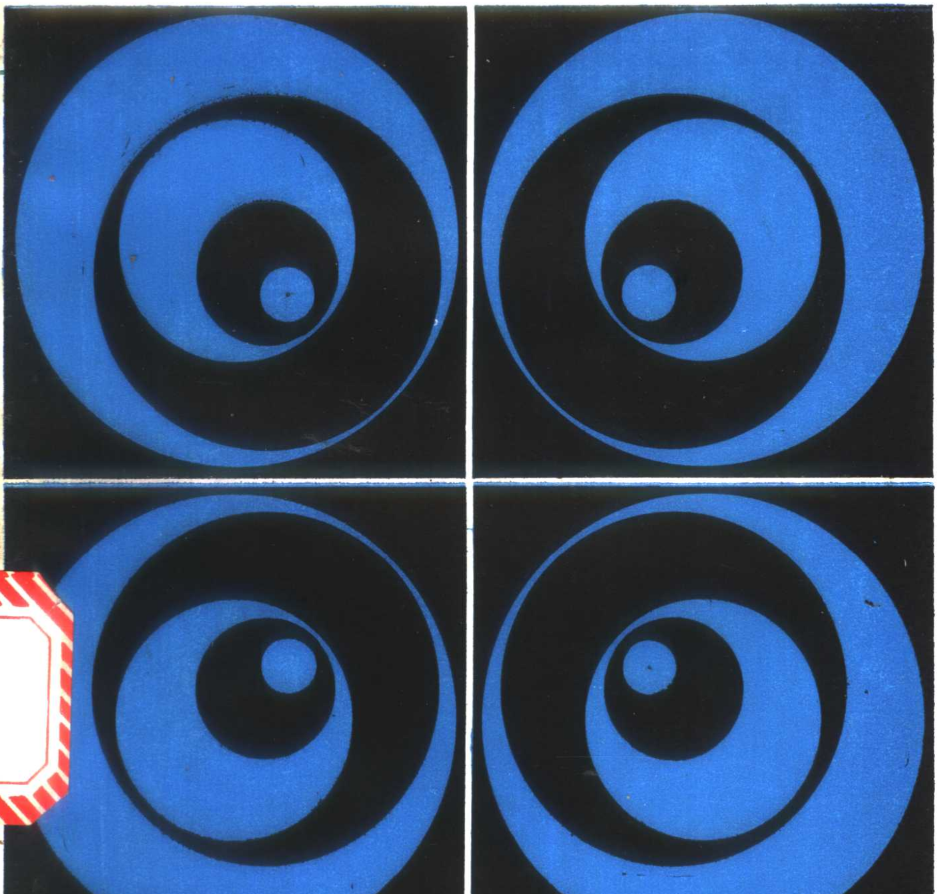
高中数学专题辅导

福州市数学会

福建教育出版社

3



高中数学专题辅导

第三辑

福州市数学会

福建教育出版社

高中数学专题辅导

第三辑

福州市数学会

福建教育出版社出版
（福州大梦山七号）
福建省新华书店发行　福建教育出版社印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本　6.75印张　140千字
1987年12月第一版　1987年12月第一次印刷
印数：1——9,800

ISBN 7－5334－0214－6　书号：7159·1333
G·164　定价：1.20 元

编者的话

为了帮助高中学生加深对数学课本内容的理解，开拓思路，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了本书（共三辑）。

本书选择的专题，取材于课本中的重点、难点，在编排上兼顾课本章节的顺序。丛书的第一辑主要是代数与三角的内容；第二辑主要是立体几何与解析几何的内容；第三辑主要是逻辑代数与微积分的内容。

应福建教育出版社之约，本会邀请周志文、蔡永芳、倪木森三位老师组成本书编委会，编委会约请了各个专题的撰稿人，他们都是教学经验丰富的中学骨干教师或大专院校的教师。本辑的主编是蔡永芳同志。

本书可供高中学生课外阅读，也可供高中数学教师参考。

限于时间和水平，书中不当之处，在所难免，欢迎读者不吝赐教。

福州市数学会

1986年10月

目　录

线性方程组及其一些应用

在理论和实际中有许多问题往往都可以归结为求解一个线性方程组的问题，对线性方程组的学习与讨论不论在理论上还是在应用上都是很重要的。应用线性方程组去解决具体问题时，除了合理假设未知数并列出方程组外，还必须知道所得的方程组的解的情况。关于二元线性方程组的解的各种情况在课本中已有详尽的讨论，我们这里就不再重复了。本文只讨论三元线性方程组的解的情况，以及线性方程组的一些应用。

一　三元线性方程组的解的存在性与唯一性定理

含有三个未知数的一次方程联立而成的方程组称为三元线性方程组，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \qquad ①$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

以及

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

其中D称为方程组①的系数行列式。

我们知道利用加减消元法，由方程组①可以得到同解的方程组

$$\begin{cases} Dx=D_x, \\ Dy=D_y, \\ Dz=D_z. \end{cases} \qquad ②$$

因此，三元线性方程组的解完全由D以及D_x、D_y、D_z四个三阶行列式所决定。

定理 三元线性方程组①，当它的系数行列式$D \neq 0$时，方程组有唯一组解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \\ z=\dfrac{D_z}{D}. \end{cases} \qquad ③$$

课本已有此定理的详细证明，这里不再重复。

从这定理还可知在方程组①有唯一解的情况下，可以用公式③具体地求出它的解。这就是解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则。

现在，我们来讨论在$D=0$时，方程组①的解的情况。

(1) $D=0$，但D_x、D_y、D_z中至少有一个不为零，则方程组①无解。

不妨设$D_x \neq 0$，于是方程组②中的第一个方程

$$Dx = D_z$$

便无解，所以方程组②无解，因而方程组①也无解。

(2) $D=0$ 且 $D_x=D_y=D_z=0$，这时方程组①可能没有解，也可能有解。如果有解，就有无穷多解。下面我们举例说明。

例如，线性方程组

$$\begin{cases} x-y-2z=-1, \\ 2x-2y-4z=1, \\ -x+y+2z=0. \end{cases}$$

显然有

$$D=D_x=D_y=D_z=0.$$

但是，这个方程组无解。因为容易看出这方程组的三个方程是互相矛盾的，所以满足方程组中任何一个方程的三个数 x，y，z 都不能满足其他两个方程。我们称这样的方程组为不相容的方程组。

又如方程组

$$\begin{cases} x+2y+3z=2, \\ x-y-z=-1, \\ 2x+y+2z=1. \end{cases}$$

我们计算可得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad D_x=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

这个方程组中的任一个方程可以由其它两个方程加减而得。这样满足第一个、第二个方程的 x、y、z 也一定满足第三个方程，因此，要求原方程组的解，只须求由第一个与第二个方程联立而成的不完全线性方程组

$$\begin{cases} x+2y+3z=2, \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

的解就可以了。而这样的不完全线性方程组的解是无穷多组的，所以原方程组有无穷多解。

综合上述的讨论，我们可得：

三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases}$$

(1) 当 $D\neq 0$ 时，有唯一解

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \\ z=\dfrac{D_z}{D}; \end{cases}$$

(2) 当 $D=0$ 但 D_x，D_y，D_z 中至少有一个不为零时，无解；

(3) 当 $D=D_x=D_y=D_z=0$ 时，可能无解，也可能有无穷多解。

例 1 当 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda+3)x+y+2z=\lambda,\\ \lambda x+(\lambda-1)y+z=\lambda,\\ 3(\lambda+1)x+\lambda y+(\lambda+3)z=3\end{cases}$$

有唯一解，无解，无穷多解？

解：因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda-1 & 1\\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1),$$

所以，当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，$D\neq 0$，这时方程组有唯一解。

当 $\lambda=0$ 时，$D=0$，这时方程组即为

$$\begin{cases}3x+y+2z=0,\\ \quad -y+z=0,\\ 3x\quad +3z=3.\end{cases}$$

不难计算得

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 3\end{vmatrix}=9\neq 0.$$

于是，这时方程组无解。

当 $\lambda=1$ 时，$D=0$，这时方程组即为

$$\begin{cases}4x+y+2z=1,\\ x\quad +z=1,\\ 6x+y+4z=3.\end{cases}$$

计算可得

$$D_x=D_y=D_z=0.$$

且我们不难验证，方程组中的第三个方程可由第一个方程与第二个方程乘以 2 后再相加得到，亦即该方程组是相容的，

因此，这时方程组有无穷多解。

作为三元线性方程组①的特殊情况，方程组①的常数项 d_1、d_2、d_3 均为零，这时方程组①变为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{cases} \qquad ④$$

方程组④叫做三元齐次线性方程组。显然 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 总是方程组④的解，叫做方程组④的零解，即齐次线性方程组总有零解。这样要讨论齐次线性方程组解的可能情况，也就是要讨论在什么情况下它还有非零解。下面仅举一个例子来帮助理解这些内容。

例 2 当 k 取何值时，线性齐次方程组

$$\begin{cases} kx-3y-6z=0, \\ x-y-2z=0, \\ 2x-2y+(k-1)z=0 \end{cases}$$

有零解？有非零解？并求出它的解。

解： 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} k & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & k-1 \end{vmatrix}=-k^2+9.$$

(1) 当 $k\neq\pm3$ 时，$D\neq0$，这时方程组有唯一解——零解：

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases}$$

(2) 当 $k=-3$ 时，$D=0$，原方程组为

$$\begin{cases} -3x-3y-6z=0, \\ x-y-2z=0, \\ 2x-2y-4z=0. \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} x+y+2z=0, \\ x-y-2z=0, \\ x-y-2z=0. \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

这样方程组的解可归结为解不完全的方程组

$$\begin{cases} x+y+2z=0, \\ x-y-2z=0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x+y=-2z, \\ x-y=2z. \end{cases}$$

解之可得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-2z. \end{cases}$$

令

$$z=t,$$

则得方程组的解为

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-2t, \\ z=t, \end{cases}$$

其中 t 可以取任意值. 因此，方程组有无穷多解.

(3) 当 $k=3$ 时，$D=0$，原方程组为

$$\begin{cases}3x-3y-6z=0,\\ x-y-2z=0,\\ 2x-2y+2z=0.\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}x-y-2z=0,\\ x-y-2z=0,\\ x-y+z=0.\end{cases}$$

这样方程组的解归结为下面不完全方程组的解：

$$\begin{cases}x-y-2z=0,\\ x-y+z=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x-2z=y,\\ x+z=y.\end{cases}$$

解之可得

$$\begin{cases}x=y,\\ z=0.\end{cases}$$

令 $y=t$，则得方程组的解为

$$\begin{cases}x=t,\\ y=t,\\ z=0.\end{cases}$$

由于 t 可以任意取值，所以，原方程组有无穷多解。

上面我们是对三元线性方程组的解的各种情况作了讨论。对含有多于三个未知数的线性方程组，如四元，五元，…，n 元线性方程组是否也有类似的结果？回答是肯定的，也就是对三元线性方程组的讨论的思想方法与结论完全可以推

广到 n 元线性方程组上去.

二　线性方程组应用举例

线性方程组无论在数学本身还是在实际问题中都有着广泛的应用，下面仅举几个例子来说明它的应用.

(一)线性方程组在数学本身中的应用

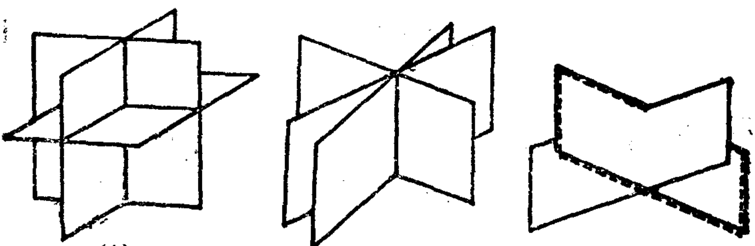
关于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

中的两个方程代表 xOy 平面上两条直线，以及它的解的各种不同情况表示了这两条直线的位置关系的各种不同情况，这在课本中已作介绍. 而对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

中的每一个方程，我们可以把它看成是代表欧氏空间中的一个平面，那末方程组的解的各种不同情况表示三个平面在空间中的不同位置关系.



(1)　(2)　(3)

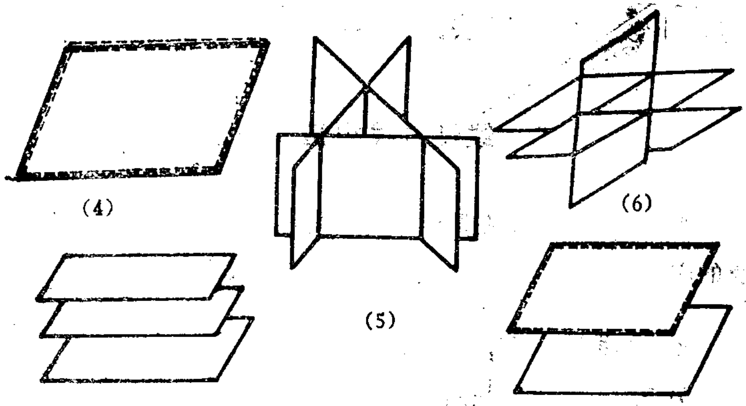


图 1

当方程组有唯一解时，表示三个平面相交于一点（如图(1)）；当方程组有无穷多解时，表示三个平面有无穷多个公共点（如图(2)，(3)，(4)）；当方程组无解时，表示三个平面没有公共点（如图(5)，(6)，(7)，(8)）。

例 3 求证：三个平面：$x=cy+bz$，$y=az+cx$，$z=bx+ay$ 的交点多于一点的充分与必要条件是：

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1.$$

证明： 根据上面的讨论可知这三个平面有多于一个交点就是方程组

$$\begin{cases} x=cy+bz, \\ y=az+cx, \\ z=bx+ay, \end{cases}$$

即齐次方程组

$$\begin{cases} x-cy-bz=0, \\ -cx+y-az=0, \\ -bx-ay+z=0 \end{cases}$$

有非零解。而该方程组有非零解的充分与必要条件是其系数行列式等于零，即

$$D=\begin{vmatrix}1 & -c & -b\\ -c & 1 & -a\\ -b & -a & 1\end{vmatrix}=0.$$

展开行列式 D 可得

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1.$$

例 4 讨论三个平面：

$$\lambda x+y+z=2,$$

$$2x+(\lambda-1)y+z=\lambda,$$

$$4x+2y+\lambda z=4$$

的位置关系。

解： 方程组

$$\begin{cases}\lambda x+y+z=2,\\ 2x+(\lambda-1)y+z=\lambda,\\ 4x+2y+\lambda z=4\end{cases}$$

的系数行列式是

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 2 & \lambda-1 & 1\\ 4 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

(1)当 $\lambda\neq2$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，$D\neq0$，这时方程组有唯一解，亦即三个平面相交于一点。

(2)当 $\lambda=2$ 时，$D=0$，方程组为

$$\begin{cases}2x+y+z=2,\\ 2x+y+z=2,\\ 4x+2y+2z=4.\end{cases}$$

易见这时方程组有无穷多解。事实上这时三个方程退化为一个方程，即

$$2x+y+z=2,$$

亦即，三个平面相重。

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，$D=0$，方程组为

$$\begin{cases} -3x+y+z=2, \\ 2x-4y+z=-3, \\ 4x+2y-3z=4. \end{cases}$$

计算可得

$$D_x=9\neq 0.$$

这时方程组无解。事实上，这时三个平面两两相交且三条交线互相平行。

在代数中解高次方程或因式分解以及化分式为部分分式等经常要用到"待定系数法"，而"待定系数法"最后归结为解线性方程组问题。

例 5 求解方程

$$x^4-x^3-6x^2-x^2+x+6=0.$$

解：设 $f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$，计算可得：

$$f(1)=0,\ f(-1)=0.$$

因此，多项式 $f(x)$ 含有 $(x-1)$ 与 $(x+1)$ 这两个因式，并注意到 $f(x)$ 的次数，我们可设

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^4+bx^3+(-a+c)x^2-bx-c. \end{aligned}$$

$$\therefore x^4-x^3-7x^2+x+6=ax^4+bx^3+(-a+c)x^2-bx-c.$$

比较上式两边相同次数项的系数可得：