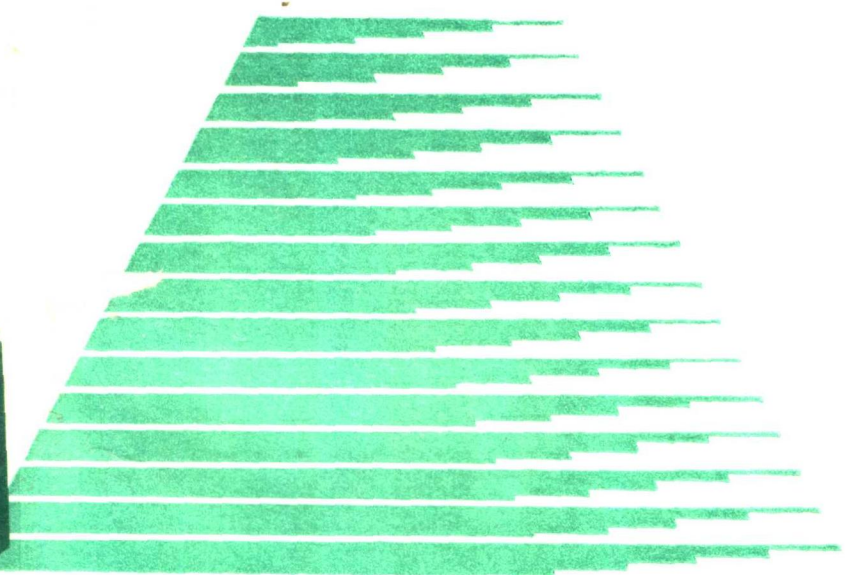


数理化十年高考
与智力开发丛书

数学

1977—1986



吉林教育出版社

数理化十年高考 与智力开发丛书

数
学

1977—1988

湖南教育出版社

数理化十年高考与智力开发丛书

(1977——1986)

数 学

李荫楷 陈家昌 祝承亮
于永泉 隋福林 编

吉林教育出版社

数理化十年高考 (1977—1986) 数学 李荫楷 陈家昌 隋福林 编
与智力开发丛书 祝承亮 于永泉

责任编辑：王铁义

封面设计：王 鹏

出版：吉林教育出版社 787×1092毫米 32开本 9.625印张 插图1 212,000字
1987年4月第1版 1987年5月第2次印刷
发行：吉林省新华书店 印数：12,001—35,087册
统一书号：7375·501 定价：1.50元
印刷：长春市印刷厂 ISBN 7—5383—0104—6/G·97

出版说明

恢复高考已整整十年了。根据广大师生的要求，我们特约长春市有丰富教学经验的中学特级教师编写了这套丛书。目的是与广大中学师生共同探讨怎样贯彻好中学各科教学大纲；教师怎样才能搞好数理化各科教学；学生怎样才能学好数理化各科知识，提高能力，开发智力。

本丛书有如下特点：一、具有实用性。纵观十年考题，老师不难从中得出结论，教学中应该抓什么，教什么，怎样培养能力；学生学什么，怎样学，怎样提高能力。二、可读性强。对十年高考题中的典型题都进行了分析和解答。一般地，题前指明本题重点所考知识点，题后指出学生容易疏漏或容易发生错误的地方。这样，题前有“向导”题后有“保镖”，便于领会。三、内容选择，知识结构有空间感，富有浓烈的时代特色。本书所选题目由浅入深，循序渐进；知识内涵，点多面广，互相渗透，~~纵横交错~~。

由于时间仓促，~~错误与不妥之处~~敬请读者批评、指正。

绪 论

从一九七七年恢复高考至今，已经十年了。通过这十年高考，国家选拔了大批的优秀人材，为实现四化奠定了坚实的基础。

数学高考试题，既要有利于高校选拔新生，又要有利于指导中学数学教学。我们这样大的国家，高校之间，中学之间，地区之间，其差别如此之大，形成一份为大多数师生满意，对有关方面工作都有利的数学高考试题是很不容易的。十年高考的数学试题，是经历了一个逐渐完善、逐渐成熟的过程。它表现在以下几个方面：

1. 逐步形成了适合我国国情的数学试题形式。

近年来的数学试题类型，都是包括选择题、填空题、解答题和证明题等四类。这是传统式与标准化相结合的试题形式。适当增加了小题的数量，减少了大题的分数。例如，1986年大题的最高分数为12分。这样的命题形式，覆盖面大（1986年的试题，考查了80个知识点，占中学教学大纲规定的116个知识点的69%），考生的分数能比较真实地反映出他们的数学水平，因而试题的信度较高。

2. 试题内容逐渐合理。

近几年来，高考数学试题的内容不超出中学数学教学大纲，试题各部分内容的比例，与中学数学教学大纲中规定的

课时比例趋于大体相当，并逐渐过渡到以考查高中数学内容为主。自1981年以后，再没有出现过纯初中内容的数学试题。从1979年以后，几乎每年都有教材中定理、公式的证明或教材中的习题，作为高考试题。这样做，有利于引导师生认真读书，钻研教材，打好基础。另外，试题不回避中学教材中的重点内容，试题中所用的语言和符号，逐渐和统编教材中用的一致。这些做法都十分有利于中学教学。

3. 命题中，既注意了对知识的考查，又重视了对能力的考查。

知识与能力，既有联系，又有区别。把两者混同起来，以为掌握了知识就自然有了能力，这是不对的；把两者割裂开来，以为无须扎实的知识基础，也可以形成能力，也是不对的。从数学上看，能力主要表现在对知识的深刻理解和灵活运用上。因此，我们认为高考命题既要重视考查知识，也要重视考查能力，片面强调哪一方面都是不合适的。1984年的高考数学试题，由于过分突出了对能力的考查，因而试题的难度较大，结果考生的成绩很不理想，这不利于选拔各方面的人材，也不利于以后的中学数学教学。如果数学教学中，只注意题目灵活，不注意基础知识的掌握，就象小孩学走路一样，不会走就要跑，必定要摔跤的。如果这样，在教学上也是收不到良好的效果的。1985年、1986年的数学试题在这方面处理得比较好，特别是1986年更好些。这一年在试题的安排上，注意了从易到难，从基本到灵活，有一定的坡度。

选择题和填空题主要是考查考生全面掌握知识的情况，但小题的安排上，也从易到难，也有少数以考查灵活运用知识为主的题目。这样在整个试题中，难易坡度上分了几个层

次。所谓考查数学能力，应是考查灵活运用中学数学大纲中规定的数学基础知识与分析问题和解决问题的能力。因此，考题用到的知识和技能，在教材中都应有所反映。1986年的数学试题是这样做的，因而受到了广泛的好评。

4. 数学试题的总分数趋于稳定。

十年高考中的前几年，有时数学试题按总分100分计算（如80年、81年），有时尽管按总分120分计算，但后20分用附加题的分数出现，只有少数的数学尖子才能得分，对于大多数考生来说和按总分100分计算区别不大。数学是理科的基础，也是进一步学习大学各专业必备的基础知识，也是中学生就业后自学的起码基础，它在中学教学总时数中最多，因此，它在高考总分数中应占有较大的比例。近几年来，数学正式试题按总分120分计算（理科还有10分的附加题，不计入总分），是必要的，也是合理的。

值得研究的是，我们应要求中学生具备怎样高的数学能力，才能适应未来的需要呢？

现行中学平面解析几何教科书中的部分习题、复习题与高考试题中解析几何的大题，都已超过了六十年代大学数学系解析几何教材中相应部分的难度。人一生的精力是有限的，青少年的精力怎样分配才更为科学，把初等数学掌握到什么程度比较合适，这是关系我们民族兴旺发达的大事，我们愿意与数学界的同志们一起探讨研究这个问题，希望有关领导部门采取相应的措施，把今后高考数学试题的难度控制在适当的高度上。

现在的中学生，将是未来四化建设的生力军，他们的智力开发情况，将直接影响着四化建设的速度。如何开发青少

年的数学智力？这是广大中学生和数学教师所关心的大事，就此问题我们提出如下建议：

1. 分清中学数学教与学中，不同阶段的不同任务和要求。

掌握数学知识，发展数学能力，有个循序渐进的过程。虽然对不同情况的学生，这个过程也有所不同，但谁也不能越过这个过程，这是个客观规律。中学数学的教与学中，新知识的教与学，单元复习，学期末复习，高三总复习，其各阶段中教与学的任务和要求是不同的。尽管它们之间有着密切的联系，但有不同层次高度的要求。一般说来，是按理解、掌握到运用到灵活运用的顺序进行的。我们不能在开始阶段就对学生提出过高的要求，企图“一蹴而就”是不可能的。高考试题是针对学生学完全部高中课程并经过相当的一段总复习后的情况而拟定的。经过三年高中阶段的学习和复习，学生对中学数学知识的掌握上，数学能力（指计算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及它们的综合运用）的提高上，已经有了一个从量变到质变的发展，这时才有可能解答好高考数学试题。有些教师忽视上述过程，在新知识教学时，就把高考试题中涉及到这段内容的大题，不加分析地拿给学生，甚至把平时的教学要求，订到高考数学试题要求的高度上，这是违背教学规律的一种做法，不仅增加学生的负担，也容易挫伤学生的锐气，欲速则不达。我们应当分清高考要求与平时教学要求的区别，拟订出逐步达到高考要求的计划，使学生的数学智力逐步得到开发。

2. 重视技能的训练。

高中的数学教师都希望自己教的学生能具有迅速、正确地解答高考数学试题的能力。也确实有一部分学生，他们对

各种数学考试，直到最后的高考，都能取得较好的成绩，可以说他们具备了中学数学“考不倒”的能力，这表明他们形成了较高的数学能力。这种能力是怎样培养和训练出来的，应当认真分析和研究。

加强技能的训练，是发展数学能力的基础。所谓技能，就是掌握和运用知识的熟练程度。数学技能是在理解和掌握数学基础知识的前提下，经过训练形成的。数学技能的形成又加深了对基础知识的理解。数学能力是数学知识和数学技能的综合运用。

怎样训练技能？其基本方法是讲完一个基础知识后，再进行各种形式的，应用这个基础知识的基本练习，使知识转化为技能。要多少练习才能使知识转化为技能，这对于不同的知识和不同的学生，需要练习的数量是有区别的。统编数学教材，完成技能训练的习题数量，有许多章节配备得不足，例如，对于幂函数一段，大纲要求“掌握幂函数的概念、图象和性质”，这就要求将幂函数的基础知识（概念、性质、图象）转化为技能。教科书中这方面的例题、习题总共才8个，显然对于形成技能的训练一般是不够的。这就需要教师结合教材和学生实际编集些题，加以补充。我们知道，掌握一种技术，要有一个反复练习的过程，数学技能的训练更是如此。对于每一种数学技能，要经过多少次练习才能形成并巩固，这是需要分析和研究的重要课题。

当重视并加强了技能的训练之后，不仅加深了对知识的理解，而且使数学能力的发展有了可靠的基础。因此，数学技能的训练，是开发数学智力的重要环节。在教学中，经常听到学生反映“学得快，忘得快”，其重要原因就在于缺乏技能的训练。因此，在日常的教学中，应当重视并加强对数学

技能的训练。

3. 讲究复习的训练方法，发展数学能力。

理解知识，训练技能，发展能力，都应当讲究方法。对于高中学生，理解知识和训练技能，应主要在平时教学中完成。而发展能力是复习的重要任务。

对于高中复习，学校、师生和家长都十分重视，一般的学校都安排相当多的时间，但成效确差别很大。这其中有个方法问题。

通过复习，应当使学生知识系统化，方法（包括技能）条理化，发展逻辑思维，形成必要的数学能力。有了这种数学能力，解答数学问题，就不困难了。华罗庚先生说过，读书应有个由薄到厚，再由厚到薄的过程。自然，复习阶段，应把书读薄，使书中的知识系统化。对于数学学科，还有个做习题问题，它是掌握知识，训练技能，发展能力所不可缺少的。解答习题的能力，既表现出技能，也反映出能力。复习时，对于数学习题，应有个“从多到少”的过程。也就是说，通过对习题的分析整理（应是帮助学生自己整理），使方法条理化，这个过程中不仅发展了学生的逻辑思维，而且对形成能力也是十分有益的。

当前，在高中复习中的一种不良倾向是，有些教师只就习题的内容和结论分类，不顾大纲和教材中对训练技能和发展能力的要求，甚至把和这段教材有关的所能收集到的习题全都拿来，分成若干类，总结出每一类的解题方法，先作示范，后让学生模仿，并要求学生记住这些孤立的解法，这实质上是把主要精力只放在模仿和记忆的训练上，这不利于学生思维能力的培养，更不利于发展学生独立的解决数学问题的能力。这是一种变相的“题海战术”。每一章相应的习题都

总结出几个或十几个“法”，那么多的“法”，不仅难以记忆，而且在做题时，如果先去考虑那些具体的“法”，然后再对号解题，实在不可取。这样，学生的数学能力很难提高，这是造成“高分低能”的一个重要原因。

值得提倡的做法是，根据大纲和教材对技能和能力的要求，在复习基础知识的基础上，确定训练中心。例如，立体几何可以确定以下训练中心：证共面、证平行、证垂直、证相交、证相等、算角度、算距离、算面积、算体积及综合运用等十个中心。这十个中心又可以分为两大类，即论证与计算。解决立体几何问题的基本方法是空间问题与平面问题的互相转化。解题的基本步骤是先画图（转化过程），再证算。在抓住基本方法、基本思路、基本步骤的同时，引导学生自己总结各训练中心中的解题经验和教训。在复习中，教师要引导学生自己动手、动脑，在练习的基础上进行分析、归纳和总结，是培养学生能力的有效措施。

经验告诉我们，学生能力的提高与科学的训练关系极大。练哪些，怎样练？从教材的基本习题出发，进行变形加深，是训练技能和培养能力的有效方法，下面举两个例子：

例1（立体几何甲种本68页

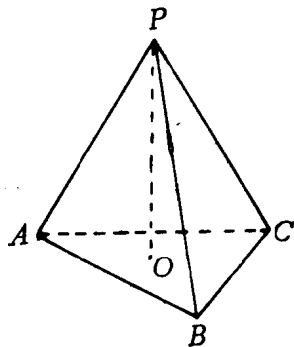
8题）

正三棱锥的底面边长是 a ，高是 $2a$ ，计算它的全面积。

在此题已知条件的基础上，可以引出以下结论：

（1）求它的体积

（2）求过各棱中点的截面面积；



- (3) 求过 AB、BC 的中点且平行 PB 的截面面积；
 (4) 求侧面与底面所成的二面角的大小；
 (5) 求侧棱与底面所成角的大小；
 (6) 求两侧面所成二面角的大小；
 (7) 设 O 是正三棱锥底面的中心，求 O 到侧面的距离；
 (8) 求 A 到侧面 PBC 的距离；
 (9) 求 AB 与 PC 的距离；
 (10) 求证 PB 与 AC 互相垂直。

若把上题已知条件中的高 $2a$ 改成侧棱长是 b ，就又有上述类似的十个题；若把三棱锥的条件改成正四棱锥或正六棱锥，又可以得到相应的许多习题。

有关抛物线过焦点的弦的习题，解析几何教材中有 5 个：111 页 5、8、13，125 页 18、20。在此基础上我们可以引申出许多新的结论。

例 2 AB 是抛物线 $y^2 = 2px$ 的过焦点 F 的弦， θ 是直线 AB 的倾斜角，

- (1) 求证 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$ ；
 (2) O 是坐标原点，求证 $S_{\triangle OAB} = \frac{p}{\sin \theta}$ ；
 (3) 证明以 AB 为直径的圆，必与抛物线的准线相切；
 (4) 证明当 $AB \perp x$ 轴时， $|AB|$ 最短，且 $S_{\triangle OAB}$ 最小；
 (5) 过 AB 的中点 M 垂直 AB 的直线交 x 轴于 N，求证 $|FN| = \frac{1}{2} |AB|$ ；
 (6) 求证 $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{2}{p}$ ；

(7) 把 $|AB|$ 看成 θ 的函数, 求函数的定义域、值域和极小值.

上述习题中, 都有多种解法, 有的选用极坐标系解答简便; 有的选用参数方程解答简便; 有的用几何性质去解简便.

培养学生自己动手改编教材中的习题, 并自己解答, 不仅能提高他们的解题能力, 而且能发展发散型思维和迁移能力.

总之, 我们应认真研究复习阶段的工作, 不断总结经验, 从而迅速培养学生的能力, 开发智力.

为满足广大师生的需要, 我们编写了“十年高考与智力开发丛书(数学)”目的是抛砖引玉, 与教育界的专家、学者和广大师生, 共同探讨出一条开发数学智力, 培养数学能力的最佳途径. 同时, 也为师生平时的教学与学习和准备高考提供一本整理好的资料.

高考是国家对中学毕业生智能状况的一次集中检查, 准备高考是开发智力的重要环节. 为此, 我们首先就十年来高考的数学试题内容, 从代数、几何、立体几何、解析几何四个方面, 依教材的顺序, 按单元做了梳理, 每个单元选典型试题做了分析, 帮助同学了解考题的实质和解法规律. 开发智力的基本办法是掌握教材, 形成能力, 这就是每个单元最后要研究的中心课题. 这里提到的掌握教材, 要比平时教学掌握教材的要求, 相应的高一个层次. 也就是从高考试题的高度上分析对教材的要求. 为了帮助形成比平时教学更高一级的数学能力, 在每一单元之后, 我们又选配了一些例题. 从要求上看, 高考试题应“不超过中学所用统编教材所能达到的程度”. 对于数学来说, 这个“程度”很难恰当掌握, 每

个人的理解也往往不同，因此，我们选配的例题很难做到适度，但从开发智力的要求上，一般是有益的。

总之，我们认为，高中各阶段的复习，一方面要狠抓“双基”训练，另一方面必须注重开发智力和培养能力。这样，必将为“四化”培育出更多更好的创造型、开拓型人才。

目 录

绪 论	1
第一章 代 数	1
一、数与式	1
二、指数与对数	18
三、方程与不等式	30
四、集合与函数	48
五、排列组合与二项式定理	71
六、数学归纳法	79
七、数列与极限	90
第二章 三 角	106
一、三角函数定义及其基本性质	106
二、三角式的恒等变换	116
三、反三角函数及三角方程	127
四、解三角形及三角的应用	134
第三章 立体几何	143
一、直线和平面	143
二、多面体和旋转体	166
第四章 解析几何	188
一、直线	188

二、曲线与方程·····	193
三、圆锥曲线·····	211
附 录 十年高考数学试题选编·····	235