

G 633.6
17

中学数学手册

〔苏联〕A.Γ. 齐普金编著

李 万 年 等译

知 识 出 版 社

中学数学手册

〔苏联〕A. Γ. 齐普金 编著

李万年 刘鸿坤 译
潘德松 徐福生
李 万 年 校

知 识 出 版 社

1983·5·上海

内 容 提 要

本手册是按照苏联新的中学教学大纲编写而成的。其中，除了包括初等数学的经典内容以外，还包括集合论初阶、数学分析基础以及向量代数的问题。经典内容显示出很高的精确水平；手册中还包含许多例题。

本手册是供中学生、中学和中等专科学校的教师使用的，也可供准备进入高等学校的读者参考。

Александр Геннадиевич Цыпкин

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

для средней школы

Изд. «Наука», М., 1981

中 学 数 学 手 册

[苏联] А. Г. 齐普金 编著

李万年 刘鸿坤 译

潘德松 徐福生

李万年 校

知 识 出 版 社 出 版

(上海古北路650号)

新华书店上海发行所发行 上海海峰印刷厂印刷

开本 850×1156 毫米 1/32 印张 14 插页 2 字数 380,000

1983年5月第1版 1983年5月第1次印刷

印数: 1-112,000

书号: 13214·1003 定价: 1.45 元

译 者 序

本书是根据苏联“科学出版社”1979年出版的《中学数学手册》(СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ) 1981年第二次印刷的版本译出的。原书已印了近五十万册。

全书共10章,并附有“常用公式表”、“附录:计数制”、“基本符号表”和“索引”。不仅包括传统的中学数学内容,而且还包括中学数学改革中多数国家所选用的集合论、解析几何、微积分等内容。所使用的符号和数学语言也与大多数数学书籍和教科书相一致。本书内容丰富、通俗易懂、文字精炼、逻辑性强,具有理论的性质,尤其是初等数学的经典内容显示出很高的精确水平。

本书原供苏联中学生和中等专科学校的教师使用,层次清楚、检索方便,可供我国广大中学生、各类中等专科学校的教师使用,也可供准备进入高等学校的读者复习中学数学时参考。

参加本书翻译的有刘鸿坤(第1、2、3章)、潘德松(第5、6章)、徐福生(第4、7章)、李万年(其它部分)。李万年对全书进行了统校,刘鸿坤也作了部分复校工作。在翻译过程中译者对原文个别含义不够明确的地方,在译文中以译者注的形式予以说明;对原书中的印刷错误及作者疏漏之处,凡已发现的,均一一改正,译文中不再说明。

在本书的翻译过程中,曾得到顾国庆同志的不少帮助,谨在此表示衷心的感谢。

译 者

1981年12月于上海

编 者 序

本手册是供中学和中等专科学校的学生使用的。全书包括中学数学教材范围内的概念、定义、公式、定理以及解题方法。此外,手册中还补充了许多章节,这些内容不包括在现时中学教学大纲之内,但是对于更好地理解数学基本原理是重要的(这些补充的章节用小号字体加以区别)。特别是整数及多项式的整除性,欧几里得除法,复数,代数基本定理,二次曲线,集合的等价和同构的概念,集合运算的概念等等,都属于补充内容。

某些章节的内容,不同于现时中学教科书中所采用的叙述,而是采用一种更为传统的叙述。几何学首先属于这样的章节。其中集合论语言的采用导致了一系列术语和含义上的不合理性。所以本手册中的几何内容,在希尔伯特公理的基础上,采用传统的术语叙述。此外,手册中也用另外的方法对向量、数列和定积分加以定义。

中学课程中关于实数的知识过于分散,为了得出对实数建立的原则和结构的完整概念,手册中给出实数理论的系统的叙述。在手册中,实数理论用统一的观点叙述,即整数,有理数,实数都是作为自然数的自然扩展而依次引入的。

与近似计算有关的问题也作了某些扩展。除了一般性的初等知识以外,手册中还研究连分数的逼近性质,并介绍了一个最简单而又著名的近似计算方法——牛顿切线法。

本手册中所采用的符号,除了个别的以外,都与中学教科书中所采用的符号相一致。区间的表示属于上述这种例外:在手册中用圆括号表示区间,大多数数学方面的书籍和教科书中都是这样表示的。

本手册基本上具有理论的性质。其中没有表,也没有关于对数计算尺和在近年来广为流行的袖珍计算器的知识,并很少谈到十进制小数

的算术运算. 这些知识可以在 M. Я. 魏戈茨基的《初等数学手册》和 Д. Ю. 帕诺夫的《计算尺》等书中找到.

最后应该指出, 逻辑上的统一和对内容足够详细的叙述是本手册所具有的特点. 举出很多例子, 对引进的数学概念和解题的方法加以说明. 因此, 本手册也可以作为复习中学数学课程的参考书.

C. A. 斯捷帕诺夫

作 者 序

本手册的主要对象是中学九年级和十年级的学生，从中可得到中学课程中遇到的概念、定理、公式和最简问题解题方法的简明知识。通过公式表可以方便地得到所要查询的公式，通过索引可以方便地得到所要查询的数学术语。

如果读者对其感兴趣的数学内容要得到足够完整的概念，建议详细地阅读相应的章节。阅读本手册时，可以免读用小号字体排印的章节，这样并不影响对基本内容的理解，因为这些材料是专供具有高水平数学修养的读者了解不包括在中学教学大纲以内的知识时参考的。

使用本手册时应该注意的是它并不能完全代替教科书，因为手册中的大部分内容并没有给出证明。读者可以从下列书中得到相应数学章节的较为完整的概念：

Л. С. 庞特里亚金，高等数学简介. 坐标法.——莫斯科：科学出版社，1977.

Л. С. 庞特里亚金，中学生数学分析.——莫斯科：科学出版社，1980(有中译本，上海教育出版社出版，1982.——译者注)。

Л. С. 庞特里亚金，高等数学简介. 无穷小分析.——莫斯科：科学出版社，1980(有中译本. 吉林人民出版社出版，1983.——译者注)。

А. В. 波戈列洛夫，初等几何.——莫斯科：科学出版社，1977.

А. Н. 吉洪诺夫，Д. П. 科斯托马罗夫，谈谈应用数学.——莫斯科：科学出版社，1979.

А. И. 马尔库雪维奇，复数与保角映射.——莫斯科：科学出版社，1960.

И. И. 叶若夫，А. В. 斯科罗霍德，М. И. 亚德连科，组合分析初阶.——莫斯科：科学出版社，1977.

C. B. 福明, 计数制.——莫斯科: 科学出版社, 1975.

本手册中采用下列栏目: 章, 节, 段; 各段的名称均在目录中列出. 图的编号以章为限. 正文中引用同一章的内容时, 仅指出节和段的序号; 当引用其它章的内容时, 除了节和段的序号以外, 还指出章的序号. 手册最后给出了足够详细的索引, 总结了最常用的公式和采用的符号. 在索引中还标出确定该术语所在的页数. 符号表中也标出第一次引用某符号的页数. 最后还包括关于计数制的附录.

Л. Л. 库德里亚采夫对手册的探讨使手册内容和结构更加完善. E. B. 希金对“几何学”和“坐标法”提出了有价值的建议. B. B. 吉霍米罗夫对手册提出了意见. 作者借此机会表示自己的谢意. E. И. 斯捷奇基娜对手稿作了详细的研究并不断地给以帮助. Т. С. 普列特涅娃提出意见并校正了手稿. 作者也表示衷心的感谢.

A. Г. 齐普金

目 录

译者序.....	i
编者序.....	iii
作者序.....	v
第1章 集合论初阶.....	1
§1. 集合与集合的运算.....	1
1.1 集合与子集合(1) 1.2 集合的运算(2)	
§2. 集合之间的对应与集合的映射.....	4
2.1 对应与映射(4) 2.2 一一映射(4) 2.3 集合的等价(5)	
2.4 集合的分类(5)	
§3. 有序集.....	8
3.1 有序集的概念(8) 3.2 排列(9) 3.3 置换(11) 3.4 选	
排列(13) 3.5 组合(14) 3.6 牛顿二项式(15)	
§4. 数学归纳法.....	16
§5. 具有二元运算的集合.....	18
5.1 集合中的二元运算(18) 5.2 集合的同构(19) 5.3 群(19)	
5.4 环(21) 5.5 体(21)	
§6. 矩阵, 行列式.....	22
第2章 实数.....	25
§1. 自然数.....	26
1.1 自然数集(26) 1.2 自然数集的公理构造(28) 1.3 质数	
算术基本定理(30) 1.4 自然数整除性的某些判别法(31)	
1.5 最小公倍数, 最大公约数, 欧几里得除法(31)	
§2. 整数.....	35
2.1 整数集(35) 2.2 整数的算术运算(36)	
§3. 有理数.....	39
3.1 有理分数(39) 3.2 有理数(43) 3.3 整数与有理数(44)	

3.4 有理数集作为整数集的扩充(45)	
§ 4. 实数	45
4.1 实数集作为有理数集的扩充(45)	4.2 实数集的公理构造(46)
4.3 把实数表示为十进小数(49)	4.4 实数集的几何表示(51)
4.5 有理数和无理数的十进表示(52)	4.6 数的无理数证明的一些方法(55)
4.7 代数数和超越数(58)	4.8 幂和方根(59)
4.9 对数(61)	
§ 5. 十进小数	62
5.1 十进位计数制(62)	5.2 十进小数的概念(63)
5.3 有限十进小数的算术运算(66)	5.4 有限十进小数化为有理分数(68)
5.5 无限循环小数化为有理分数(68)	
§ 6. 连分数	70
§ 7. 计算方法	73
7.1 数的近似值与误差(73)	7.2 数的近似值的十进表示(75)
7.3 数的四舍五入法(77)	7.4 切线法(牛顿法)(77)
7.5 自然数的平方根的求法(79)	
第3章 复数	81
§ 1. 复数集	82
1.1 复数集的公理构造(82)	1.2 有序实数对的集合与复数集(84)
§ 2. 复数的几何表示与三角形式	86
2.1 复数的几何表示(86)	2.2 复数的和与差的几何表示(87)
2.3 复数的三角形式(87)	
§ 3. 复数的幂	89
3.1 复数的自然数次幂(89)	3.2 复数的 n 次方根(89)
第4章 代数学	91
§ 1. 一元多项式	91
1.1 多项式的概念. 多项式的算术运算(91)	1.2 多项式的因式(93)
1.3 多项式的除法. 戈尔涅尔模式. 贝儒定理(94)	1.4 求两个多项式最高公因式的欧几里得除法(96)
1.5 多项式的根(98)	
1.6 乘法的简单公式(98)	1.7 韦达公式(99)
1.8 代数基本定理(100)	1.9 多项式的因式分解(100)
1.10 代数基本定理	

对实系数多项式的一些推广(100)	
§2. 多元多项式	101
2.1 多元单项式和多元多项式(101)	2.2 多项式项的字典排列法(102)
§3. 有理代数分式	103
3.1 代数分式的算术运算(103)	3.2 真代数分式(105) 3.3 最简分式(106) 3.4 比例(107)
§4. 无理代数式	108
§5. 方程, 代数方程	110
5.1 基本定义(110)	5.2 线性方程(112) 5.3 二次方程(113)
5.4 二项方程(115)	5.5 双二次方程(116) 5.6 某些可化为二次方程的四次方程(117)
5.7 整系数代数方程的解(119)	5.8 有理代数方程(120) 5.9 无理方程(121)
5.10 绝对值号内含有未知数的方程(124)	5.11 在复数集中解方程(125)
5.12 不定方程(127)	
§6. 超越方程	128
6.1 指数方程(128)	6.2 对数方程(129)
§7. 方程组, 线性方程组	131
7.1 几个基本定义(131)	7.2 线性方程组(132) 7.3 逐次消元法(高斯法)(133)
7.4 两个二元线性方程的方程组(138)	7.5 线性方程组的解的几何意义(139)
§8. 非线性代数方程组	142
§9. 不等式	145
9.1 不等式的定义和基本性质(145)	9.2 某些重要的不等式(146)
§10. 不等式和不等式组的解	148
10.1 某些基本定义(148)	10.2 一元线性不等式和一元线性不等式组(149)
10.3 二次不等式(149)	10.4 区间法(151)
10.5 解无理不等式(153)	10.6 指数不等式(154) 10.7 对数不等式(154)
10.8 二元不等式解集的几何表示(156)	
§11. 证明不等式正确性的方法	162
11.1 利用一连串等价不等式证明不等式的正确性(162)	11.2 利用不等式中出现的函数性质证明不等式的正确性(163)
11.3 不等	

式正确性的几种特殊的证法(164) 11.4 验证数值不等式正确性的一些方法(166)

第5章 坐标法 170

§1. 坐标系 170

1.1 坐标轴(170) 1.2 平面笛卡儿直角坐标系(171) 1.3 极坐标系. 直角坐标和极坐标之间的关系(174) 1.4 空间笛卡儿直角坐标系(174) 1.5 平面方程(176)

§2. 向量 176

2.1 向量. 基本概念(176) 2.2 向量之间的夹角. 向量的数量积(182) 2.3 平面向量的坐标(183) 2.4 空间向量的坐标(184) 2.5 向量积(185) 2.6 向量的混合(数量-向量)积(186)

§3. 解析几何基础 187

3.1 直线(187) 3.2 圆周(189) 3.3 椭圆(190) 3.4 双曲线(192) 3.5 抛物线(194)

第6章 几何学 195

§1. 射线. 线段 196

1.1 射线(196) 1.2 线段(197)

§2. 平面上的角 198

2.1 角的概念(198) 2.2 角度制(199) 2.3 弧度制(199) 2.4 角的分类(200) 2.5 两个方向之间的夹角(200)

§3. 平面上的平行和垂直 200

3.1 平面上的平行(200) 3.2 平面上的垂直(202) 3.3 点到直线的距离(202)

§4. 空间中的平行和垂直 203

4.1 直线与平面平行(203) 4.2 平面的平行(203) 4.3 直线与平面垂直(204) 4.4 点到平面的距离(204) 4.5 平面的垂直(204) 4.6 斜线(205) 4.7 异面直线(205)

§5. 平面上的投影 205

5.1 平行投影(205) 5.2 正投影(206)

§6. 空间中的角 206

6.1 斜线和平面的夹角(206) 6.2 二面角(207) 6.3 两个平面之间的夹角(207)

§ 7. 折线. 多边形	208
§ 8. 三角形	210
8.1 基本性质(210) 8.2 三角形的中线(211) 8.3 三角形的高(212) 8.4 三角形的角平分线(213) 8.5 三角形的中位线(213)	
8.6 等腰三角形(214) 8.7 等边三角形(214) 8.8 直角三角形(214)	
§ 9. 四边形	215
9.1 平行四边形(215) 9.2 菱形(216) 9.3 矩形(217)	
9.4 正方形(217) 9.5 梯形(217)	
§ 10. 相似多边形	218
10.1 多边形相似的判定(218) 10.2 三角形相似的判定(219)	
§ 11. 圆周和圆	220
11.1 圆周和圆(220) 11.2 切线和割线(221) 11.3 两圆的相互位置(222)	
11.4 圆心角和圆弧(223) 11.5 圆的弧和弦(223)	
11.6 与圆有关的角(224) 11.7 圆的周长和面积(225)	
§ 12. 多边形和圆	226
12.1 内接多边形和外切多边形(226) 12.2 内接三角形(226)	
12.3 外切三角形(227) 12.4 旁切圆(227) 12.5 正三角形和直角三角形的边与内切圆半径和外接圆半径之间的关系(228)	
12.6 圆内接四边形(228) 12.7 圆外切四边形(229)	
§ 13. 几何作图	229
13.1 已知直线(已知线段)的平行线和垂线的作法(229) 13.2 角的作法(230)	
13.3 线段的作法(232) 13.4 圆和圆弧的作法(235)	
13.5 圆的切线的作法(237) 13.6 多边形的外接圆和圆内接多边形的作法(238)	
13.7 多边形的内切圆和圆外切多边形的作法(239) 13.8 三角形的作法(240)	
§ 14. 多面角	244
§ 15. 多面形. 多面体	245
§ 16. 棱柱	246
§ 17. 平行六面体. 正方体	247
§ 18. 棱锥. 棱台	248
§ 19. 正多面体	250

§ 20. 旋转体	253
§ 21. 圆柱	254
§ 22. 圆锥. 圆台	256
§ 23. 球面. 球	259
§ 24. 球的各个部分	261
24.1 球缺(261) 24.2 球扇形(261) 24.3 球台(262)	
24.4 球带(262)	
§ 25. 平面和空间的变换	263
25.1 图形到图形内的映射和图形到图形上的映射(263) 25.2 平面和空间的变换(263) 25.3 空间和平面的保距变换. 图形的全等(264)	
25.4 绕点的平面旋转(265) 25.5 中心对称和中心对称图形(266)	
25.6 平面轴对称(266) 25.7 空间轴对称(267) 25.8 关于平面的对称(268) 25.9 平面位似(268) 25.10 空间位似(269)	
25.11 平面的相似变换(270) 25.12 相似图形(270)	
§ 26. (希尔伯特的)几何公理体系和不定义的几何概念	271
第 7 章 三角学	276
§ 1. 三角函数	276
1.1 角的概念的推广(276) 1.2 三角函数(277) 1.3 单位圆的象限. 三角函数值的符号(280) 1.4 数值变量的三角函数(280)	
1.5 反三角函数(287) 1.6 特殊角的三角函数值(290)	
§ 2. 三角公式	293
2.1 诱导公式(293) 2.2 同角的三角函数之间的关系(294)	
2.3 和角与差角的三角函数(294) 2.4 二倍角、三倍角和半角的三角函数(294) 2.5 三角函数的和(差)化积(三角表达式化为便于取对数的形式)(296) 2.6 三角函数的积化和(298) 2.7 反三角函数间的最简关系式(298)	
§ 3. 三角方程和三角不等式的解	300
3.1 最简三角方程(300) 3.2 较复杂的三角方程的例子(302)	
3.3 最简三角不等式的解(306) 3.4 求解含反三角函数的方程和不等式的例题(306)	
§ 4. 三角形元素之间的关系	309
4.1 基本公式(309) 4.2 三角形元素的计算(310)	

第 8 章 极限论	314
§ 1. 数列	314
1.1 数列的概念(314) 1.2 给出数列的某些方法(315) 1.3 数列 的项的几何描述(316) 1.4 有界数列(317) 1.5 单调数列(318)	
§ 2. 数列的极限	319
2.1 数列极限的概念(319) 2.2 数列收敛的必要条件(322)	
2.3 关于数列极限的定理(323) 2.4 数列收敛的充分条件(325)	
2.5 无穷数列收敛的充要条件(331)	
§ 3. 数项级数	331
3.1 数项级数的概念(331) 3.2 正项级数(334) 3.3 调和级 数(335)	
§ 4. 无穷乘积	335
4.1 无穷乘积的概念(335) 4.2 无穷乘积与级数的关系(336)	
§ 5. 级数	336
5.1 算术级数(336) 5.2 几何级数(337)	
§ 6. 数值函数	338
6.1 数值函数的概念(338) 6.2 给出函数的方法(339) 6.3 两 个函数的和、积、差和商(340) 6.4 复合函数(函数的迭加)(341)	
6.5 偶函数和奇函数(341) 6.6 周期函数(343) 6.7 有界函 数(344) 6.8 单调函数(344) 6.9 互为反函数(346)	
§ 7. 函数的极限	347
7.1 函数极限的概念(347) 7.2 关于函数极限的定理(350)	
7.3 函数极限存在的充要条件(柯西准则)(352) 7.4 某些重要的 极限(353)	
§ 8. 无穷小量	353
8.1 无穷小量的概念(353) 8.2 无穷小量的比较(353)	
§ 9. 函数的连续性	355
9.1 函数连续的概念(355) 9.2 关于连续函数的基本定理(356)	
9.3 初等函数的连续性(357)	
第 9 章 微积分学基础	358
§ 1. 导数	358
1.1 导数的概念(358) 1.2 显函数图象的切线方程(359)	

1.3 导数的物理意义(359)	1.4 关于导数的定理(359)	1.5 初等函数的导数的计算(360)	1.6 高阶导数(364)
§ 2. 原函数. 不定积分			365
2.1 原函数和不定积分的概念(365)	2.2 积分的最简法则和方法(367)		
§ 3. 定积分			370
3.1 平面图形面积的计算问题(370)	3.2 定积分(371)	3.3 定积分的性质(372)	3.4 定积分作为上限的函数(373)
		3.5 微积分学基本公式(374)	
§ 4. 微分方程			375
4.1 几个变量之间函数相关的概念(375)	4.2 常微分方程的概念(376)	4.3 一阶微分方程. 用一阶微分方程描述的例题(377)	4.4 二阶微分方程. 谐振方程(379)
第 10 章 初等函数			382
§ 1. 函数的研究			382
1.1 常量函数(382)	1.2 函数单调的条件(382)	1.3 函数的极大值和极小值(382)	1.4 函数的最大值和最小值(385)
		1.5 曲线凹性的方向(386)	
§ 2. 函数作图			388
§ 3. 函数图象的最简变换			390
§ 4. 线性函数			393
§ 5. 反比例关系			394
§ 6. 线性分式函数			395
§ 7. 二次函数			396
§ 8. 幂函数			399
§ 9. 指数函数			400
§ 10. 对数函数			400
常用公式表			403
附录: 计数制			412
基本符号表			416
索引			420

第1章 集合论初阶

集合论是研究集合(主要是无穷集合)的一般性质的数学分支. 集合论作为独立的数学分支出现, 相对地说是比较晚的, 约在十九世纪末和二十世纪初. 集合论对现代数学的发展有很大的影响, 它是一系列新的数学分支的基础, 能以崭新的观点考察数学的各经典分支, 并对数学对象本身给以较为深刻的理解.

§ 1. 集合与集合的运算

1.1 集合与子集合 数学中有些概念是原始的、不加定义的. 如自然数、点、直线等概念.

“集合”这一概念就是这种不加定义的概念之一. 这一概念是不能给出正式定义的, 因为这一概念并不能简单地归结为用它的同义词“总体”、“一堆元素”等代替“集合”一词. 集合可以根据各种不同的性质, 由各种各样的对象组成(这种对象今后将称为集合的元素). 我们这里所讨论的集合, 它的元素不仅可以是具体的事物, 也可以是某些抽象的概念(数, 几何图形, 符号等).

我们一开始就要声明, “集合”这一概念并不意味着作字面上的理解, 而把它看成“许多”元素的总体. 也可以把集合理解为由一个、两个等事物组成的总体. 除此以外, 为方便起见, 我们把不含有任何元素的集合即空集也认为是集合.

集合通常用大写拉丁字母 $A, B, \dots, X$ 表示. 集合的元素则用小写字母 $a, b, \dots, x$ 表示. 空集用专门的符号 ϕ 表示.

如果集合 A 由 n 个元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成, 那么就写作

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

“元素 a 属于集合 A ”记为 $a \in A$ 或 $A \ni a$ (A 包含 a); $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$,