全国各类成人高等学校招生统一考试
大专起点升本科考前辅导班教材

# 高等数学复习指导

（理科类）


丛书主编　郭光耀
本书主编　刘　晓



科学普及出版社

全国各类成人高等学校招生统一考试
大专起点升本科考前辅导班教材

# 高等数学复习指导
## （理科类）

丛书主编　郭光耀
本书主编　刘　晓

科学普及出版社
·北　京·

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学复习指导（理科类）/刘晓主编. －北京：科学普及出版社，1998. 9
（全国各类成人高等学校招生统一考试大专起点升本科考前辅导班教材/郭光耀主编）
ISBN 7-110-04467-X

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-成人教育-高等学校-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13725 号

科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路 32 号 邮政编码:100081
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京国防印刷厂印刷

*

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:11.5 字数:290 千字
1998 年 9 月第 1 版 1998 年 9 月第 1 次印刷
印数:1－10000 册 定价:19.00 元

# 内 容 提 要

本书为专科升本科考前辅导教材之一，内容包括一元函数微积分、多元函数微积分、级数和常微分方程。按考试大纲的要求，本书精选了各类基本题型的例题，并有较详细的解答，最后附有1997年和1998年专科升本科高等数学试题、参考答案和评分标准，高等数学标准样卷、参考答案和评分标准以及三套模拟试题及参考答案。本书既是专科升本科应试者的复习用书，同时也是各类院校大专生和电大、夜大学生的参考书。

**丛书主编** 郭光耀

**丛书编委** （按姓氏笔划排序）

于　一　仁　静　方　铭　王　奇　王小平
王爱萍　牛　辉　包　海　朱光贵　纪　浩
刘　晓　刘亚玲　刘　嘉　李寿山　何虎生
陈洪育　沈俊燕　国　炜　岳金波　周伯君
赵达夫　闻　跃　郭光耀　徐　刚　唐恒志
傅建国　魏发辰

**本书主编** 刘　晓

**本书编者** 刘　晓　赵达夫　龚漫奇　李思泽　黎传琦
吴灵敏　王秋媛

**策划编辑** 肖　叶
**责任编辑** 桂民荣
**责任校对** 张　燕
**封面设计** 曲　文
**正文设计** 孙　俐

# 前　言

近几年来，报考成人高等学校专科升本科的人数不断增加．为了帮助考生在短时间内系统地复习高等数学知识，掌握重点，熟悉报考命题的内容，应广大考生的要求，我们根据专科升本科《高等数学》考试大纲的要求，编写了这本书.

对每位考生来说，最关心的问题是怎样复习和备考，才能与考试要求相吻合，从而取得满意的考试成绩.要解决这个问题，首先必须理解考试大纲中所规定的内容，搞清楚哪些内容是主要的，哪些是次要的，搞清楚这些内容在深度与广度上要求到什么程度以及在考试中经常出现的题型有哪些，只有对上述问题做到心中有数以后，才能复习好所考课程，在考试中取得好成绩.

为了回答考生们所关心的问题，我们组织了具有丰富的教学经验，而且对专科升本科考试中的高等数学试题有深入研究的几位教师，经过反复讨论并认真精选例题，共同努力编写了《高等数学(理科类)》和《高等数学复习指导(理科类)》书.

我们采用的方法是：

第一，为了帮助考生深刻理解考试大纲中的要求，本书的章节顺序不仅与考试大纲上的要求完全一致，而且每一章和每一节的开头都指明本部分的重点内容，精选了各类基本题型的例题，并做了较详细的解答.

第二，为了更具体地说明各部分的要求深度、广度和考生所应具备的知识能力，并让考生了解各部分的常见题型，我们在本书的最后给出了 1997 年和 1998 年专科升本科高等数学试题、参考答案和评分标准，给出了一套高等数学标准样卷以及它的参考答案和评分标准，同时给出了三套模拟试题及参考答案，最后对专科升本科高等数学考试试题作了比较详细的分析.

按照本科高等数学学科知识和能力的要求，它包括一元函数微积分(含函数、极限与连续)，多元函数微积分(含向量代数与空间解析几何)，级数以及常微分方程四部分内容说明.

本书不仅是专科升本科应试者的一本复习用书，同时也是各类院校中的大专生和电大、夜大学生的一本好的参考书.

本书由刘晓主编，参加本书编写的有刘晓、赵达夫、龚漫奇、李思泽、黎传琦、吴灵敏、王秋媛等老师，最后由赵达夫、刘晓审校、定稿.在本书的编写过程中，得到了魏发辰老师的大力支持，在此一并表示感谢!

由于我们的水平有限，时间仓促，书中难免有错误及不妥之处，我们真诚欢迎读者给予批评指正.

编　者

1998 年 1 月

# 目　　录

# 第一章　函数、极限、连续

**主要内容：**

1. 函数的概念及函数的一些简单性质．

2. 数列极限和函数极限的概念及其性质、运算．

3. 函数的连续定义、间断点概念及闭区间上连续函数性质．

**复习重点：**

1. 函数概念、基本初等函数及其定义域、图像、简单性质．会求初等函数的定义域．

2. 掌握求极限的方法及极限存在的重要条件．特别注意分段函数分界点的极限求法及连续性的研究．

**习题与解答：**

习题 1.1

1.1 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1)　$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$

(2)　$f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3)　$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=\sqrt[3]{x-1}$

(4)　$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}, g(x)=x+2$

1.2　求下列函数的定义域：

(1)　$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　(2)　$y=\dfrac{x}{\sin x}$

(3)　$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$　　(4)　$y=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\ln(x+1)}$

(5)　$y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$　　(6)　$y=\arcsin(1-x)+\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

(7)　$y=\dfrac{1}{x^2+3x+6}$　　(8)　$y=\lg\sin x$

1.3　下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1)　$y=\dfrac{|x|}{x}$　　(2)　$y=x^2+e^x+e^{-x}$

(3)　$y=\sqrt[3]{x}+\cos x$　　(4)　$y=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$

(5)　$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$　　(6)　$y=x(x-1)(x+1)$

1.4　下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期．

(1)　$y=1+\sin\pi x$　　(2)　$y=\cos(x-2)$

(3)　$y=x\sin x$　　(4)　$y=\arctan(\tan x)$

(5) $y=\sin^2 x$　　(6) $y=\sqrt{\tan x}$

1.5 下列各函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\lg\operatorname{tg} x$　　(2) $y=\sin^3(1+2x)$

(3) $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$　　(4) $y=\left(\arctan\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$

(5) $y=f\left(\sin\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

1.6 设 $\varphi(x)=x^2,\psi(x)=2^x$,求 $\varphi[\psi(x)],\psi[\varphi(x)]$.

1.7 设 $f(t)=\begin{cases}\sin t & -2<t<0\\ 1+t^2 & 0\leqslant t<2\end{cases}$ 求 $f(1),f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),f(4)$.

1.8 在 $f(x)=1+\ln x$ 的定义域内,求方程 $f(e^{x^2})-5=0$ 的根.

1.9 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,已知 $f(-2)=10,f(0)=1,f(2)=7$,求 $a,b,c$.

1.10 一球的半径为 $r$,作外切于球的圆锥(图 1.20),试将其体积表示为高的函数,并说明定义域.

1.11 已知水渠横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40°$(图 1.21),当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 $S_0$ 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$与水深 $h$ 之间的函数关系式,并说明定义域.

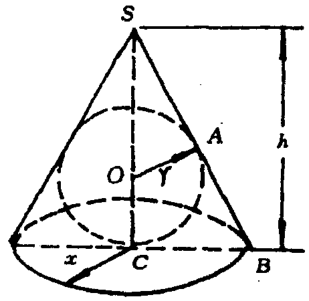


**图 1.20**

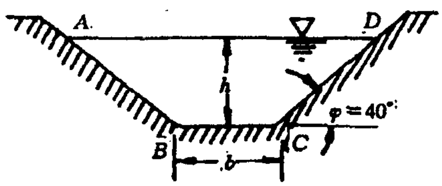


**图 1.21**

1.12 设 $f(x)$的定义域为[0,1],求下列函数的定义域:

(1) $f(\lg x)$　　(2) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$

习题 1.2

1.13 观察下列数列和函数的极限是否存在?若存在,极限值是什么?

(1) $u_n=(-1)^n$　　(2) $u_n=\dfrac{3n-5}{n}$　　(3) $u_n=\sqrt{n}+1$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\cos x,\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\cos x,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$

(5) $\lim\limits_{x\to0}2^x,\quad \lim\limits_{x\to3}2^x,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}2^x$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3},\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3},\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}$

(7) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant-1\\ 1+x, & x<-1\end{cases}$ 当 $x\to-1^+$, $x\to-1^-$, $x\to-1$

(8) $\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}$

1.14 若数列$\{x_n\}$收敛,而数列$\{y_n\}$发散,那么数列$\{x_n+y_n\}$是收敛的,还是发散的?为什么?

1.15 若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都发散，问数列$\{x_n+y_n\}$，$\{x_ny_n\}$，$\{\frac{x_n}{y_n}\}$是否必定发散？

1.16 无穷大一定是无界数列，无界数列一定是无穷大吗？举例说明.

1.17 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$能否推出$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$？又由$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$能否推出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$？为什么？

1.18 是不是任何两个无穷小量都能进行比较？

1.19 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^2+x}{3+x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ （$n$ 为自然数）

(9) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

(10) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x})$

(11) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3(3x-2)^2}{(2x)^5+3}$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ $(\beta\neq 0)$

(17) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

(18) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

(21) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x}$

(22) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4+x}{2+x})^x$

(23) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

(24) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$ $(a>0)$

(25) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$

(26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}$

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

(28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}$

(29) $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\frac{1}{1-x}$

(30) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{\cos x}{\cos a})^{\frac{1}{x-a}}$

(31) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{n^{10}-7n+1}{4n^{10}-8n^8+4n^2-1}$

(32) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$

(33) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(34) $\lim\limits_{n\to +\infty}[\sin\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{(n+1)}{2}\pi]$

(35) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}$

(36) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

(37) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

(38) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

(39) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$ (40) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+100}$

(41) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$ (42) $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{y}\right)^{y}$

(43) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ (44) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\alpha x-\sin^2\beta x}{x\sin x}$

(45) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x}$ (46) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

(47) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$ (48) $\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$

(49) $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\dfrac{a}{x})^{x^2}$ $(a\neq0)$ (50) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{3x}$

1.20 求 $a,b$ 的值，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x-\sqrt{x^2-1}-(ax+b)]=0$

1.21 试写出 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+(\ln x^2)^{2n+1}}$ 的分段函数表达式.

1.22 当 $x\to\infty$ 时，下列函数哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？哪些是无界函数但不是无穷大量？

(1) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ (2) $\dfrac{e^x}{x^4}$ (3) $x^3\cos x$

1.23 当 $x\to0$ 时，下列函数哪些是比 $x$ 高阶的无穷小？哪些是与 $x$ 同阶的无穷小？哪些是与 $x$ 高阶的无穷小？

(1) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ (2) $\tan x-\sin x$

(3) $x^4+\sin 4x$ (4) $\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x)$

1.24 用夹逼定理证明：

$$\lim_{p\to+\infty}f(p)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$$

其中 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,k)$

$$f(p)=(\sum_{i=1}^{k}a_i{}^p)^{\frac{1}{p}}$$

习题 1.3

1.25 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，$g(x)$ 在点 $x_0$ 间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 $x_0$ 必间断？

1.26 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，问 $|f(x)|$ 在点 $x_0$ 是否连续？

1.27 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，能否断定当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 必有极限？又若当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限，能否断定 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续？

1.28 求下列极限．

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$ (3) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$ (5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$ (6) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$ (8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$ (9) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

(10) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\sin(1-x)}$ (11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$ (12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ (14) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{2a+x}{a+x}$

1.29 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x & (x<0)\\ a+x & (x\geqslant0)\end{cases}$$

应当怎样选择数 $a$，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数．

1.30 下列函数在指定点是否连续？若不连续，指出该点是哪一类间断点．

(1) $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 在 $x_0=0$ 处

(2) $f(x)=\begin{cases}\ln x & (x>0)\\ x^2 & (x\leqslant0)\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 处

1.31 找出函数 $y=\frac{1}{1-\frac{x}{1-e^{1-x}}}$ 的间断点，并判断其类型．

1.32 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x+\sin x}{x} & (x\neq0)\\ 2 & (x=0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性．

1.33 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2} & (x<0)\\ \frac{1}{2} & (x=0)\\ x^2+1 & (x>0)\end{cases}$ 的连续性．

1.34 设函数 $f(x)=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ x^2+ax+b & (-1\leqslant x\leqslant1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，试确定 $a,b$ 的值．

1.35 证明：方程 $x\cdot2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根．

1.36 试证方程 $x=a\sin x+b$ $(a>0,b>0)$ 至少有一个正根，且不超过 $a+b$．

1.37 设 $f(x),g(x)$ 都是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$，试证在 $(a,b)$ 内至少有一个 $\xi$ 点，使 $f(\xi)=g(\xi)$ 成立．

1.38 证明方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ ($n$ 为奇数，$a_0\neq0$) 至少有一个实根．

1.39 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x} & (x\geqslant1)\\ a\cos\pi x & (x<1)\end{cases},$$

选择 $a$ 的值，使函数处处连续．

1.40 设

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x & (|x|\leqslant1)\\ |x-1| & (|x|>1)\end{cases},$$

求 $f(x)$的间断点,并判别间断点类型 .

1.41 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$的间断点,并判别间断点的类型 .

1.42 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数,试确定 $a,b$.

习题 1.1 解答

1.1 (1),(2),(4)不相同,(3)相同.

注意:两个函数相同指的是这两个函数具有相同的定义域和对应法则.

1.2 (1) $[-1,1]$ (2) $(k\pi,(k+1)\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(3) $(-\infty,+\infty)$ (4) $(-1,0)\cup(0,3)$

(5) $[1,4]$ (6) $[0,1]$

(7) $(-\infty,+\infty)$ (8) $(2k\pi,(2k+1)\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

1.3 (1),(6)为奇函数

(2),(4),(5)为偶函数

(3)非奇非偶函数.

1.4 (1) 是.周期为 2. (2) 是.周期为 $2\pi$.

(3) 不是. (4) 是.周期为 $\pi$.

(5) 是.周期为 $\pi$. (6) 是.周期为 $\pi$.

1.5 (1) $y=\lg u,\ u=\tan x$

(2) $y=u^3,\ u=\sin v,\ v=1+2x$

(3) $y=2^u,\ u=v^2,\ v=\sin W,\ W=\dfrac{1}{x}$

(4) $y=u^2,\ u=\arctan v,\ v=\dfrac{1-x}{1+x}$

(5) $y=f(u),\ u=\sin v,\ v=\dfrac{x}{1+x^2}$

1.6 $\varphi[\psi(x)]=2^{2x}=4^x$ $\psi[\varphi(x)]=2^{x^2}$

1.7 $f(1)=2,f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\dfrac{\pi^2}{4}$

$f(-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f(4)$无定义.

1.8 提示:

由 $f(x)=1+\ln x$,则 $f(e^{x^2})=1+\ln e^{x^2}=1+x^2$,由方程 $f(e^{x^2})-5=0$ 的根,即求方程 $1+x^2-5=0$满足 $x>0$ 的根,解出 $x=2$.

1.9 提示:

$$\begin{cases}4a-2b+c=10\\ c=1\\ 4a+2b+c=7\end{cases}\quad 解出\quad \begin{cases}a=\dfrac{15}{8}\\ b=-\dfrac{3}{4}\\ c=1\end{cases}$$

1.10 $V=\dfrac{\pi r^2h^3}{3[(h-r)^2-r^2]}$, $2r<h<+\infty$

1.11 $L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h, 0<h<\sqrt{S_0\tan 40^\circ}$

1.12 (1) $[1,10]$

(2) $f(x+a)$定义域$[-a,1-a]$, $f(x-a)$定义域$[a,1+a]$

$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为两函数定义域的公共部分.

由 $1-a$ 与$a$ 的大小而定:

1°. 若 $1-a<a$, 即 $a>\frac{1}{2}$, 则函数无定义, 即定义域为空集.

2°. 若 $1-a=a$, 即 $a=\frac{1}{2}$, 则函数定义域是 $x=\frac{1}{2}$.

3°. 若 $1-a>a$, 即 $0<a<\frac{1}{2}$, 则函数定义域为$[a,1-a]$.

习题 1.2 解答

1.13 (1) 不存在 (2) 存在, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=3$ (3) 不存在

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$ 都不存在

(5) $\lim\limits_{x\to 0}2^x=1$, $\lim\limits_{x\to 3}2^x=2^3$, $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$不存在, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$

(7) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$不存在.

(8) $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to-\infty}2^t=0$

1.14 发散反证法:

若数列$\{x_n+y_n\}$收敛, 则

$$y_n=(x_n+y_n)-x_n$$

由极限的四则运算法则知 $\{y_n\}$收敛, 而已知数列$\{y_n\}$发散, 产生矛盾.

1.15 不一定.

例: $x_n=n$, $y_n=-n$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$都发散, 而数列$\{x_n+y_n\}$为 0, 0, 0, …收敛;

$\{\frac{x_n}{y_n}\}$为 −1, −1, −1, …, 收敛.

再例: $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n+1}$ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$都发散;

而 $\{x_ny_n\}$为 −1, −1, −1, …, 收敛.

1.16 不一定.

例: 数列$\{x_n\}$取值为 1, 0, 2, 0, 3, 0, …, $n$, 0, …, 此数列无界, 但不是无穷大.

1.17 能.

不能. 例如: $x_n=(-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$, 但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

1.18 不是.

例: $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$,

当 $x\to 0$ 时, 都是无穷小量, 但这两个无穷小量是无法比较的, 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在}.$$

1.19 （1） $-9$ （2） 1 （3） “$\frac{0}{0}$”型，消去公共零因子，0 （4） 3 （5） $\infty$

（6） “$\frac{0}{0}$”型，消去公共零因子，$-\frac{1}{2}$ （7） “$\frac{0}{0}$”型，分母有理化，再消去公共零因子，$-2\sqrt{2}$

（8） 解：“$\frac{0}{0}$”型，将分子因式分解，找出公共零因子$(x-1)^2$

$$x^{n+1}-(n+1)x+n=x(x^n-1)-n(x-1)$$
$$=(x-1)[x(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-n]$$

其中方括号内用 $x=1$ 代入其值仍为 0，说明有$(x-1)$因子，再分解因式

$$x^{n+1}-(n+1)x+n$$
$$=(x-1)[(x^n-1)+(x^{n-1}-1)+\cdots+(x-1)]$$
$$=(x-1)^2(x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\cdots+n)$$
$$\text{原式}=\lim_{x\to1}(x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\cdots+n)$$
$$=1+2+3+\cdots+n$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

（9） “$\frac{0}{0}$”型，分子与分母同时有理化，$-2$

（10） “$\infty-\infty$”型，通分，1 （11） “$\infty-\infty$”型，有理化，$\frac{a+b}{2}$ （12） 分子、分母同除以 $3^n$，并用 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$ 这一结论得 3 （13） 先分别求出分子、分母的通项的和，再求极限得$\frac{4}{3}$ （14） $x=0$ 时，为 0；$x\neq0$ 时，为 $x$ （15） 只看分子、分母最高次幂的系数，$\frac{9}{4}$

（16） $\alpha\neq0$，$\frac{\alpha}{\beta}$；$\alpha=0$，结论仍成立 （17） 1

（18） “$0\cdot\infty$”型，令 $u=1-x$，$x=1-u$，当 $x\to1$ 时，$u\to0$

$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x=\lim_{u\to0}u\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right)=\lim_{u\to0}u\ \cot\frac{\pi}{2}u=\lim_{u\to0}\frac{u}{\tan\frac{\pi}{2}u}\quad \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{u}{\sin\frac{\pi}{2}u}\cos\frac{\pi}{2}u=\lim_{u\to0}\frac{u}{\frac{\pi}{2}u}\lim_{u\to0}\cos\frac{\pi}{2}u=\frac{2}{\pi}$$

（19） 解：法 1： 和差化积，再用$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 这个重要极限．

法 2：
$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+1-\cos 3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}-\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot9$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4$$

（20） 
$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right]+\cos x\cdot\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot4\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

(21),(22),(23)利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.(21) $\mathrm{e}^{-6}$ (22) $\mathrm{e}^2$ (23) $\mathrm{e}^{-2}$

(24) 当 $0<a<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=0$; 当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\frac{1}{2}$; 当 $a>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=1$

(25) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\overset{\text{“}1^\infty\text{”}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}\right]^{\frac{a^x+b^x-2}{2x}}$

而
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\\&=\ln a+\ln b\\&=\ln ab\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x}=\ln a$

所以 原式 $=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(ab)}=\sqrt{ab}$

(26) 用高阶无穷小代换 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

(27) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}(\mathrm{e}^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1$

(28) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\sqrt{2})\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-1$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}$不存在

(29) 当 $x\to 1+0$ 时, $\frac{1}{1-x}\to-\infty$,所以 $\arctan\frac{1}{1-x}\to-\frac{\pi}{2}$ $(x\to 1+0)$. 当 $x\to 1-0$ 时, $\frac{1}{1-x}\to+\infty$,所以 $\arctan\frac{1}{1-x}\to\frac{\pi}{2}$ $(x\to 1-0)$,所以 $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\frac{1}{1-x}$不存在

(30) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\cos x}{\cos a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\cos x-\cos a}{\cos a}\right)^{\frac{\cos a}{\cos x-\cos a}}\right]^{\frac{\cos x-\cos a}{(x-a)\cos a}}$

而 
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}-\sin\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a\end{aligned}$$

所以 原式 $=\mathrm{e}^{-\tan a}$

(31) $\frac{1}{4}$ (32) $\mathrm{e}^3$ (33) 0 (34) 0 (35) 0 (36) $\frac{1}{2}$ (37) $-\frac{1}{2}$ (38) $\frac{1}{2}$