

电子信息工程专业本科系列教材

DIANZI XINXI GONGCHENG ZHUANYE BENKE XILIE JIAOCAI

电磁场与电磁波

DIANCICHANG YU DIANCIBO

主 编 姚 毅
参 编 程雪梅 刘密歌

重庆大学出版社

电磁场与电磁波

主编 姚 毅

参编 程雪梅 刘密歌



重庆大学出版社

内 容 提 要

本书系统地描述了电磁场和电磁波的基本规律。全书内容包括:静电场与恒定电场、静电场的解法、恒定磁场、时变电磁场、正弦平面电磁波在无界空间中的传播规律、电磁波的反射和透射、导行电磁波、电磁波辐射等9章,其特点是:详细地阐述了电磁理论中的物理概念,尽可能多地运用插图和简单例题来说明一些较难理解的物理概念,对基本电磁规律进行了较严密的论证。

本书主要适合作为电子与信息工程、通信工程、电子科学与技术专业大学本科生的教材,也可作为其他电子工程类专业的大学本科生和电信、电子工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/姚毅主编. —重庆:重庆大学出版社,2003.3

电子信息工程专业本科系列教材

ISBN 7-5624-2840-9

I. 电... II. 姚... III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007727 号

电磁场与电磁波

主编 姚 毅

参编 程雪梅 刘密歌

责任编辑:彭 宁 版式设计:彭 宁

责任校对:蓝安梅 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400044

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)

全国新华书店经销

自贡新华印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.75 字数:418千

2003年3月第1版 2003年3月第1次印刷

印数:1—4 000

ISBN 7-5624-2840-9/TM·88

定价:19.50元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有 翻印必究

前言

自从克拉克·麦克斯韦的经典著作《电学与磁学论》问世以来,经过了一个多世纪的时间,虽然电磁理论在许多方面取得了新的进展,并在工程中得到了广泛应用,也有许多关于电磁理论的著作和教材相继出版,但随着读者的日趋普遍,迫切需要一本既可作为电子类本科生教材,又可作为有关人员自学的教科书。

本书系统地描述了电磁场和电磁波的基本规律,主要适合作为电子与信息工程、通信工程、电子科学与技术专业大学本科生的教材,也可作为其他电子工程类专业的大学本科生和电信、电子工程技术人员的参考书。

由于电磁现象比较复杂和抽象,它的宏观规律隐含在用符号和公式表示的麦克斯韦方程组中,因此读者学习时一般都会感到困难。本书比较详细地阐述了电磁理论中的物理概念,尽可能多地运用插图和简单例题来说明一些较难理解的物理概念,而且对基本电磁规律进行了较严密的论证。

全书共分9章。第1章系统地介绍了矢量分析知识,它是学习电磁场和电磁波理论的数学工具。第2章到第4章系统地介绍了静电场、恒定电流的电场和恒定磁场的基本理论及其计算方法。第5章讨论时变电磁理论,这是本书的核心部分。此章中给出了宏观经典电磁理论的基本方程——麦克斯韦方程组,并在此基础上导出了一切形式电磁波的传播方程——波动方程,推导了电磁辐射方程——达朗伯方程。第6章讨论电磁波在无界的理想介质和导电媒质中的传播规律。第7章讨论电磁波在介质分界面上发生的物理过程,即电磁波在介质分界面上的反射和透射。第8章讨论电磁波在规则波导中的传播规律。第9章讨论电磁辐射的基本原理。

四川轻化工学院姚毅同志编写了第1、2、6、7、8、9章,重庆工商大学程雪梅同志编写了第4、5章,陕西工学院刘密歌同志编写了第3章。全书由姚毅同志修改和统稿。在编写过程中,四川轻化工学院给予了大力支持,四川大学王保义教授,四川轻化工学院曾黄麟教授和许多兄弟院校的老师提出了宝贵意

见,四川轻化工学院文字桥同志阅读了部分书稿,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,教材中一定有不少错误和不妥之处,敬请读者赐教。

编 者

2002 年 11 月

目 录

第 1 章 矢量分析	1
1.1 场的概念和表示法	1
1.2 三种常用的坐标系	2
1.3 标量场的梯度	7
1.4 矢量场的通量 散度	11
1.5 矢量场的环流 旋度	16
1.6 亥姆霍兹定理	21
小结	22
习题	23
第 2 章 静电场与恒定电场	27
2.1 电荷与电流的分布及表示法	27
2.2 静电场的基本方程	31
2.3 泊松方程 拉普拉斯方程	40
2.4 介质中的高斯定律 电位移矢量	45
2.5 介质分界面上的边界条件	50
2.6 导体系统的电容	53
2.7 电场的能量和能量密度	57
2.8 恒定电场的基本方程	60
2.9 恒定电场与静电场的比拟	64
小结	65
习题	67
第 3 章 静电场的解法	72
3.1 静电场问题的类型	72
3.2 惟一性定理	73
3.3 分离变量法	74
3.4 镜像法	84
*3.5 有限差分法	89
小结	92
习题	92

第 4 章 恒定磁场	97
4.1 恒定磁场的实验定律与磁感应强度	97
4.2 恒定磁场的基本方程	100
4.3 矢量磁位	106
4.4 磁偶极子	109
4.5 磁介质中的安培环路定律	113
4.6 恒定磁场的边界条件	118
4.7 电感	121
4.8 磁场的能量和能量密度	126
小结	128
习题	130
第 5 章 时变电磁场	133
5.1 静态场的场与源的时间特性	133
5.2 电磁感应定律及其数学方程	134
5.3 位移电流与时变场中的安培环路定律	136
5.4 麦克斯韦方程组	138
5.5 不同介质分界面上的边界条件	141
5.6 波动方程	145
5.7 坡印廷定理和坡印廷矢量	147
5.8 标量位和矢量位	149
小结	150
习题	152
第 6 章 正弦平面电磁波在无界空间中的传播	156
6.1 正弦电磁场	156
6.2 理想介质中的均匀平面波	162
6.3 电磁波的极化	166
6.4 媒质的损耗及分类	169
6.5 波在有耗媒质中的传播	171
6.6 电磁波的群速与色散失真	179
小结	181
习题	182
第 7 章 电磁波的反射和折射	186
7.1 平面波的一般数学表达式	186
7.2 对平面分界面的垂直入射	188
7.3 对平面分界面的斜入射	191

小结	201
习题	202
第 8 章 导行电磁波	205
8.1 导波与导波系统	205
8.2 波导中传播波的普遍特性	206
8.3 矩形波导	211
8.4 圆波导	218
8.5 同轴波导	224
8.6 波导中的能量传输与损耗	228
小结	231
习题	231
第 9 章 电磁波辐射	235
9.1 电磁辐射原理	235
9.2 基本电振子的辐射	238
9.3 磁偶极子天线辐射	244
*9.4 电磁场的对偶性	246
*9.5 电磁场的互易性	248
小结	250
习题	251
附录	254
附录 1 常用矢量恒等式	254
附录 2 亥姆霍兹定理的证明	256
附录 3 量的符号和单位	258
参考文献	260

第 1 章

矢量分析

本章主要介绍场的概念和表示方法,三种常用的正交坐标系,标量场的梯度,矢量场的通量、散度,矢量场的环流、旋度,最后介绍所有矢量场满足的共同性质——亥姆霍兹定理。

矢量分析是分析电磁场问题的基本数学工具,是学好电磁场与电磁波必须掌握的内容。如果在此之前,读者已学习过矢量分析或场论的有关课程,并已熟练掌握,则可跳过此章,直接开始学习静电场的内容。

1.1 场的概念和表示法

一个确定区域中的场被定义为:物理系统中某物理量在该区域的一种分布。如果被描述的物理量是标量,则定义的场被称为**标量场**;如果被描述的物理量是矢量,则定义的场被称为**矢量场**。某一区域中各点的温度分布是一个标量场,密度分布是一个标量场;而某一区域中各点流体的流速构成一个矢量场,各点流体的压力分布也构成一个矢量场。

物理系统的状态可用某个或某些物理量在确定区域中的分布来描述,因此,物理系统的状态可用某个或某些场来描述。场的一个重要属性是它占有一个空间。研究一个场,首先要明确此场的分布空间,再看场代表一个什么样的物理量,在此空间中怎样分布。对于给定的场,任何时刻在所研究空间中的每一点它有一个定值,这个值叫该点的场量。因此,一个场可用一个定义在相同区域中的一个函数来描述。一个标量场可用一个标量函数 $\mu(x, y, z)$ 来描述;一个矢量场可用一个矢量函数 $\vec{A}(x, y, z)$ 来描述。描述场的函数被称为**场函数**。

场不仅具有空间属性,还具有时间属性。描述物理系统状态的物理量不仅按空间分布,一般还随时间变化。因此,场可能是随时间变化的。如果一个物理系统的状态只按空间分布,不随时间变化,也就是说,物理系统的状态是静态的,由此定义的场也是静态的,这样的场称为**静态场**;其场函数与时间无关,记为 $\mu(x, y, z)$ (标量场)和 $\vec{A}(x, y, z)$ (矢量场);如果一个场的场量不仅按空间分布,还随时间变化,这样的场分布是动态的,这样的场称为**动态场或时变场**。其场函数写成 $\mu(x, y, z, t)$ (标量场)和 $\vec{A}(x, y, z, t)$ (矢量场)。

对于一个实际的物理系统,其物理状态的变化是连续的。因此,对于大多数的场,在一个

区域中,除开有限个点和某些面以外,场是连续变化的,即场函数 $\mu(x,y,z,t)$ 和 $\vec{A}(x,y,z,t)$ 是连续函数。矢量场的连续是指各点场量的大小和方向逐点发生微小变化。矢量可由带箭头的线段表示,通常用一些曲线来形象地表示矢量在空间中的分布,这些曲线被称为流线或力线。矢量场的连续又可表述为:构成连续矢量场的流线或力线是一些光滑曲线。

一个矢量在具体坐标系中可以写成分量形式,一个矢量场在具体坐标系中可以分解为三个分量场。例如:在直角坐标系中,静态场可表示为

$$\vec{A}(x,y,z) = \vec{a}_x A_x(x,y,z) + \vec{a}_y A_y(x,y,z) + \vec{a}_z A_z(x,y,z) \quad (1.1.1)$$

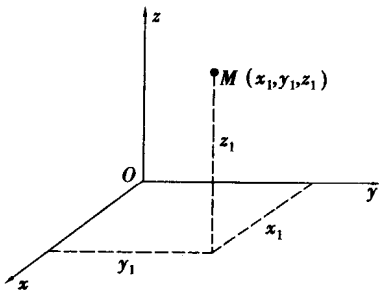
其中, $A_x(x,y,z)$ 、 $A_y(x,y,z)$ 、 $A_z(x,y,z)$ 都是标量场,所以,一个矢量场对应三个标量场。

1.2 三种常用的坐标系

为了分析场在空间中的分布和变化规律,必须引入坐标系。而且,常根据被研究对象的几何形状不同采用不同的坐标系,使问题得到简化。在电磁场问题中,常用的坐标系是直角坐标系、柱坐标系和球坐标系。

1.2.1 直角坐标系

如图 1.2.1 所示,直角坐标系中的三个坐标变量是 x,y,z 。它们的变化范围是



$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{aligned}$$

直角坐标系中任一点表示为 $M(x,y,z)$ 。点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是 $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ 三个坐标曲面的交点。

过空间任意点 $M(x,y,z)$ 的坐标单位矢量记为 $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ 。它们相互正交,而且遵循 $\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z$ 的右手螺旋法则。 $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ 的方向不随 M 点位置的变化而变化,这是直角坐标系的一个重要特征。

图 1.2.1 直角坐标系

直角坐标系中的任一矢量可表示为

$$\vec{A} = \vec{a}_x A_x + \vec{a}_y A_y + \vec{a}_z A_z \quad (1.2.1)$$

其中, A_x, A_y, A_z 分别是矢量 $\vec{A}$ 在 $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ 方向上的投影。

位置矢量

$$\vec{R} = \vec{a}_x x + \vec{a}_y y + \vec{a}_z z \quad (1.2.2)$$

它的微分元是

$$d\vec{R} = \vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz \quad (1.2.3)$$

度量系数:在直角坐标系中各个坐标方向上的度量系数定义为该方向上的长度元与坐标元之比。由点 $M(x,y,z)$ 沿 $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ 方向的长度元分别是 dx, dy, dz 。因此,直角坐标系中三

个方向上的度量系数为

$$h_x = \frac{dx}{dx} = 1 \quad h_y = \frac{dy}{dy} = 1 \quad h_z = \frac{dz}{dz} = 1 \quad (1.2.4)$$

由 $x, x+dx; y, y+dy; z, z+dz$ 这 6 个面决定一个直角六面体, 它的各个面的面积元是

$$\begin{aligned} dS_x &= dydz \\ dS_y &= dx dz \\ dS_z &= dx dy \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

体积元:

$$d\tau = dx dy dz \quad (1.2.6)$$

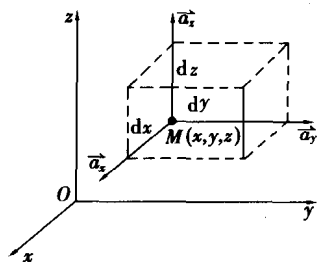


图 1.2.2 直角坐标系中的体积元

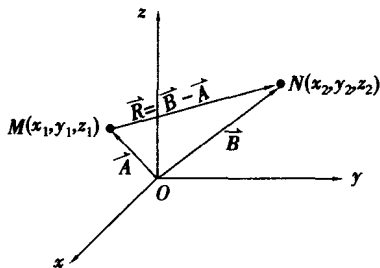


图 1.2.3 点 A 和点 B 的位置矢量

例 1.2.1 试说明从点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $N(x_2, y_2, z_2)$ 所引矢量可表示为

$$\vec{R} = \vec{a}_x(x_2 - x_1) + \vec{a}_y(y_2 - y_1) + \vec{a}_z(z_2 - z_1)$$

解 在直角坐标系中, 由点 M 和点 N 的坐标 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 可写出点 M 和点 N 的位置矢量

$$\vec{A} = \vec{a}_x x_1 + \vec{a}_y y_1 + \vec{a}_z z_1$$

$$\vec{B} = \vec{a}_x x_2 + \vec{a}_y y_2 + \vec{a}_z z_2$$

因此, 从点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 向点 $N(x_2, y_2, z_2)$ 所引矢量 $\vec{R}$ 可以表为点 A 和点 B 的位置矢量之差, 即

$$\vec{R} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{a}_x(x_2 - x_1) + \vec{a}_y(y_2 - y_1) + \vec{a}_z(z_2 - z_1)$$

1.2.2 柱坐标系

如图 1.2.4 所示, 柱坐标系中的三个坐标变量是 r, φ, z 。与直角坐标系相同, 柱坐标系中也有一个 z 变量。各变量的变化范围是:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \\ -\infty &< z < \infty \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

柱坐标系中任一点表示为 $M(r, \varphi, z)$, 点 $M_1(r_1, \varphi_1, z_1)$ 是三个坐标曲面 $r=r_1, \varphi=\varphi_1, z=z_1$ 的交点。

过空间任意点 $M(r, \varphi, z)$ 的坐标单位矢量为 $\vec{a}_r, \vec{a}_\varphi, \vec{a}_z$ 。它们相互正交, 而且遵循 $\vec{a}_r \times \vec{a}_\varphi = \vec{a}_z$ 的右手螺旋法则。值得注意的是, 除 $\vec{a}_z$ 外, $\vec{a}_r, \vec{a}_\varphi$ 的方向都随 M 点的变化而变化, 且满足

$$\frac{d\vec{a}_r}{d\varphi} = \vec{a}_\varphi \quad \frac{d\vec{a}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{a}_r \quad (1.2.8)$$

柱坐标系中任意矢量 $\vec{A}$ 可表示为

$$\vec{A} = \vec{a}_r A_r + \vec{a}_\varphi A_\varphi + \vec{a}_z A_z \quad (1.2.9)$$

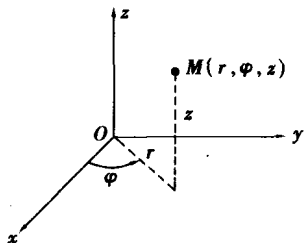


图 1.2.4 柱坐标系

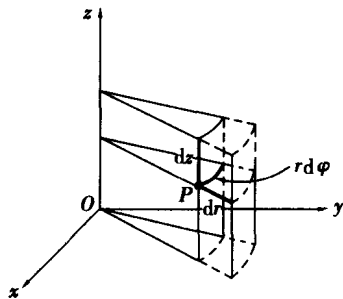


图 1.2.5 柱坐标系的体积元

其中, A_r, A_φ, A_z 分别是矢量 $\vec{A}$ 在 $\vec{a}_r, \vec{a}_\varphi, \vec{a}_z$ 方向上的投影。
位置矢量

$$\vec{R} = \vec{a}_r r + \vec{a}_z z \quad (1.2.10)$$

它的微分是

$$d\vec{R} = \vec{a}_r dr + \vec{a}_\varphi r d\varphi + \vec{a}_z dz \quad (1.2.11)$$

点 $M(r, \varphi, z)$ 沿 $\vec{a}_r, \vec{a}_\varphi, \vec{a}_z$ 方向的长度元分别是:

$$\begin{aligned} dl_r &= dr \\ dl_\varphi &= r d\varphi \\ dl_z &= dz \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

度量系数分别是

$$h_r = 1 \quad h_\varphi = r \quad h_z = 1 \quad (1.2.13)$$

由 $r, r+dr; \varphi, \varphi+d\varphi; z, z+dz$ 6 个坐标面构成的六面体的面积元是

$$\begin{aligned} dS_r &= dl_\varphi dl_z = r d\varphi dz \\ dS_\varphi &= dl_r dl_z = dr dz \\ dS_z &= dl_r dl_\varphi = r dr d\varphi \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

这个六面体的体积元是

$$d\tau = r dr d\varphi dz \quad (1.2.15)$$

例 1.2.2 求圆柱坐标系中从 Z 轴上一点 $z=h$ 指向点 $(r, \varphi, 0)$ 的单位矢量。

解 Z 轴上的点 $z=h$ 的位置矢量为

$$\vec{R}_1 = \vec{a}_z h$$

点 $(r, \varphi, 0)$ 的位置矢量为

$$\vec{R}_2 = \vec{a}_r r$$

因此, 点 $z=h$ 指向点 $(r, \varphi, 0)$ 的矢量为

$$\vec{R} = \vec{a}_r r - \vec{a}_z h$$

则 $\vec{R}$ 的单位矢量为

$$\vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{a}_r r - \vec{a}_z h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

需要注意的是:位置矢量 $\vec{R}_2 = \vec{a}_r r$ 随坐标 φ 变化,因此, $\vec{R}$ 矢量也随坐标 φ 变化。

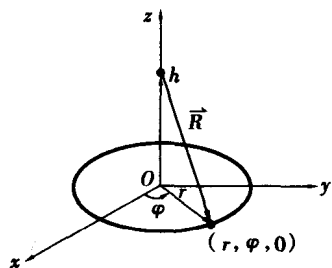


图 1.2.6 柱坐标系中的矢量表示

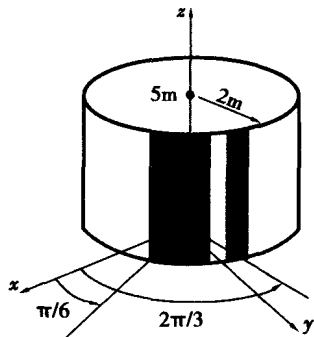


图 1.2.7 柱坐标系中的面积计算

例 1.2.3 在圆柱坐标系中,求圆柱面的部分侧面面积。其中, $r = 2 \text{ m}$, $h = 5 \text{ m}$, $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$, 如图 1.2.7 所示。

解 在圆柱面侧面上的面积元为

$$dS_r = r d\varphi dz$$

因此,部分侧面面积为

$$S = \int_0^5 \int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2 d\varphi dz = 5\pi \text{ m}^2$$

1.2.3 球坐标系

如图 1.2.8 所示,球坐标系中的三个坐标变量是 r, θ, φ 。它们的变化范围是

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

球坐标系中任意点可用 $M(r, \theta, \varphi)$ 来表示,点 $M_1(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ 是 $r = r_1, \theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$ 三个坐标曲面的交点。过空间任意点 $M(r, \theta, \varphi)$ 的坐标单位矢量为 $\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\varphi$ 。它们相互正交,遵循

$$\vec{a}_r \times \vec{a}_\theta = \vec{a}_\varphi, \vec{a}_\theta \times \vec{a}_\varphi = \vec{a}_r, \vec{a}_\varphi \times \vec{a}_r = \vec{a}_\theta \quad (1.2.17)$$

的右手螺旋法则。必须注意, $\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\varphi$ 的方向都随 M 点的位置变化而变化,且满足

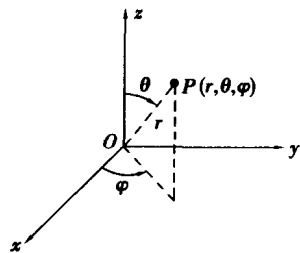


图 1.2.8 球坐标系

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{a}_r}{\partial \theta} = \vec{a}_\theta & \frac{\partial \vec{a}_r}{\partial \varphi} = \vec{a}_\varphi \sin \theta \\ \frac{\partial \vec{a}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{a}_r & \frac{\partial \vec{a}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{a}_\varphi \cos \theta \\ \frac{\partial \vec{a}_\varphi}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial \vec{a}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{a}_r \sin \theta - \vec{a}_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (1.2.18)$$

球坐标系中任一矢量 $\vec{A}$ 可表示为

$$\vec{A} = \vec{a}_r A_r + \vec{a}_\theta A_\theta + \vec{a}_\varphi A_\varphi \quad (1.2.19)$$

其中 A_r, A_θ, A_φ 分别是矢量 $\vec{A}$ 在 $\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\varphi$ 方向上的投影。

位置矢量为

$$\vec{R} = \vec{a}_r r \quad (1.2.20)$$

其微分元为

$$d\vec{R} = \vec{a}_r dr + \vec{a}_\theta r d\theta + \vec{a}_\varphi r \sin \theta d\varphi \quad (1.2.21)$$

沿 $\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\varphi$ 方向上的长度元分别是

$$dl_r = dr \quad dl_\theta = r d\theta \quad dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi \quad (1.2.22)$$

度量系数分别为

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\varphi = r \sin \theta \quad (1.2.23)$$

由 $r, r+dr; \theta, \theta+d\theta; \varphi, \varphi+d\varphi$ 6 个坐标曲面围成的六面体的面积元是

$$\begin{aligned} dS_r &= dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ dS_\theta &= dl_r dl_\varphi = r \sin \theta dr d\varphi \\ dS_\varphi &= dl_r dl_\theta = r dr d\theta \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

这个六面体的体积元为

$$d\tau = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (1.2.25)$$

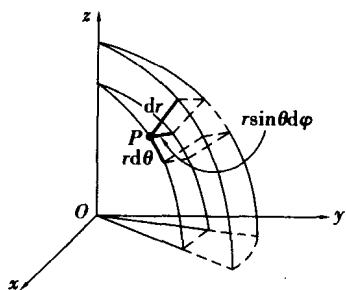


图 1.2.9 球坐标系体积元

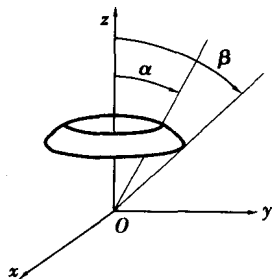


图 1.2.10 球坐标系中面积的计算

例 1.2.4 在球坐标系中, 写出半径为 a 的球面上环带 $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 的表面积表达式, 如图 1.2.10 所示。再进一步求出 $\alpha = 0, \beta = \pi$ 时的表面积。

解 球面上的微分面元为

$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

于是

$$S = \int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi a^2 (\cos\alpha - \cos\beta)$$

再将 $\alpha=0, \beta=\pi$ 代入上式可得整个球面的面积 $S=4\pi a^2$ 。

1.2.4 三种坐标系的坐标变量之间的关系

(1) 直角坐标系与柱坐标系的关系

根据图 1.2.4 所示的几何关系可得

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin\varphi & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z & z &= z \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

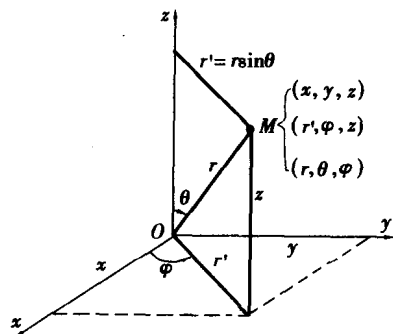
(2) 直角坐标系与球坐标系的关系

由图 1.2.11 所示的关系可得

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

$$\begin{aligned} z &= r \cos\theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$



(3) 柱坐标系与球坐标系的关系

由图 1.2.11 所示的关系可得(柱坐标系中的坐标为 r', φ, z)

$$\begin{aligned} r' &= r \sin\theta & r &= \sqrt{r'^2 + z^2} \\ \varphi &= \varphi & \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \\ z &= r \cos\theta & \varphi &= \varphi \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

图 1.2.11 直角坐标系与球坐标系的关系

1.3 标量场的梯度

对标量场的研究,主要讨论场的分布和在空间中的变化规律。标量场的一个重要特点就是场函数值相等的点构成一个曲面——等位面。标量场在空间中的分布用等位面来表示,空间中某点场沿各方向的变化和等值面的变化用方向导数和梯度来描述。

1.3.1 标量场的等值面

设有一个标量场 $\mu(x, y, z)$, 这里假设 $\mu(x, y, z)$ 是连续函数。若令

$$\mu(x, y, z) = C \quad (1.3.1)$$

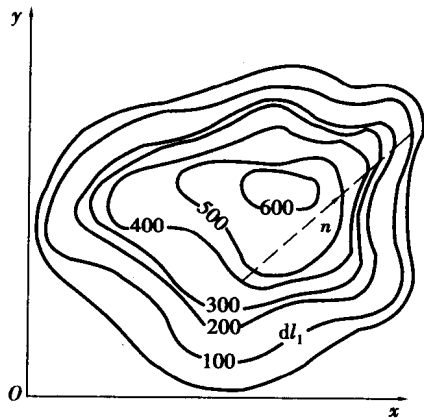


图 1.3.1 标量场的等值面

C 为任意常数,随着 C 的取值不同,方程(1.3.1)给出一组曲面,如图 1.3.1 所示。在表面上的各点,虽然坐标 x, y, z 不同,但函数值相等,这样的曲面称为 $\mu(x, y, z)$ 的等值面。例如,温度场中的等温面,密度场中的等密度面,电场中的等电位面等。方程(1.3.1)称为等值面方程。

由于实际的标量场是连续分布的,并且可用一个连续分布的函数来表示,因此,充满整个标量场所在空间的等值面互不相交;或者反过来说,整个标量场所在空间由一系列互不相交的等值面完全填充。当然,场中的一个点只能在一个等值面上。标量场的分布又可用空间中一系列几何曲面(等值面)的分布来描述。

1.3.2 标量场的方向导数 梯度

设两相邻等值面分别为 μ_1 和 μ_2 , 且 $\mu_2 - \mu_1 = d\mu$, 如

图 1.3.2 所示。 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为等值面 μ_1 上的一定点, 根据偏导数的定义可以写出

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\mu(M) - \mu(M_0)}{l} \quad (1.3.2)$$

M 为 M_0 邻域内的任一点, $\left. \frac{\partial \mu}{\partial l} \right|_{M_0}$ 就称函数 $\mu(x, y, z)$ 在点 M_0 沿 l 方向的方向导数。

方向导数是函数 $\mu(x, y, z)$ 在给定点沿某一方向对距离的变化率。 $\frac{\partial \mu}{\partial l} > 0$, 函数 $\mu(x, y, z)$ 沿 l 方向增大; $\frac{\partial \mu}{\partial l} < 0$, 函数 $\mu(x, y, z)$ 沿 l 方向减小; $\frac{\partial \mu}{\partial l} = 0$, 函数 $\mu(x, y, z)$ 沿 l 方向不变化。

若点 M 在等值面 μ_2 上移动, 根据微分定义:

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu}{\partial y} dy + \frac{\partial \mu}{\partial z} dz \quad (1.3.3)$$

因为

$$d\vec{l} = \vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz \quad (1.3.4)$$

显然, $d\mu$ 可以表示成 $d\vec{l}$ 与矢量

$$\nabla \mu = \vec{a}_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \quad (1.3.5)$$

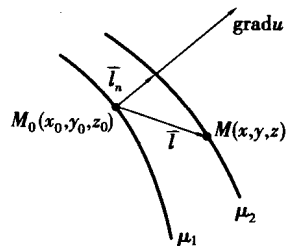


图 1.3.2 方向导数、梯度

的标量积, 即

$$d\mu = \nabla \mu \cdot d\vec{l} \quad (1.3.6)$$

矢量 $\nabla \mu$ 称为函数 $\mu(x, y, z)$ 在 M_0 点的梯度, 用 $\text{grad} \mu$ 表示。下面就来讨论 $\nabla \mu$ 的几何意义。

由式(1.3.6), 上述两相邻等值面 μ 的增量可以写成

$$d\mu = \nabla \mu \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \mu}{\partial l} dl \quad (1.3.7)$$

显然, $\vec{l}$ 方向上的方向导数 $\frac{\partial \mu}{\partial l}$ 为梯度 $\nabla \mu$ 在 $\vec{l}$ 方向上的投影。如果 $\nabla \mu$ 与 $\vec{l}$ 方向相同, 则

$\frac{\partial \mu}{\partial l} = |\nabla \mu|$, 取最大值; 如果 $\nabla \mu$ 与 $\vec{l}$ 方向夹角为 θ , 则 $\frac{\partial \mu}{\partial l} = |\nabla \mu| \cos \theta$; 当 $\nabla \mu$ 与 $\vec{l}$ 互相垂直时, $\frac{\partial \mu}{\partial l} = 0$ 。

因为 M_0 点落在 μ_1 的等值面上, M 点落在 μ_2 的等值面上, 不管 M 点怎样变动, 两等值面上函数的差值为一常数 $d\mu$ 。从 M_0 点取不同的方向位移到 μ_2 上, 它引起的 $d\mu$ 是相同的, 但路径的长度不同, 表示沿不同的方向 μ 的方向导数不同, dl 越大, $\frac{\partial \mu}{\partial l}$ 就越小; 反过来, dl 越小, $\frac{\partial \mu}{\partial l}$ 就越大。显然, dl 沿等值面法向 $\vec{n}$ 的路径最短, μ 的方向导数为最大值, 此时

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial l_n} dl_n \quad (1.3.8)$$

因此

$$|\nabla \mu| = \frac{\partial \mu}{\partial l_n} \quad (1.3.9)$$

即梯度的模是 μ 的最大增加率。梯度的方向在等值面的法线方向上, 它就是 μ 增加率最大的方向。

直角坐标系中哈密顿 (Hamilton) 算符表示为

$$\nabla = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3.10)$$

因此, 直角坐标系中梯度计算公式为

$$\text{grad} \mu = \nabla \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial \mu}{\partial z} \vec{a}_z \quad (1.3.11)$$

柱坐标系中的哈密顿算符和梯度计算公式为

$$\nabla = \vec{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3.12)$$

$$\text{grad} \mu = \nabla \mu = \vec{a}_r \frac{\partial \mu}{\partial r} + \vec{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + \vec{a}_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \quad (1.3.13)$$

球坐标系中的哈密顿算符和梯度计算公式为

$$\nabla = \vec{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.3.14)$$

$$\text{grad} \mu = \nabla \mu = \vec{a}_r \frac{\partial \mu}{\partial r} + \vec{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \vec{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \quad (1.3.15)$$

例 1.3.1 设点电荷 q 位于球坐标原点, 在它周围空间任一点 $M(r, \theta, \varphi)$ 的电位为

$$\mu(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中 q 和 ϵ_0 为常数。试求空间各点 ($r \neq 0$) 电位的梯度。

解 由于电位函数 $\mu(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 只是 r 的函数, μ 具有球对称性, 将 $\mu(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 代入式 (1.3.15) 得

$$\nabla \mu = \vec{a}_r \frac{\partial \mu}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$