^2 x}.$$

$$1.142 \quad y = a^{\sqrt[3]{x^2+1}} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$1.143 \quad y = \sqrt{\frac{1 + \sin x^2}{1 - \sin x^2}}.$$

$$1.144 \quad y = \arctan \frac{1}{1-x^2}.$$

数列的极限

指出 1.145~1.148 题各数列的极限: