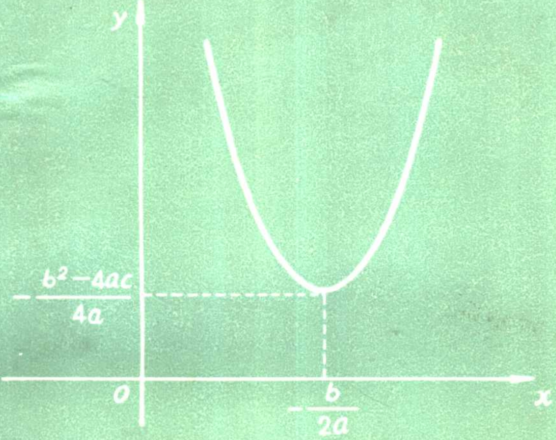
中学生课外读物



BU DENG SHI

不等式

郭顺生

河北人民出版社

中学生课外读物

不　等　式

郭顺生

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　6印张　126,000字　印数：1—22,500　1984年6月第1版

1984年6月第1次印刷　统一书号：7086·1149　定价：0.53元

前　言

不等式是中学数学里的重要内容之一。本书比较全面地讲述了有关不等式的各种问题，可供中学生课外阅读及青年自学，也可供中学教师教学参考。

本书取材力求全面。为了便于自学，叙述尽量由浅入深、通俗易懂，并且给出较多的典型例题。每章、节之后都有一定数量的习题和练习题供读者练习，以巩固所学知识。书末附有习题的答案或提示。

本书插图由李惠芳同志绘制。

限于编者水平，书中缺点、错误在所难免，望读者指正。

编者

1983年5月

目　录

第一章　不等式的概念及其性质

§1　不等式的概念

1. 实数的大小

比较数的大小，是我们从小就接触到的概念．一个五岁的孩子就知道3块糖比2块糖多．用数学的符号来表示就是“$3>2$”，读作“3大于2”．但是，$-3>-2$吗？这就并非每人都能说清楚了．为了说明这个问题，我们将实数（零、正、负有理及无理数）表示在数轴上，如图1所示．

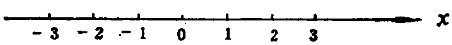


图 1

可以看出，数由左至右，依次增大．可见位于右边的数比位于左边的数大．-2位于-3的右方，所以$-2>-3$．这是几何上的解释．现在我们从正负数的概念出发，来定义大小的含义．

任给两个实数a，b：

若$a-b$为正数，则称a大于b，记作$a>b$；

若$a-b$为负数，则称a小于b，记作$a<b$；

若$a-b$为零，则$a=b$．

例如，$-2-(-3)=1$ 是正数，∴ $-2>-3$；又如，$2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}$ 是负数，∴ $2\sqrt{2}<3\sqrt{2}$。

若 a、b 均为实数，则以下关系有而且仅有一个成立：$a=b$，$a>b$，$a<b$。可见任何两个实数都是可以比较的。但要注意，虚数间没有大小的规定，本书中所谈之数均指实数。

还有两种符号 $a\geqslant b$ 和 $a\leqslant b$，各读作"a 大于或等于 b"及"a 小于或等于 b"。前者 $a\geqslant b$ 其意义为 $a>b$ 或 $a=b$ 必有一种关系成立。如 $3\geqslant 2$，也有 $2\geqslant 2$。类似的，可以写 $1\leqslant 2$ 及 $2\leqslant 2$。这是初学者应该注意的。

两数或两代数式之间用不等号"$>$"、"$<$"、"$\geqslant$"和"$\leqslant$"之一连接起来的式子，称为不等式。特别，符号"$>$"、"$<$"表示严格不等式。不等式被不等号分为两部分，称为不等式的左边和右边。

如果几个不等式都是左边大于右边，或者都是右边大于左边，那么这几个不等式称为同向不等式。如 $7>3$ 和 $5>2$ 即为同向不等式。

如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，那么称这两个不等式为异向不等式。如 $7>3$ 和 $2<5$ 为异向不等式。

2. 含代数式的不等式

仅含数的不等式是比较简单的。如 $3+2>4$ 是显然的。有一些稍微复杂一点，如判断 $\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{19}$ 是否正确？虽然不能一下看出来，但稍微计算一下也就显然了。$\sqrt{7}+\sqrt{10}=5.808$，$\sqrt{3}+\sqrt{19}=6.091$，∴ $\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{19}$ 是正确的。因此仅含数的不等式用不着特殊研究，数学中也主要是研究含有代数式的不等式。以后

我们将研究含代数式的不等式的各种问题。这里我们先举几个简单例子，通过研究两个代数式的差的正负来比较它们的大小。

例 1 试比较 $(x+1)(x-3)$ 和 $(x+2)(x-4)$ 的大小。

解 $\because$ $(x+1)(x-3)-(x+2)(x-4)$

$=(x^2-2x-3)-(x^2-2x-8)=5>0$，

$\therefore$ $(x+1)(x-3)>(x+2)(x-4)$。

例 2 试比较 a^2+1 和 $2a$ 的大小。

解 $\because$ $a^2+1-2a=(a-1)^2$，

$\therefore$ 当 $a=1$ 时，$(a-1)^2=0$，于是 $a^2+1=2a$；

当 $a\neq1$ 时，$(a-1)^2>0$，于是 $a^2+1>2a$。

综合起来有：$a^2+1\geqslant 2a$，等号当且仅当 $a=1$ 时成立。

例 3 试比较 $3a+1$ 与 $2a+1$ 的大小。

此题如果认为 $3a+1$ 一定比 $2a+1$ 大，那就错了。因为 a 是字母，可以代表各种不同的数，因而必须区别 a 的不同情况分别考虑。

解 $\because$ $(3a+1)-(2a+1)=a$，

$\therefore$ 当 $a>0$ 时，$3a+1>2a+1$；

当 $a<0$ 时，$3a+1<2a+1$；

当 $a=0$ 时，$3a+1=2a+1$。

显然 $3a+1$ 与 $2a+1$ 之间不能不分情况写出统一的不等式。

以上几例都是很简单的代数式的比较，通过这些例子可以看出代数式之间的大小与代数式中字母所代表的数有关。至于复杂的代数式的比较，可以通过本书后面所讲的“解不等式”、“不等式的证明”等逐步认识。

练习 1

比较下列各题中两数或两代数式的值的大小：

1. a 和 a^2。

2. $\sqrt{a^2}$ 和 a。

3. $\operatorname{tg} 200°$ 和 $\operatorname{tg} 25°$。

4. $(a+5)(a+7)$ 和 $(a+6)^2$。

5. $(\sqrt{a}-1)^2$ 和 $(\sqrt{a}+1)^2$。

6. a^2+b^2 和 $2ab$。

§2　不等式的种类

我们知道等式有两类：一类是恒等式，如，$5-2=3$，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 等。另一类等式就是方程式，如，$2x+1=3x-1$。这个等式中含有字母 x，欲使这个等式成立，x 是不能任意取数值的。这个等式只在 $x=2$ 时才成立。

与等式类似，不等式也可分为两类，一类叫绝对不等式，如

$$5>2,\quad 1+x^2>0,\quad a^2+1\geqslant 2a.$$

在这类不等式中，其中字母取任何实数值时，不等式都是成立的。这类不等式和等式中的恒等式相类似。我们知道恒等式是需要证明的，类似的绝对不等式也是需要证明的。

另一类不等式称为条件不等式，如，

$$2x>1,\quad a^2+1>2a.$$

在这类不等式中，其中字母只能取某些实数值，不等式才能成立。如，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$2x>1$ 才能成立；当 $a\neq 1$ 时，

$a^2+1>2a$ 才能成立。这类不等式和等式中的方程相类似。方程需要求解，条件不等式也需要求出使不等式成立的未知数的范围，这就是解不等式。使不等式成立的未知数的取值范围称为不等式的解。

下面举例说明一下这两类不等式。

例 1 试判断下列不等式，哪些是绝对不等式？哪些是条件不等式？哪些不能成立？

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}>\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}$；

(2) $|x|+1>0$；　　(3) $-x^2-1>0$；

(4) $2x-2>0$。

解 (1) $\because$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}>\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}$$

显然成立。

此不等式不含字母，故为绝对不等式。

(2) $\because$ $|x|$ 非负，故 $|x|+1>0$ 对任意实数 x 总是成立的，故此不等式为绝对不等式。

(3) $\because$ x^2+1 总是正数，故 $-x^2-1$ 总是负数。不等式 $-x^2-1>0$ 对任意实数 x 都不能成立。这也是条件不等式的一种，或者说此不等式无解。

(4) 显然只有将 $x>1$ 的数代入不等式 $2x-2>0$，此不

等式才能成立．故不等式为条件不等式．

例 2 试证绝对不等式：$(a+1)^2+a^2>2a(a+1)$．

证 根据不等式的定义，研究

$$[(a+1)^2+a^2]-2a(a+1)=[(a+1)-a]^2=1>0,$$

$$\therefore \quad (a+1)^2+a^2>2a(a+1).$$

最后说明一点，条件不等式还有一些特殊的类型：如果不等式的两边都是含未知数的多项式，称为整不等式（后面要讲到的一元一次不等式，一元二次不等式，高次不等式都属整不等式）；如果不等式的两边都是含未知数的分数式或无理式，则称为分式不等式或无理不等式，这些又都称为代数不等式；其他的还有三角不等式，指数不等式，对数不等式等（这三种都属超越不等式），后面还要讲到，这里就不多谈了．

练习 2

1．证明下列绝对不等式：

(1) $(x+1)(x-1)>(x-2)(x+2)$；

(2) $(x+5)(x^2+1)>(x+2)(x^2+1)$．

2．通过观察确定下列不等式的解：

(1) $x+1>0$；　　(2) $x^2<1$；

(3) $x^2-1<0$；　　(4) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$；

(5) $(x-1)^2>0$．

§3 不等式的性质

上节曾谈到，绝对不等式需要证明，条件不等式需要求解，这些都需要应用不等式的性质．我们知道解一元一次方

程 $2x+1=3x-2$，需要进行移项、合并同类项等步骤，最后得出：$x=3$是方程的解。那么类似的对于一元一次不等式 $2x+1>3x-2$，我们也可以进行移项，合并同类项等步骤，最后得出不等式的解 $x<3$。但是这样作是不是合理呢？这就需要研究有关不等式运算的性质。

不等式的某些性质和等式类似，而有些性质却和等式不同，初学者要特别注意那些和等式不同的地方。

下面我们将列出常用的不等式性质，其证明方法是根据不等式的定义。要证明 $a>b$，只要证明 $a-b>0$ 就可以了。

性质 1　若 $a>b$，则 $b<a$。反之若 $b<a$，则 $a>b$。

根据不等式的定义知道此性质是显然的。这个性质称为不等式的对逆性质，即当不等式的左右两边对调时，与原来的不等式反向。根据这个性质，以后研究解不等式时，只需研究一种方向的不等式即可。如研究一元一次不等式时，只需研究形如 $ax+b>cx+d$ 的不等式的解法。因为 $a_1x+b_1<c_1x+d_1$ 显然可以化为前一种形式 $c_1x+d_1>a_1x+b_1$。

性质 2　若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$。同样若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$。

证　$\because\ a>b$，$\therefore\ a-b>0$，

又　$b>c$，　$\therefore\ b-c>0$。

两个正数相加仍为正数，

$\therefore\ (a-b)+(b-c)>0$。

即　$a-c>0$。　$\therefore\ a>c$。

这个性质称为不等式的传递性质。但是应用此性质要注意 $a>b$，$b>c$ 的条件。若 $a_1>b$，$a_2>b$，则不能断定 a_1，a_2 的大小。如 $5>3$，$4>3$，而 $5>4$；$5>3$，$6>3$，而 $5<6$。

性质 3　若$a>b$，则$a+c>b+c$。

证　由$a>b$，知$a-b>0$。

$\therefore$　$(a+c)-(b+c)=a-b>0$。

于是　　　　　　$a+c>b+c$。

这个性质叫做加法的单调性质，指不等式两边可以加上相等的部分。由这个性质可以得出：不等式中任何一项改变符号后可以从一边移到另一边。如$2x+1>x$，两边同加上$-(x+1)$就得到$(2x+1)-(x+1)>x-(x+1)$，即$2x-x>-1$，相当于右边x变号后移至左边，左边1变号后移至右边，从而解出$x>-1$。可见解不等式常用到这一点，这和解方程是类似的。

性质 4　若$a>b$，$c>0$，则$ac>bc$。

　　　　若$a>b$，$c<0$，则$ac<bc$。

证　$\because$　$a>b$，　　$\therefore$　$a-b>0$。

(1) 当$c>0$时，因为正数的乘积仍为正数，

$\therefore$　$c(a-b)>0$，　　即　$ac-bc>0$，

于是　　　　　　$ac>bc$。

(2) 当$c<0$时，因为正数乘负数得负数，

$\therefore$　$c(a-b)<0$，　　即　$ac-bc<0$，

于是　　　　　　$ac<bc$。

(3) 当$c=0$时，显然$ac=bc=0$。

由于此性质应用很多，初学者又容易出错，故应特别予以注意。

这个性质表示当不等式两边同乘一个正数时，不等号不变。如$4>3$，两边同乘数2，得$8>6$仍然成立。又如$-3>-4$，两边同乘数2，得$-6>-8$。相反，当不等式两边同

乘一个负数时，不等号变向，如$4>3$，两边同乘数-2，得$-8<-6$。不等号和原不等式反向。又如$-3>-4$，两边同乘数-2得：$6<8$，不等号的方向也改变了。初学者应注意这个性质和等式不同。等式两边同乘一个数，两边仍相等。但不等式两边同乘一数，其结果就需要根据乘数的性质来确定。乘数为正，不等号方向不变，乘数为负，不等号变向。乘数为零时，显然不等式转化为等式$0=0$。我们举几个例子说明它的应用。

例 1 解不等式$-2x(x^2+1)>x^2+1$。

解 x不论为任何实数都有

$$x^2+1>0,$$

$\therefore$

$$-\frac{1}{2(x^2+1)}$$

为负数。用此数乘原不等式两边，得到：

$x<-\frac{1}{2}$。（注意所得不等式与原不等式反向）

此即原不等式的解。

例 2 若θ是锐角。问$-\frac{\theta}{2}+45°$是什么范围的角？

解 已知θ为锐角，

即

$$0°<\theta<90°.$$

此不等式乘以$-\frac{1}{2}$得到：

$$0°>-\frac{\theta}{2}>-45°,$$

即

$$-45°<-\frac{\theta}{2}<0°.$$

不等式各边再加$45°$得：

$$0^\circ < -\frac{\theta}{2} + 45^\circ < 45^\circ.$$

故 $-\frac{\theta}{2} + 45^\circ$ 是 0° 和 45° 之间的角。

例 3 若 $a > b$，那么 $a^2 > b^2$ 是否成立？

解 $\because$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$，

已知 $a > b$，即 $a - b > 0$，那么 $a^2 - b^2$ 的正负应依赖于 $a+b$ 的正负。因而需要分情况讨论。

当 $a + b > 0$ 时，

$$(a+b)(a-b) > 0,$$

$$\therefore \quad a^2 > b^2.$$

当 $a + b < 0$ 时，

$$(a+b)(a-b) < 0,$$

$$\therefore \quad a^2 < b^2.$$

当 $a + b = 0$ 时，

$$(a+b)(a-b) = 0,$$

$$\therefore \quad a^2 = b^2.$$

因而当 $a > b$ 时 $a^2 > b^2$ 未必成立，只在 $a + b > 0$ 的情况下，$a^2 > b^2$，才成立。举两个数可以明显看出。$-2 > -3$，而 $(-2)^2 \ngtr (-3)^2$。所以用含字母的因子乘不等式两边时，需要注意讨论这个因子的符号。

例 4 若 $a^3 < -1$，求证：$a^4 > -a$。

证 $\because$ $a^3 < -1$， $\therefore$ a 必为负数，用 a 乘不等式 $a^3 < -1$ 的两边得

$$a^4 > -a.$$

性质 5 若 $a > b$，$c > d$，则 $a + c > b + d$。同样，若 $a < b$，$c < d$，则 $a + c < b + d$。

证 ∵ $a>b$, ∴ $a-b>0$.

又 $c>d$, ∴ $c-d>0$.

因而 $(a-b)+(c-d)>0$,

即 $(a+c)-(b+d)>0$,

∴ $a+c>b+d$.

这个性质表示两个同向不等式可以相加，仍得一同向不等式。这里所说同向不等式是指形如$a>b, c>d$的两不等式，或形如 $a<b$, $c<d$ 的两不等式。而 $a>b$, $c<d$ 称为异向不等式，注意两个异向不等式是不能相加的。例如，$3>2$, $1<3$，若此两不等式两边分别相加得：$4<5$。而又如 $3>2$, $0<\frac{1}{2}$，相加得$3>\frac{5}{2}$。所以两个异向不等式相加后所得不等式的方向不能确定。

对性质5可以作一个简单的推广：若$a_1>b_1, a_2>b_2, \cdots, a_n>b_n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots+b_n$。这个推广可以利用性质5和数学归纳法得出。

性质6 若$a>b$, $c<d$，则$a-c>b-d$。同样，若$a<b$, $c>d$，则$a-c<b-d$。

证 已知 $a>b$, $c<d$,

利用性质4知 $-c>-d$.

再由性质5将$a>b$与$-c>-d$相加得

$$a-c>b-d.$$

这个性质说明两个异向不等式可以相减，所得不等式与被减式同向。但要注意两个同向不等式不能相减。例如：$3>1, 2>1$，而$3-2>1-1$；又$3>1, 4>1$，而$3-4<1-1$。所以两个同向不等式相减，其差式的不等号不能确定。

性质7 若$a>b$，$c>d$，且a,b,c,d皆为正数，则$ac>bd$。同样，若$a<b$，$c<d$，且a，b，c，d皆为正数，则$ac<bd$。

证法1 由$a>b$，$c>0$知$ac>bc$。
同样，由$c>d$，$b>0$，知$cb>bd$。由不等式的传递性可知$ac>bc>bd$。

$$\therefore \qquad ac>bd.$$

证法2 根据定义，欲证$ac>bd$，只需证明

$$ac-bd>0.$$

由$a>b$，$c>d$，知$a-b>0$，$c-d>0$。

欲证$ac-bd>0$，下面我们应用一种叫做插项的技巧，这种方法在高等数学中常用到。

$$\begin{aligned} ac-bd &= ac-bc+bc-bd \\ &= c(a-b)+b(c-d). \end{aligned}$$

可以看出此式右端两项均为正值，故

$$ac-bd>0，从而\ ac>bd.$$

这个性质表示两个两边都是正数的同向不等式相乘，仍得一同向不等式。应用数学归纳法可以把此性质推广到有限多个不等式的乘积上。若$a_1>b_1$，$a_2>b_2$，…，$a_n>b_n$，且a_1，b_1，a_2，b_2，…，a_n，b_n均为正数，则$a_1a_2\cdots a_n>b_1b_2\cdots b_n$。

在应用这个性质时，要注意相乘的两个不等式两边都是正数这个条件，否则就会出错误。如$3>1$，$-2>-3$，两式相乘得$-6>-3$。显然是错误的结论。下面举一例，其推理是错误的，结论也是错误的。读者试分析它错在哪里？