

教师培训参考书

# 初中数学教学概论

中国教育学会数学教学研究会编

人民教育出版社

教师培训参考书

# 初中数学教学概论

中国教育学会数学教学研究会编

教师培训参考书

## 初中数学教学概论

中国教育学会数学教学研究会编

\*

人民教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京印刷一厂印装

开本787×1092 1/32 印张11.125 字数230,000

1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷

印数 1—3,000

ISBN 7-107-10017-X/G·820 定价 1.55元

## 前 言

这本书是专门为我国初中数学教师编写的。早在1982年召开的我会的成立大会上，就提出了大面积提高初中数学教学质量的问题。1983年我会又召开了以各省(自治区、直辖市)教研员(他们大多数是各地研究会的负责人)为主的座谈会，专门讨论和交流了有关抓大面积提高初中数学教学质量的问题，谈现状，讲重要性，着重解决了认识问题。同时也讨论了教学要求与教学方法改革问题，并提出一系列的研究课题。1984年召开的第二届(中学)年会上，不仅有了一批解决这方面问题的内容充实的论文，各地的学生数学成绩有了不同程度的提高，而且取得了一个班、一个学校，也有一个县、一个市大面积提高初中数学教学质量的事例。但从中也看到相当多的县由于教研力量不强，师资质量不高，很难把这项工作搞好。感到在解决认识问题、教学要求之后，如果不抓师资水平的提高，真正的“大面积提高”就难以达到。为此，在1985年初举行的在京常务理事会上作出了举办“初中数学教师培训讲研会”的决定，之后，得到中国教育学会的同意，经与河南省中小学数学教学研究会商定，于1985年8月1日至12日，在河南省安阳市联合举办了这个讲研会。这个讲研会得到国家教委师范司、中国教育学会、河南省教育厅和安阳市领导的

热情支持。

这次讲研会的内容,主要讲初中数学的教材教法,以解决教师教学中的实际困难。由人民教育出版社的编辑讲教材的编写意图,目的是理通教材,明确要求;由北京师范大学等单位的老师讲基本的教学方法。

万里同志在全国中小学师资工作会议讲话中指出:“中小学师资队伍的建设,在整个教育工作中,有着特殊的重要地位。它关系到我们中华民族下一个世纪接班人的培养问题,是教育这个经济发展战略重点的重点。”根据这次讲研会到会同志的要求,为适应各地培训师资的需要,帮助教师掌握教材、驾驭教材,掌握基本的教学方法,我们请讲课人将讲稿修改后,编成《初中数学教材分析》、《初中数学教学概论》两书,由人民教育出版社出版(前者已于1986年3月出版)。

本书为《初中数学教学概论》,主要内容是由北京师范大学等单位的老师的讲稿修改而成的。重点是用较高的观点进一步阐述初中数学各部分内容的地位、作用和它们之间的联系;根据初中学生的年龄特征和因材施教的原则,进一步阐明各部分内容的教学要求,以及在教学中如何来掌握这些教学要求和实现这些教学要求,以使学生既能较好地掌握基础知识和基本技能,又能较好地发展智力、培养能力。

中国教育学会数学教学研究会

1987年8月

# 目 录

前言	( 1 )
一 初中代数教学特点	曹才翰 ( 1 )
二 关于“数”的教学	孙敦甲 ( 30 )
三 关于“解析式”的教学	孙敦甲 ( 82 )
四 关于“方程”的教学	曹才翰 (112)
五 关于“函数”的教学	曹才翰 (152)
* * *	
六 中学初等几何教材演变的概况	钟善基 (167)
七 初中平面几何课的教学要求	钟善基 (190)
八 关于“基本概念、相交线、平行线”的教学	钟善基 (199)
九 关于“三角形”的教学	陈 汶 (210)
十 关于“四边形”与“多边形面积”的教学	钟善基 (256)
十一 关于“相似多边形”的教学	钟善基 (283)
十二 关于“圆”的教学	陈 汶 (297)

# 一 初中代数教学特点

曹 才 翰

在系统分析初中代数教材教法之前，有必要对初中代数的教学特点作些剖析，以便从总体上把握教学思想。

下面分三个问题来谈。

## (一) 教材特点

### 1. 内容庞杂、交错安排

初中代数的内容总括起来说，涉及到数、式、方程、函数。此外还有对数、解三角形和统计初步。

具体地说，数的内容有有理数和实数。由于一元二次方程是在实数范围内求解的，因而在讲一元二次方程之前必须先要有实数的知识，但完备的实数理论远非初中学生所能接收，这样，需要性与可接受性之间产生了矛盾。在这种情况下，一般是采用放松但又不违背科学性的方法来处理，课本正是这样来处理的。关于实数部分，课本只给出了无理数、实数的定义，至于实数的运算和性质就一概不介绍了。

由此可见，初中谈论数的概念，重点是放在有理数系方面的。即使有时在实数系里研究问题，所要进行的运算最后还是归到有理数运算。

初中代数所研究的式全部都是代数式。其中包括整式、

分式、无理式。根式是一种特殊形态的代数式。课本中研究了代数式的运算和化简。代数式中以整式和二次根式作为教学的重点,这里尤以整式为主要的,这是因为分式的运算最后还是归到整式运算。同时,若把根式看作分数指数幂的话,则其运算与整式运算无多大区别。

在中学课本中研究代数式的目的不在于理论上作什么探讨。例如,不去探讨非负实数的算术根的存在与唯一;不去探讨指数概念如何严密地一步步地扩充;不去探讨多项式是用函数观点还是用不定元观点等等,而是把注意力放在运算和化简上,其目的一方面固然要求学生熟练变形的技能,但另一方面更重要的还在于为解方程服务。

初中代数所研究的方程基本上都是代数方程,或由代数方程组成的方程组。其中包括一元一次方程、一元二次方程、分式方程、无理方程、二元(三元)一次方程组、简单的二元二次方程组,还有一些简单的指数方程。这里一元一次方程是基础,这是因为上述其他类方程的解法,最后还是归到一元一次方程来解。同时,列一元一次方程解应用题也是列其他类方程解应用题的基础。二次方程是重点,因为有了韦达定理及其逆定理;有了根的判别式,我们就可通过方程的系数对根的各种情况进行讨论。同时,更为重要的是二次方程中的因式分解法,韦达定理及其逆定理等都可推广到一元高次方程中去,在某些数学思想或数学方法方面有普遍意义,换句话说,迁移范围比较大。

一般在方程的教学中要研究下面一些问题:方程的同解理论、方程的解法、方程的讨论、列方程解应用题。但是,考虑到学生的接受能力以及初中代数的教学目的,对于方程的同



解理论要求是比较低的,课本在一元一次方程处,仅仅提了一下方程的两个同解定理,定理既没有给出证明(也不能给出证明),又没有用同解定理去分析解方程过程中的同解性(这时也不可能给学生作这样的分析)。至于在解分式方程和无理方程时,由于可能产生增根,因此课本提出需要检验的问题,至于为什么产生增根,增根产生在何处?如何检验合理等问题就不作深入的讨论了。这就是说,这里检验仅仅作为解方程的一部分,而不作为同解理论的一部分来处理的。总之,初中代数对同解理论要求是比较低的,它的目的很清楚,只要能保证顺利地解方程。关于方程(或方程组)的讨论,只在二次方程根的判别式处,对二次方程根的情况作些简单的讨论,其他方程(或方程组)处都不作讨论,因而总起来看,方程的讨论并不是初中代数方程部分的重点。关于列方程解应用题,其教育的意义是很大的。其一,可让学生看到,实际问题如何化归为数学问题,数学是如何去解决现实问题的。其二,解方程一般有方法可循,而列方程解应用题,无一般方法可循,因题制宜,具体问题具体分析,这对发展学生分析问题的能力,对发展发散思维都是有好处的。课本在这方面作了很好的反映,尤其还突出了列一元一次方程解应用题这个重点。但是,在实际教学中,有些教师就轻易将这部分内容放过了。

根据上述分析,初中代数方程部分的内容,就研究方面来说,是以解各类方程和列方程解应用题为重点(如果有些教师再把列方程解应用题不作重点而放过,那么只剩下解各类方程了)。课本的这个特点就决定了教学的特点。

应当指出,在初中代数中,与方程相应的内容——不等式,也占有很大的篇幅。课本对不等式是作了精心安排的。

课本把不等式安排在两处：一处是第一册一元一次方程之后，紧接着安排一元一次不等式。由于不等式就其概念、解法、解集与方程有许多相似之处，但也有一些易混淆的不同之处，在安排上采用与方程平行的方法，在讲解上采用比较的方法，这不仅对不等式的整体结构上给学生以依据，而且与方程的不同点上给学生以深刻的印象。

第二处安排在第四册二次函数之后。讲了这样几个课题：一元一次不等式组及其解法； $|x| < a$ ， $|x| > a$  ( $a > 0$ ) 型不等式及其解法；一元二次不等式及其解法。这三个题目是紧密相联系的。大家知道，解一元二次不等式时若用相应的二次函数的图象来观察、确定其解的情况，会使求解过程大大加快。因此，把它放在二次函数之后讲是有其道理的。一个一元二次不等式化为标准型以后，若不等式左侧能因式分解，那么就可把解一元二次不等式问题转化为解一元一次不等式组。而解含有绝对值符号的不等式时，当去掉绝对值号后，即可转化为不等式组来解。由此可见，这三类不等式的解法间有一定的联系，而有的解法还要依赖于二次函数图象。不等式的这种安排是合理的。

不等式就以研究的方面来说，与方程一样也是这四个方面。课本对同解不等式仅仅提了一下；对不等式的讨论只字未提；而对列不等式解应用题，虽然它的教育作用和方程一样是很大的，但由于不等式的应用题更难列，学生接受有困难，可暂不要求，这样，不等式这部分只要求会解各类不等式，以及在一些数学问题，如求函数定义域、讨论满足某种条件的含参数  $m$  的二次方程中  $m$  的范围等方面，会用不等式去求解。

在初中代数函数教学中，要研究的内容有：函数概念（其

中包括常量、变量、函数、函数的三种表示法)、正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数的概念、性质与图象。就中学阶段总体来看,初中代数中的函数课题是极其初步的。大量的、稍为深入的研究要放到高中去解决。那么初中为什么要研究函数初步呢?我认为:

(1) 变量数学是从量的变化与相互关系来反映客观现实的,因而它较常量数学静止、孤立地反映客观现实更为全面、更为深刻。初三是九年普及教育的最后一年,学业方面要告一段落,因而初中数学要体现这种阶段性,即为他今后的就业或学习奠定一定的基础,或提供必要的启示。既然变量数学如此重要,而函数及其图象的教学又是变量数学的启蒙教育,这样在初中学习它是必要的。

(2) 正比例函数是匀速运动的数学模型;一次函数是直线运动的数学模型;二次函数是抛射运动的数学模型。学习上述的函数初步,会有利于物理教学的。

(3) 就数学来看,数、式、函数,是一种逐级的抽象,这种逐级抽象,前者是后者的背景材料,后者是前者的概括,因此,最好让学生在初中学习告一段落前能看到这样一个完整的过程。

再有,如果学习了二次函数,那么占中学很大比重的二次方程,还有二次不等式可与二次函数统一起来,这样不仅加强了它们的联系,而且还可加深对它们的理解。

初中代数所学习的函数课题,究竟以什么为重点呢?我认为都重要。因为正比例函数是反映着匀速变化的量的关系的,它不仅反映了一类重要的量的关系,而且它也是一次函数的特例,特别是它是以后“以直代曲”重要数学思想的转折点。

一次函数的物理模型是直线运动,它的图象是一条直线,这样有关线性的问题就与一次函数挂起钩来,也与直线挂起钩来,这就为解决线性问题开拓了一条新的路子。二次函数的物理模型是抛射运动,这种运动形态在物理上是很典型的。此外,正如上面说的,从数学本身来看也是很重要的,它的一些研究问题的方法,如配方、移轴等也都具有典型性。至于反比例函数,当然它也是反映了一类重要的量之间的关系,但更重要的它的定义域、图象都和现在研究的函数不同(定义域是一切非零实数;图象是由两个分支组成),这样它在这里就起着变式的作用。

除了上面所述的四部分内容以外,在第四册中还有对数、解三角形、统计初步等内容。这些内容实际都不属传统的代数内容。对数实际属算术;解三角形实际属几何;统计初步实际属统计学。那么为什么这三个课题安排在这里呢?这主要是从初中的教学阶段性考虑的。初中毕业似应对数计算,当然这里还为解三角形服务。解三角形是为了以后涉及三角形或可归到三角形的计算服务的,而这种计算在实际生产或生活中会常碰到。统计初步也是为以后生产或生活服务的。

综上所述,初中代数的内容概括说是四大内容:数的概念、式的变形、方程、函数初步。另外还有三个专题:对数计算、解三角形和统计初步,由此看内容是比较庞杂的。

初中代数除第四册外(第四册显得更杂),其他三册基本上按照数一式一方程这样的结构来安排的。首先,是在有理数范围内按上述结构的顺序来展开,这主要是一、二两册的内容。这里应该指出几点:

(1) 为使方程较早出现,把整式运算拆成两部分:整式加

减在第一册,整式乘除在第二册,这就看出编者的意图,即既突出了作为重点内容的方程,又使讲授整式运算的目的明确。

(2) 整式方程、分式方程都是以多次循环来完成的。以分式方程为例,第二册出现可化为一元一次方程的分式方程;第三册又出现可化为一元二次方程的分式方程。这样安排既使讲授式的目的明确,又使解分式方程要检验的这个难点,由于多次重复而印象深刻。

(3) 正如前述,把与一元一次方程密切相关的二元(三元)一次方程组和一元一次不等式穿插在有关内容之后。

至于第三册也是按这种精神安排的。

## 2. 以方程为主,以二次课题为高潮

上面提到初中代数以数、式、方程、函数为其主要内容。这里数(特别是有理数)是基础。这是因为:(1)方程的研究一刻也离不开数。同一个方程由于所指定的数的范围不同,可以有解、可以无解;若有解可以是有限个解,也可以是无限多解。例如方程  $2x+4=3$ ,若指定在自然数集  $N$  上求解,这个方程无解;若指定在算术数范围内求解,这个方程也无解。只有在有理数范围内,这个方程有唯一解  $-\frac{1}{2}$ 。方程求解的相对性在传统教材里是比较弱的。在现行课本中是一种自然约定,即在数的范围扩充到实数以前,则理解为在有理数范围内求解;当扩充到实数以后,则理解为在实数范围内求解。

(2) 式的运算除遵循本身的一些运算法则外,最后的运算常常归到数的运算。如

合并同类项

合并同类根式

$$2x+3x=(\underbrace{2+3})x \quad 2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=(\underbrace{2+3})\sqrt{a}$$

$$\text{同底幂相乘 } a^2 \cdot a^3 = a^{2+3}$$

等等,最后都是归到相应的数的运算上去。

(3) 函数的研究也是离不开数集的。一般地说,离开定义域去谈论函数是毫无意义的。在传统代数中这方面是比较弱的。在传统代数中一般默认,定义域是数集、是所给解析式的自然定义域。现行课本第四册第 66 页,虽然定义域由实际问题决定(弹簧能挂的重量不能超过 15 公斤),但也可说明,同一个函数表达式  $y = \frac{1}{2}x + 12$ ,若定义域是一切实数和定义域是  $[0, 15]$  是不同的,至少从图象上看,前者图象是条直线,后者图象是条直线段。

式子变形是工具。这是因为无论研究方程或函数,都离不开变形。如在解方程中的去括号、合并同类项、因式分解、通分、配方等都是式子的变形,它对解方程来说是属工具性的。在教学中要突出式子变形的这种目的性。课本在这方面是作了很多的反映的。

正如前述,初中代数中的函数仅仅是初步的,它只起到一个启蒙的作用,对函数的全面、深入的研究还有待于高中。

初中代数中心研究的是各类方程(不等式)。从某种意义上来说,中学代数初中是以方程(不等式)为主,高中是以函数为主。

以上是我们从各个部分内容之间的关系来分析的。

如果我们以所研究的课题来说,应以二次课题为重点内容,即以二次根式、二次方程、二次函数和二次不等式为重点内容。这是因为二次是高次的特殊情形,高次课题的许多性质高于相应的二次课题之中。例如,二次方程的根与系数关

系,在高次的多项式方程中也有这种关系;二次方程的因式分解法也适用于能分解因式的高次多项式方程;又如二次不等式的表格解法(课本中没有)也适用于高次不等式等等。总之二次课题的某些性质和研究方法可以迁移到高次的情况。

但是,另一方面,二次课题对相应的高次课题来说又具有其特殊性。例如二次根式的最简根式是满足下列两个条件的根式:

- (1) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2;
- (2) 被开方数不含分母 (第三册第 54 页)。

但是,对一般根指数大于 2 的根式,除第 (1) 条“…都小于根指数 2”改为“…都小于根指数”外,还要加一条:

(3) 被开方数的指数和根指数是互质数。(第三册第 178 页)。

又如对二次函数的研究方法——配方法,一般只适用于二次,对高次多项式函数就不适用了。

结合上面的 1, 2, 我们可以得出结论:初中代数涉及数、式、方程和函数以及三个专题。这里数是基础、式是工具、函数仅是启蒙教育,方程应是讨论的中心。在各个讨论的课题中,二次课题应作为研究的重点。

### 3. 数的运算律与指数律是一切运算与变形的基础,也是说理的根据

我们想通过例来说明:

例 1 (第一册第 131 页例 7)

$$\text{解方程 } \frac{2x-1}{3} - \frac{10x+1}{6} = \frac{2x+1}{4} - 1.$$

本题中各分母 3, 6, 4 的最小公倍数是 12。

解：去分母，得

$$4(2x-1) - 2(10x+1) = 3(2x+1) - 12,$$

去括号，得

$$8x - 4 - 20x - 2 = 6x + 3 - 12,$$

移项，得

$$8x - 20x - 6x = 3 - 12 + 4 + 2,$$

合并同类项，得

$$-18x = -3,$$

两边都除以 $-18$ ，得

$$x = \frac{1}{6}.$$

这里除了变形以外，其中去分母（根据分配律）、去括号（根据分配律）、移项（根据结合律）、合并同类项（根据分配律），最后根据逆运算。这里多次用到分配律，不仅从左用到右，而且从右用到左。如果学生对运算律比较熟悉，自觉运用，那么对解方程各步骤的根据的理解是有好处的。

**例 2** 把  $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$  分解因式。（第二册第 123 页例 7）

解：  $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$

$$= (x^3 + x^2y) - (xy^2 + y^3) \quad (\text{结合律})$$

$$= x^2(x+y) - y^2(x+y) \quad (\text{分配律, 指数律})$$

$$= (x+y)(x^2 - y^2) \quad (\text{分配律})$$

$$= (x+y)(x+y)(x-y) \quad (\text{公式分解})$$

$$= (x+y)^2(x-y). \quad (\text{结合律, 指数律})$$

如果指数律要不熟的话，那么对提取公因式、对用平方差公式分解，都会遇到一定的困难。



为了使得我们的课不是讲成单纯的技术课,笔者认为应提高运算律与指数律的地位与作用。课本在第一册有理数处介绍了运算律,在字母代表数处又一次出现。在第二册第六章处出现了同底数幂的运算法则,但是有意识把它作为运算与变形的基础和根据就显得不够(例如在讲因式分解提取公因式法时,仅仅介绍这项技术本身,而没有指出之所以有这项技术的根据,这不能不说有点不足)。

#### 4. 字母表示数标志算术向代数过渡

字母表示数标志着算术向代数过渡。从一定意义上来说,如果学生不会处理字母,那么他的代数也就没有学好。

由于字母的抽象性、任意性,由于正确运用字母,关键在于处理好特殊与一般的关系,因而常常是教学中的难点。譬如

(1) 为什么学生对“ $-a$ 是负的吗?”总是回答不好。而这个问题又是如此之重要,对它理解不确切就会影响到绝对值的概念,进而影响到对算术根概念的理解。

究其原因,固然是由于学生对字母 $a$ 的任意性忽视所造成的。但是不是还有这样的问题: $-a$ 中的“ $-$ ”无论写或读(视觉和听觉)对 $a$ 来说都是一种强刺激。而这种刺激又与学生以前受到的刺激:“负的量就用小学学过的数的前面放上‘ $-$ ’(读作负)号来表示”(有理数引入时,说这番话的)作了某种联系,如果学生对以前的刺激头脑中保持得较好的话,常常会抑制 $a$ 的任意性——新的刺激,从而出现错误。这就告诉我们,某些新学的东西虽然当时强调它是必要的,但也要估计它对今后学习可能产生的副作用。

(2)“代”和“变”是代数学习的特点,也是初学代数的学生