

重力学引论

李瑞浩 编著



地震出版社

重 力 学 引 论

李瑞浩 编著

地 震 出 版 社

1 9 8 8

内 容 提 要

本书共分九章，包括有关重力学的理论、仪器和方法，是一本内容比较丰富、叙述比较系统的专著。作者结合本人多年的研究工作和研究成果，从理论和实际的结合上，比较妥善地处理和安排了全书的内容。从动力学的角度来讨论地球重力场的时空分布特征是本书的一个重要特点。本书可供从事重力测量和研究的科技人员和大学有关专业的师生参考。

重 力 学 引 论

李瑞浩 编著

责任编辑：李红杰

*

地 震 出 版 社 出 版

北京复兴路63号

一二〇一工厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

787×1092 1/16 26.5印张 678千字

1988年8月第一版 1988年8月第一次印刷

印数 0001—1600

ISBN 7-5028-0002-6/P·3

(411)定价：10.80元

前 言

重力学是大地测量学、地球物理学、天文学和地球动力学的一个交汇点。它的主要任务是研究地球重力场的时空分布规律及其物理和力学机制。它既是一门地球科学的基础学科，又是在地学和空间科学领域内有广泛用途的应用学科。

重力学的发展经历了两个重要的历史时期。第一个时期是静力学阶段，这个时期的主要特征是假设地球不变形，侧重解决地球外部重力场的空间分布规律。随着人造卫星的上天，这个任务获得了惊人的成就。现在人们已经可以相当精确地知道全球重力场的空间分布状态。当前重力学的研究正朝着第二个发展阶段——动力学阶段过渡。这个阶段的基点是研究变形的地球，它的主要任务是探索地球重力场的时间分布规律及其变化机制。也就是说，时至今日，地球重力场的研究正从三维空间向四维空间过渡，并要着力解决有关机制问题。本书就是在这种历史潮流推动下诞生的。

作者在写作过程中，力图反映学科发展的时代特征，集中主要精力于动力学阶段的地球重力场的时空分布特征及其有关问题的研究和讨论。全书共分九章，第一章和第二章是重力学的物理和数学基础，它们基本上保持了传统风格；后面七章的内容和讨论方法都是从动力学的角度和要求进行安排的。在取材过程中，作者始终遵循理论与实际结合的原则。

作者于1973年，1978年和1981年曾先后三次在国家地震局地震研究所，北京大学和河北省地震局等举办的重力进修班上讲授重力学课程。进修班学员主要是地震战线有关专业人员和部分高等学校教师。当时根据进修班的宗旨，试编了一些讲义以应讲授之需，讲义出来以后，同行们认为它具有较强的针对性，希望把它整理出来供有关人员参考。在同志们的推动和鼓励下，作者结合自己的研究工作对讲稿进行了彻底修改，补充了较多新内容，逐步形成现在这个稿子。由于工作繁忙，只能在业余时间来完成这个任务，所以这个稿子未能及时与读者见面。

写作过程中得到了有关领导和同志们的支持，方俊教授和顾功叙教授在百忙中抽空审阅了本书写作纲要；贾民育、刘绍府、陈冬生、李树德、魏望生、江先华和高锡铭等阅读过有关章节，进行了有益的讨论；徐菊生提供了个别段落的材料，王贵宣对全书进行了校审；付兆珠在整理书稿中付出了巨大劳动，在此表示深切的谢意。

由于作者水平所限，本书一定还存在缺点和错误，恳请读者提出批评指正。

作 者

1986.9

目 录

第一章 牛顿位理论	(1)
§1-1 重力学的研究对象和方法	(1)
§1-2 引力和引力位	(1)
§1-3 几种典型物体的引力场	(8)
§1-4 单层位	(16)
§1-5 双层位	(18)
§1-6 引力位与拉普拉斯方程和泊松方程	(19)
§1-7 位理论的边值问题	(21)
§1-8 格林公式及其在位理论中的应用	(22)
§1-9 拉普拉斯方程的球坐标表达式	(29)
第二章 球函数及其在重力学中的应用	(33)
§2-1 勒让德方程和勒让德多项式	(33)
§2-2 勒让德多项式的主要性质	(35)
§2-3 函数 $f(x)$ 按勒让德多项式展开	(38)
§2-4 勒让德多项式的递推公式	(38)
§2-5 $1/r$ 的勒让德级数表达式	(40)
§2-6 勒让德多项式的微分表达式	(41)
§2-7 勒让德伴随多项式	(42)
§2-8 体球函数和面球函数	(49)
§2-9 球函数的正交性	(51)
§2-10 球函数的规格化	(52)
§2-11 函数 $f(\theta, \lambda)$ 按球函数展开	(53)
§2-12 球函数的还原定理	(55)
§2-13 球函数的加法定理	(56)
§2-14 地球引力位的球函数展开式	(58)
§2-15 卫星重力学中地球引力位的球函数表达式	(60)
§2-16 球函数在位理论边值问题中的应用	(61)
第三章 地球外部重力场和地球形状	(65)
§3-1 离心力位、重力位及其有关问题	(65)
§3-2 行星自转速度的上限和旋转流体的均衡形状	(73)
§3-3 地球正常重力位	(76)
§3-4 斯托克斯定理和斯托克斯问题	(83)
§3-5 扰动位及其边值条件	(85)

§3-6	扰动位求解——斯托克斯公式的球函数表达式	(88)
§3-7	确定大地水准面起伏和垂线偏差	(89)
§3-8	截断误差	(92)
§3-9	平面地球的大地水准面起伏和垂线偏差的计算	(95)
§3-10	重力异常和重力归算	(95)
§3-11	重力异常的最小二乘推估	(99)
§3-12	直接研究地球自然表面形状	(101)
§3-13	地面高程系统	(102)
§3-14	区域性地球形状的研究——天文重力水准概念	(106)
§3-15	卫星重力学的基本原理和方法	(110)
§3-16	卫星重力测量的主要结果	(117)
§3-17	卫星重力学的其它方法	(125)
§3-18	弹道导弹飞行与地球重力场	(126)
第四章	重力测量在地壳构造和地震预报研究中的应用	(129)
§4-1	重力异常的解析延拓	(129)
§4-2	根据地面重力异常确定密度分界面深度	(131)
§4-3	重力勘探反演问题的直接解	(133)
§4-4	重力勘探正演问题	(135)
§4-5	用面密度法确定密度界面的深度	(139)
§4-6	利用卫星重力测量研究全球性构造	(141)
§4-7	地球内部重力场	(144)
§4-8	重力场的非潮汐变化	(146)
§4-9	扩容过程伴随的重力场变化	(149)
§4-10	伴有质量迁移的地壳变形引起的重力变化	(152)
§4-11	深部密度界面变形引起的重力变化	(155)
§4-12	卫星重力资料确定地幔对流引起的地壳应力场	(156)
第五章	静力潮汐理论	(160)
§5-1	引潮位	(160)
§5-2	潮汐位的拉普拉斯展开	(163)
§5-3	杜德逊常数	(165)
§5-4	引潮力的三个分量	(166)
§5-5	潮汐效应的极大值	(167)
§5-6	太阳系中引潮力的估算	(168)
§5-7	固体潮分析中的天文学基础	(170)
§5-8	引潮位进一步展开	(176)
§5-9	引潮位三个导数的展式	(179)
§5-10	固体潮理论值的实际计算	(182)
§5-11	固体潮的纬度永久项效应	(185)
§5-12	坐标组合及其在固体潮分析中的初步应用	(187)

第六章 弹性地球潮汐	(195)
§6-1 勒夫数	(195)
§6-2 弹性地球潮汐的物理和几何效应	(197)
§6-3 地球的潮汐弹性变形	(208)
§6-4 地球液核动力效应	(222)
§6-5 莱柯拉兹调和分析方法	(231)
§6-6 维尼迪柯夫调和分析方法	(237)
§6-7 固体潮的简易调和与分析	(243)
§6-8 调和与分析的资料预处理	(245)
§6-9 潮汐因子 δ 的惯性改正	(247)
§6-10 与固体潮有关的海潮问题	(248)
§6-11 固体潮研究中的海潮负荷效应	(252)
§6-12 固体潮观测的向量分析	(259)
§6-13 固体潮与大地构造和地震研究的关系	(265)
第七章 重力测量仪器	(271)
§7-1 重力仪发展概况	(271)
§7-2 弹性重力仪的普遍微分关系式	(273)
§7-3 弹性重力仪的基本问题	(273)
§7-4 GS型重力仪	(280)
§7-5 拉科斯特-隆贝格重力仪	(284)
§7-6 地球动力学型重力仪	(286)
§7-7 CG-2重力仪	(287)
§7-8 沃敦重力仪和国产ZSM型重力仪	(291)
§7-9 重力仪的换能和记录系统	(292)
§7-10 超导重力仪	(296)
§7-11 海洋重力仪	(300)
§7-12 振弦重力仪	(307)
§7-13 航空重力仪	(309)
§7-14 绝对重力测量仪器	(310)
§7-15 重力梯度仪	(318)
第八章 重力仪的标定	(323)
§8-1 最小倾斜灵敏度位置的测定	(323)
§8-2 仪器常数 K 的测定	(324)
§8-3 K 值线性度问题	(328)
§8-4 温度系数的标定	(329)
§8-5 气压系数的标定	(331)
§8-6 弹性系统温度变化的监测	(332)
§8-7 记录格值 C 的测定	(336)
§8-8 重力仪滞后问题	(350)

§8-9	GS-11、12 型重力仪的标定	(357)
§8-10	助动重力仪的特殊标定	(358)
第九章	地球重力场的观测方法	(360)
§9-1	重力测量发展简史	(360)
§9-2	绝对重力测量和相对重力测量	(363)
§9-3	观测重力场非潮汐变化	(365)
§9-4	流动重力测量资料的初步整理	(368)
§9-5	重力段差计算及其精度评定	(371)
§9-6	重力复测网平差	(376)
§9-7	台站重力观测任务和主要技术要求	(383)
§9-8	重力台站设备和仪器组装	(384)
§9-9	台站重力资料的初步整理	(387)
§9-10	台站重力资料的基本分析方法	(391)
附表1	大地位(地球引力位)带谐系数 $\bar{C}_n^0$ 值	(395)
附表2	大地位(地球引力位)扇谐和田谐系数 $\bar{C}_n^k$ 和 $\bar{S}_n^k$ 值	(396)
附表3	引潮位 V_2, V_3 的完全展开式	(398)
附录	重力学重要常数	(409)
参考文献		(411)

第一章 牛顿位理论

§1-1 重力学的研究对象和方法

重力学是研究地球重力场的时空分布规律及其测量方法的科学。它与地震学、地磁学等一样,是固体地球物理学的主要分支之一。在大地测量、地质学和空间科学中,重力学都有广泛的应用,所以它既是一门基础学科,又是一门应用学科。

地球重力场由引力场和离心力场两部分组成。后者约为前者的1/300,在相对精度为1/300范围内讨论问题时,往往把引力场当作重力场,而略去其离心力部分。

重力场的描述和许多物理现象的描述一样,都是通过测量研究对象的某些具体数值,进一步求得具有普遍意义的数学表达式的。就象发热的物体那样,当它的温度向四周传导时,形成一个温度场。若我们要描述任意时刻 t 、任意位置 (x, y, z) 的温度 $u_1(x, y, z, t)$,就归结为解算一个二阶非齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \left(\frac{k}{c\mu} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\mu} F_1(x, y, z, t) \quad (1-1)$$

其中 u_1 是物体内部温度, F_1 是外部空间温度, k 是热传导系数, c 是比热, μ 是密度。给出物体边界上的温度(即边界条件)或物体边界上的起始温度(即起始条件)以后,得 u_1 的特解:

$$u_1 = u_1(x, y, z, t).$$

利用这个函数就可以描述温度随时间和空间的变化规律。

研究地球引力场的分布特征,和上述情况是类似的。引力位 u_2 在无穷远处为零,并满足另一个二阶齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0. \quad (1-2)$$

这就是著名的拉普拉斯方程。如果在地球表面(边界)上测定各处的引力值 F_2 ,使所求的 u_2 及其导数在边界上的值等于给定的函数 F_2 ,则从(1-2)式中就可以解出我们所需要的 u_2 。这只是概念性的描述,实际解算将在第三章中详细讨论。

建立适合某种物理过程的偏微分方程,并用特定的边界条件或起始条件来约束这个方程,从而解算出能普遍地描述这个物理过程的具体的函数(即微分方程的特解),就是所谓数学物理问题。从上面的讨论中可以看出,重力学是一个很典型的数学物理问题。牛顿(Newton)位理论是这个问题的物理基础,拉普拉斯方程是它的数学表征。

§1-2 引力和引力位

为了给出引力位的定义,我们先介绍一个比较简单的概念——引力。十七世纪初期,开普勒对行星绕太阳运行的观测资料进行了大量、细致的分析和计算,总结了行星运动的三条

运动学规律，即开普勒三定律：

a) 行星沿椭圆轨道绕太阳运行，太阳位于该椭圆的一个焦点上。

b) 对于任何一行星，它的矢径（太阳与行星的连线）在相等的时间内，扫过相等的面积（图1-1）。

c) 行星绕太阳运动周期 T 的平方与椭圆轨道长半轴 a 的立方成正比，即 $T^2/a^3 = \text{常数}$ ，此常数对各行星都相同，与行星的性质无关。

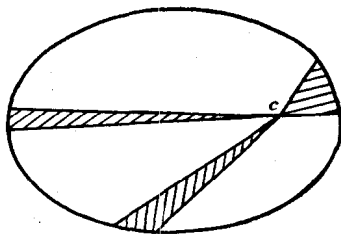


图 1-1

是什么力量维持着行星永恒地绕着太阳旋转呢？

牛顿在开普勒工作的基础上进一步研究了行星作轨道

运动的作用力问题，进而发现了万有引力定律。根据开普勒第(1)、(2)定律，即可得行星绕太阳运行时所受的向心力

$$f = m \frac{v^2}{r}$$

式中 m 为行星质量， v 为行星运动的线速度， r 为轨道半径。设 T 为周期，则 $v = \frac{2\pi r}{T}$ ，这时得：

$$f = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}$$

根据开普勒第(3)定律 $T^2 = cr^3$ ，这时上式变为

$$f = \frac{4\pi^2 m}{cr^2}$$

若令 $\frac{4\pi^2}{c} = c'$ 则得

$$f = c' \frac{m}{r^2} \quad (1-3)$$

因为 c 与行星无关，故 c' 亦与行星无关。质量为 M 的太阳对行星的引力则可写为

$$f' = c'' \frac{M}{r^2}$$

根据牛顿第三定律 $f = f'$ ，即

$$c' \frac{m}{r^2} = c'' \frac{M}{r^2},$$

所以

$$\frac{c'}{M} = \frac{c''}{m} = G$$

而 G 是一个和行星与太阳性质均无关的常数，将 $c' = MG$ 代入(1-3)式便得：

$$f = G \frac{mM}{r^2} \quad (1-4)$$

这就是太阳与行星之间的引力。牛顿研究了行星对卫星的引力，以及地球对地面上各种物体的引力，发现它们都具有同样性质，服从同一规律，于是牛顿做了合理的推广，提出了万有引力定律：任何两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体间都存在互相作用的引力，力的方向沿两物体

联线方向，力的大小与两物体质量的乘积成正比，与两者之间距离的平方成反比，即

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{1-2}^2} \quad (1-5)$$

其中 G 叫引力常数或者叫牛顿引力常数。

(1-5)式是从行星的运行中导出的公式，所以只有当两个物体的线度与它们之间的距离比起来是很小时，(1-5)式才是正确的。因为只有在这种条件下，上述中“两物体联线方向”、“两者之间的距离”等才有确定的意义，也就是说上面的表述只有对质点才成立。

当两个物体的线度与它们之间的距离比起来不能视为质点时(图1-2)，就必须把物体分割成许多质量单元，按上式求出两物体每个质量单元之间的引力，然后再求这些引力的矢量和，得到两物体之间的引力。如以 Δf_{ij} 表示第一个物体的第 i 个质量单元对第二个物体的第 j 个质量单元的引力(图1-2)，即

$$\Delta f_{ij} = G \frac{\Delta m_i \Delta m_j}{r_{ij}^2},$$

则第一个物体对第二个物体的总引力为：

$$f = \sum_i \sum_j \Delta f_{ij}.$$

引力常数 G 的数值和量纲取决于(1-5)式中其他各量单位的选择，当质量、距离和力的单位选定后， G 的数值和量纲也就确定了。 G 的数值要由实验测定，卡文迪什于1798年用扭秤第一次比较准确地测定了 G 。现在使用的 G ，取值为 6.67×10^{-8} 厘米³/克·秒²。

G 是最基本的物理常数之一，它的用途广泛，例如利用(1-5)式就可以计算诸如地球总质量和平均密度等一些很有意义的数值。若令 $m_1=1$ ， m_2 =地球总质量 M ，则得地面的重力加速度(设地球为圆球，半径为 R)

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}.$$

或者

$$M = \frac{R^2}{G} g_0.$$

若以 $g_0=980$ 厘米/秒²， $R=6371$ 公里代入上式，得：

$$M = 6 \times 10^{27} \text{克} = 6.0 \times 10^{21} \text{吨}.$$

近代所得的较精确结果是 $M=5.976 \times 10^{27}$ 克。根据 M 可得地球的平均密度

$$\mu = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} \approx 5.5 \text{克/厘米}^3$$

近代所得的较精确的结果是 $\mu=5.517$ 克/厘米³。

我们知道，地表岩石的平均密度只有2.67克/厘米³，所以地球深部的介质密度一定大于5.517克/厘米³的数值。据近代研究，地心的密度可达13克/厘米³。

此外，利用(1-5)式还可以求出有卫星的天体的质量和太阳的质量(行星可以看作太阳的卫星)。设 M_e 和 m 分别为该天体及其卫星的质量， r 为其间的距离， a_n 为卫星的向心加速度，则天体对该卫星的引力

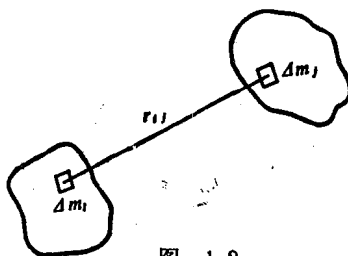


图 1-2

$$F = G \frac{mM_e}{r^2} = ma_n = m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

式中 T 为卫星运行周期。由上式得:

$$M_e = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

这样,通过观测确定 r 和 T ,即可根据上式计算 M_e 。比如根据地球绕太阳运动的周期 T 和轨道平均半径 r ,可得太阳的质量为

$$M_e = 2.0 \times 10^{27} \text{ 吨.}$$

根据现代资料,太阳质量是地球质量的332951倍。

有趣的是,根据牛顿第二定律 $F = mg$ 和万有引力定律 $F = G \frac{mM}{r^2}$ 可以直接得到

$$g = G \frac{M}{r^2}. \quad (1-6)$$

式中 M 为地球质量。此式说明,物体的重力加速度与该物体的质量无关。这是伽利略著名的比萨斜塔实验的结论。

这里顺便提一下惯性质量和引力质量问题。牛顿第二定律中 $F = mg$ 的 m 是所谓的惯性质量,它反映了物体惯性的大小;而万有引力定律 $F = G \frac{mM}{r^2}$ 中的 m 则是引力质量。它们是从两个完全不同的概念引伸出来的。虽然许多实验证明 $m_{\text{惯}} = m_{\text{引}}$,但从本质上来说,它们之间可能还存在一些更深刻的内在联系。由于缺少关于引力场的精确的实验数据,目前还未找到这种本质联系的内在因素。

传统观念认为,质量是不会变的,但是根据相对论原理和近代许多实验事实表明,只有当物体的运动速度比光速(3×10^{10} 厘米/秒)小得多的时候,物体的质量 m 才近似地是一个常数。它们之间的关系是

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

式中 m_0 是物体相对于给定参考系静止时的质量, v 是物体相对于参考系的速度, c 是光速。当 $v \ll c$ 时, $m \approx m_0$;当 v 增加到与 c 可以比拟时, m 也将随 v 而迅速增大。

现在我们来讨论引力位的问题。为此我们先讨论引力在 x 、 y 、 z 三个坐标轴上的投影,进而引入引力位的概念。

若设 $Q(x, y, z)$ 、 $P(a, b, c)$ 两点的质量分别为 m 和 1 (图1-3),则其引力

$$F = G \frac{m}{r^2} \frac{r}{r},$$

而

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \quad (1-7)$$

矢量 F 的方向余弦为:

$$\left. \begin{aligned} \cos(r\hat{x}) &= \cos \alpha = \frac{x-a}{r}, \\ \cos(r\hat{y}) &= \cos \beta = \frac{y-b}{r}, \\ \cos(r\hat{z}) &= \cos \gamma = \frac{z-c}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

F 在三个坐标轴上的投影为:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha = F \frac{x-a}{r} = G \frac{x-a}{r^3} m, \\ F_y &= F \cos \beta = F \frac{y-b}{r} = G \frac{y-b}{r^3} m, \\ F_z &= F \cos \gamma = F \frac{z-c}{r} = G \frac{z-c}{r^3} m. \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

把它们统一表示成矢量形式

$$F = Gm \frac{QP}{|QP|^3}.$$

拉格朗日1793年首先注意到(1-9)式的特征, 他发现函数

$$V(P) = -\frac{Gm}{r}. \quad (1-10)$$

对 P 点(被吸引点) 诸坐标的偏微分正好等于(1-9)式之值, 因为

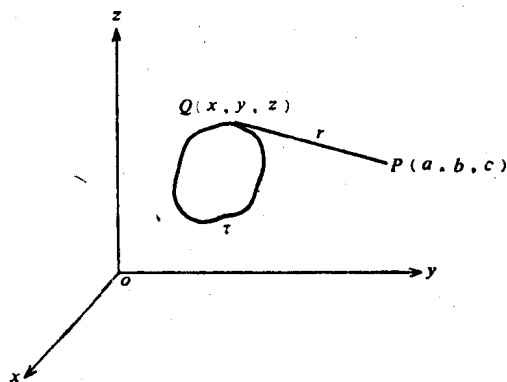


图 1-3

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial a} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r^3} = -\frac{\cos \alpha}{r^2}, \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial b} &= -\frac{y-b}{r^3} = -\frac{\cos \beta}{r^2}, \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial c} &= -\frac{z-c}{r^3} = -\frac{\cos \gamma}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

从(1-10)式得:

$$\frac{\partial V(P)}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{Gm}{r} \right) = -Gm \frac{\partial (1/r)}{\partial a},$$

顾及(1-11)式得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(P)}{\partial a} &= Gm \frac{x-a}{r^3}, \\ \frac{\partial V(P)}{\partial b} &= Gm \frac{y-b}{r^3}, \\ \frac{\partial V(P)}{\partial c} &= Gm \frac{z-c}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

比较(1-9)式和(1-12)式可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(P)}{\partial a} &= F_x, \\ \frac{\partial V(P)}{\partial b} &= F_y, \\ \frac{\partial V(P)}{\partial c} &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

即函数 $V(P)$ 对 P 点三个坐标轴的偏微分等于引力 F 在相应方向上的投影, 函数 $V(P)$ 定义为位(势)函数。上述推导的合理推广: 位函数 $V(P)$ 对任意方向 s 的微分等于引力 F 在相应方向 s 的投影, 即

$$\frac{\partial V(P)}{\partial s} = F, \quad (1-14)$$

设 QP 是引力 F 方向(图1-4), QP' 是任意的 s 方向。矢量 QP 与三个坐标轴 x, y, z 的夹角分别为 α, β, γ 。矢量 QP' 与三坐标轴的夹角分别为 α', β', γ' , 则 V 对 s 的方向导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= \frac{\partial V}{\partial a} \cos \alpha' + \frac{\partial V}{\partial b} \cos \beta' \\ &+ \frac{\partial V}{\partial c} \cos \gamma' = F \left(\frac{x-a}{r} \cos \alpha' \right. \\ &\left. + \frac{y-b}{r} \cos \beta' + \frac{z-c}{r} \cos \gamma' \right), \end{aligned}$$

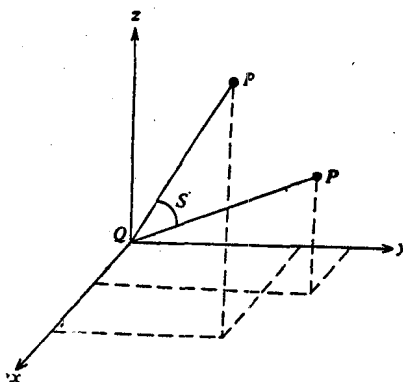


图 1-4

顾及(1-8)式得:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = F (\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma').$$

因为

$$\cos s = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma',$$

故

$$\frac{\partial V}{\partial s} = F \cos s = F,$$

这就是位函数的一个重要物理性质的数学表达式。上式改写一下, 为

$$dV = F \cos s ds = F ds. \quad (1-15)$$

(1-15)式包含了丰富的物理内容:

(1) 引力位的增量就是力所做的功。即 F 将单位质量($m=1$)从 M 点移到 N 点所做的功, 等于这两点的位差。

(2) 若位移方向与引力方向一致, 则 $\cos s=1$, 这时位的增量达到最大。若位移方向与引力方向垂直, 则 $dV=0$, 这时 V =常数。与之对应的曲面叫做等位面, 不同的常数, 对应着不同的等位面。在等位面上, 每一点的引力矢量都与其正交。因为引力位是坐标的单值函数, 所以等位面既不相交也不相切。一般来说(均质球体除外), 等位面并非等引力面, 它们之间是不平行的, 因而力线必然是一条曲线(图1-5), 力线上每一点的切线方向即为该点的

引力方向。

此外我们也可以从“功”的概念出发，导出地球引力位的表达式。如图1-6所示，设 M 、 R 分别为地球的质量和半径， r 为地心到空间某点的距离。设质量为 m 的质点沿 r 方向移动 Δr ，则引力 f 所做的功

$$\Delta A = -f \Delta r = -G \frac{mM}{r^2} \Delta r,$$

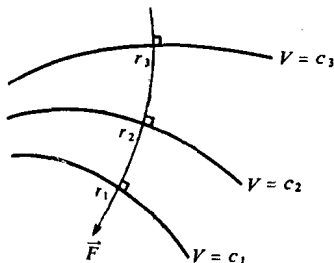


图 1-5

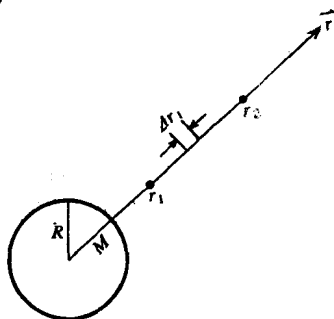


图 1-6

式中负号表示力与 r 的方向相反。当物体由 r_1 运动到 r_2 时，引力所做的功为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{r=r_1}^{r_2} \left(-G \frac{mM}{r^2} \Delta r \right) = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{mM}{r^2} dr \\ &= - \left(G \frac{mM}{r} - G \frac{mM}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (1-16)$$

若质点从 r_1 处运动到无穷远时，则

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left(G \frac{mM}{r_2} \right) = 0$$

设质点的质量为1，则

$$A = -G \frac{M}{r_1}. \quad (1-17)$$

(1-17)式与(1-10)式具有完全相同的形式，从这两式可以得出结论，即所谓 r_1 处的引力位，乃是一个质量为1的质点，在引力场中从 r_1 移到无穷远处时所做的功。另外，我们知道，在图1-5所示的引力场中，质点从 r_1 到 r_2 （ r_1 和 r_2 不一定要在同一个径向上），引力所做的功都能用(1-15)式表示，也就是说它与路径无关，所以引力是保守力，而保守力是具有位(势)能的。从物理学中我们知道，保守力的功的负值等于位能的增量，现在保守力的负功为 $-A = +G \frac{mM}{r_1}$ ，故其位能增量为 $+G \frac{mM}{r_1}$ 。在引力场内位能等于位的负值，即 $V = -G \frac{mM}{r}$ 。所以从保守力场的性质出发，也可以得到引力位的表达式。

引入引力位的概念以后，则(1-16)式右边括号内就代表 r_2 与 r_1 处引力位之差，即

$$\delta V = \left(-G \frac{mM}{r_2} \right) - \left(-G \frac{mM}{r_1} \right) = mR^2 g \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

式中 $g = G \frac{M}{R^2}$ ， R 为地球半径。当 r_1 、 r_2 均在地面附近时， $r_1 r_2 \approx R^2$ ，故

$$\delta V = mg(r_2 - r_1) = mg(h_2 - h_1)$$

式中 h_1 、 h_2 为两点的高程。由此可见，地球引力位的增量与 $\delta \Delta h$ 成正比。

§1-3 几种典型物体的引力场

上面我们讨论了引力和引力位的一般形式，现在我们进一步给出几种典型物体的引力的具体数学表达式。

前面已经指出，(1-5)式与(1-10)式只适用于质点的情况，而对本节讨论的各种物体来说，都不能视为质点，这时必须对所有的微分质量元进行积分才能得到整个物体的引力和引力位。

1. 平面单层对 z 轴某点的引力

所谓单层，就是厚度趋于零，这时体密度变成面密度。根据图1-7所示，我们可以直接写出此平面单层对A点的引力位

$$V^* = - \int_{\sigma} G \frac{dm}{r}$$

式中 V^* 表示对 $+z$ 轴方向(我们规定它为外方向)的引力位。对单层来说，质量元 $dm = \mu d\sigma$ ， μ 为面密度(克/厘米²)， $d\sigma$ 为面元，这时得

$$V^* = - \int_{\sigma} G \frac{\mu d\sigma}{r}$$

式中 $d\sigma = \rho d\rho d\alpha$ 。因 $r^2 = h^2 + \rho^2$ ，故 $d\sigma = r dr d\alpha$ 。于是，

$$\begin{aligned} V^* &= -G \int_{\sigma} \mu dr d\alpha = -G \mu \int_{\alpha}^{2\pi} d\alpha \int_h^{\sqrt{h^2 + \rho^2}} dr \\ &= -2\pi G \mu (\sqrt{h^2 + \rho^2} - h). \end{aligned}$$

对于半径为 R 的圆形平面层，则上式变为

$$V^* = -2\pi G \mu (\sqrt{h^2 + R^2} - h) \quad (1-18)$$

同理得 $-z$ 轴方向(即内方向)的 V' 为：

$$V' = -2\pi G \mu (\sqrt{h^2 + R^2} + h) \quad (1-18a)$$

相应的引力为

$$\left. \begin{aligned} F_z^* &= \frac{\partial V^*}{\partial h} = 2\pi G \mu \left[\frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} - 1 \right], \\ F_z' &= \frac{\partial V'}{\partial h} = 2\pi G \mu \left[\frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} + 1 \right], \\ F_x &= F_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

即单层平面对沿单层平面方向的引力为0，而任意方向 s 的引力为

$$F = \frac{\partial V}{\partial s} = +F \cos(z, s) \quad (1-19a)$$

式中 (z, s) 为 s 方向与 z 轴的夹角。

当 $h \rightarrow 0$ 时，由(1-18)，(1-18a)和(1-19)式得极限值：

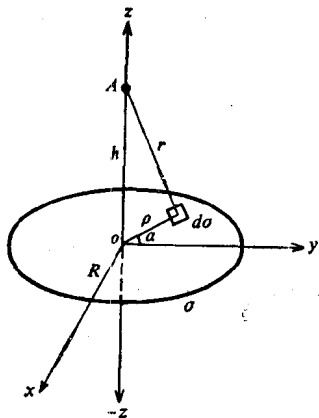


图 1-7

$$\left. \begin{aligned}
 V_0^* &= \lim_{h \rightarrow 0} V_z^* = \lim_{h \rightarrow 0} \{-2\pi G\mu[\sqrt{h^2 + R^2} - h]\} \\
 &= -2\pi GR\mu, \\
 V_0^i &= \lim_{h \rightarrow 0} V_z^i = -2\pi GR\mu, \\
 F_0^* &= \lim_{h \rightarrow 0} F_z^* = -2\pi G\mu, \\
 F_0^i &= \lim_{h \rightarrow 0} F_z^i = +2\pi G\mu.
 \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

显然, $V_0^* - V_0^i = 0$, $F_0^* - F_0^i = -4\pi G\mu$, 也就是说平面单层的位在整个空间是连续的, 但其引力是不连续的, 当被吸引点通过单层时, 其引力发生 $4\pi G\mu$ 的跳跃。这是单层位的一个重要性质。

(1-20)式是沿 z 轴方向引力位和引力在平面上的极限值, 而任意方向的引力极限值为:

$$\left. \begin{aligned}
 (F^*)_s &= -2\pi G\mu \cos(z, s); \\
 (F^i)_s &= +2\pi G\mu \cos(z, s)
 \end{aligned} \right\} \quad (1-20a)$$

当角度 $(z, s) = 0$ 时, 即得(1-20)式之值。

若令 $h=0$, 直接从(1-18)和(1-18a)式得圆盘对盘中心的引力位

$$V_0 = -2\pi GR\mu = \text{常数} \quad (1-20b)$$

即圆盘对盘中心的引力为零, 直观上可以理解为周围的引力互相抵消。

当 $R \rightarrow \infty$ 时, 由(1-19)式得到无限平面层内外两个方向的引力为

$$\left. \begin{aligned}
 F_\infty^* &= \lim_{R \rightarrow \infty} F_z^* = 2\pi G\mu, \\
 F_\infty^i &= \lim_{R \rightarrow \infty} F_z^i = -2\pi G\mu.
 \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

即无穷大平面单层上下两边的引力符号相反, 数值相等, 均为常数, 与被吸引点到层面的距离无关。而从(1-18a)中看出, 无穷平面的引力位则为无穷大。

2. 均质圆柱体对外部点的引力

我们把坐标原点置于圆柱底的中心(图1-8), 并设其半径和高分别为 a 和 d 。为了简单起见, 可以先计算一个单元环(环的半径为 l , 厚度为 dl , 高为 dz)对 A 点的引力位

$$\begin{aligned}
 dV &= -\frac{G\mu d\sigma}{r} \\
 &= -2\pi G\mu \frac{l dl dz}{\sqrt{l^2 + (\zeta - z)^2}},
 \end{aligned}$$

而半径为 a 的一个微分圆盘的引力位

$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^a dV = -2\pi G\mu dz \int_a^a \frac{l dl}{\sqrt{l^2 + (\zeta - z)^2}} \\
 &= -2\pi G\mu dz [\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - (\zeta - z)],
 \end{aligned}$$

其引力为

$$dF = \frac{\partial V}{\partial \zeta} = -2\pi G\mu dz \left(\frac{(\zeta - z)}{\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2}} - 1 \right).$$

整个圆柱体的引力为

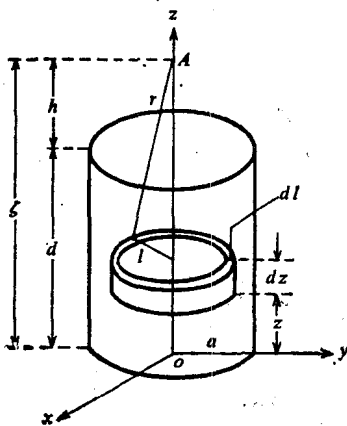


图 1-8