

张奠宙 李士琦 主编

数学教育研究前沿

第二辑

华东师范大学出版社

学生算法概念 建构中的 认知结构研究

徐斌艳 著



张奠宙 李士琦 主编

数 学 教 育 研 究 前 沿 · 第 2 辑

学生算法概念建构中的 认知结构研究

徐斌艳 著



华东师范大学出版社

5XJYYJQY

图书在版编目(CIP)数据

学生算法概念建构中的认知结构研究/徐斌艳著. 上海:
华东师范大学出版社, 2003. 5

(数学教育研究前沿. 第2辑/张奠宙, 李士琦主编)

ISBN 7-5617-3270-8

I. 学... II. 徐... III. 数学教学-教学研究-中小学
IV. G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 017380 号

数学教育研究前沿·第2辑

学生算法概念建构中的认知结构研究

著 者 / 徐斌艳

组 稿 / 倪 明

特约编辑 / 陈信漪

封面设计 / 高 山

版式设计 / 蒋 克

出版发行 / 华东师范大学出版社

电话 021-62865537 传真 021-62860410

门市(邮购)电话 021-62869887

<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 / 上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

印 刷 / 上海华成印刷装帧有限公司

开 本 / 890 × 1240 32 开

印 张 / 5.25

插 页 / 4

字 数 / 140 千字

版 次 / 2003 年 5 月第一版

印 次 / 2003 年 5 月第一次

书 号 / ISBN 7-5617-3270-8 / G · 1716

本辑定价 / 55.00 元(本册 11.00 元)

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

总 序

——建设有中国特色的数学教育理论

数学教育的历史和数学本身的历史一样长。当人类结绳记事的时候,就有把数量大小、先后次序传授给下一代的教育。在埃及的纸草、巴比伦的泥板、中国的竹简上,都留下了数学的痕迹,那是当时让儿孙们去认读的文书。中国隋唐时期设明算科,凭数学知识居然可以到朝廷去做官,更是数学教育史上一件盛事。

至于现代的学校数学教育,自然始于西方。中国实行学校制度,普遍开设数学课程,当是辛亥革命推翻清朝以后的事,至今也就百年。不过,中国数学教育的发展似乎并不落后。近百年来,先学日本,继学欧美,再学苏联,可谓博采众长。经过大跃进、调整巩固、文革动乱、拨乱反正,自己也慢慢摸索出一条发展中国数学教育的路子来了。依照国际数学水平测试的结果,中国学生的数学成绩不仅远超过发展中国家,而且也优于发达国家。个中原因,现在还没有非常认真地总结过。一个不争的事实是,儒家文化、考试文化、考据文化等因素,是影响中国数学教育成功的因素之一。那么,在实践中获得成功的中国数学教育,是否可以产生一种理论呢?似乎还不能给出一个明确的结论。

数学教育作为一种理论,大约是 20 世纪 60 年代以后的事。那时荷兰数学家弗赖登塔尔担任国际数学教育委员会主席。他主张数学教育研究应当像数学研究一样,要明确前人做了些什么,现在有什么问题,我用什么方法研究,得到了什么新的结果。1968 年第一次



国际数学教育大会召开,算是现代数学教育研究的肇始。

如果说,中国在数学教育的实践上取得了引人注目的成就,那么在数学教育研究上则相对落后。长期以来,是把数学教育研究等同于国家数学教学大纲的说明书(“教材教法”),或者是“一般教育学+数学例子”的研究道路。数学解题理论只到波利亚为止。发表的文章中,除了解题的以外,往往是介绍国外的东西,或者综合性地加以报导,并未参与研究或进行评论。至于自己的主张,则往往只是“浅谈”、“初议”、“思考”、“感想”而已。其中不乏真知灼见,却因缺乏“科学”的方法,淹没在泛泛而谈的论述之中。

我们在 20 世纪 80 年代就想改变这一现状,编写过《数学教育研究导引》一书,试图介绍一些数学教育研究的范本。此书发行一万册,后常见在不少文章中引用其中的观点,大概还算有些影响。十几年过去了,我国的研究工作有了一些进展,于是就有出版这套《数学教育研究前沿》丛书的计划。蒙华东师范大学出版社领导和倪明同志的支持,历时三载,现在终于和大家见面了。作为这套书的编辑者,我们是力求展现中国式的数学教育研究,尽量把学术含量较高的作品收集起来。其中有在美国、新加坡、德国以及香港和内地大学所做的博士论文,也有针对中国现状所做的调查报告、专题研究,意在积累和展示中国数学教育学者的研究成果,为建设中国特色的数学教育理论提供一些基础。

本丛书的主题及其结论固然可以供大家参考,但我们更愿意推荐的是作者使用的一些研究方法。近年来我国的数学教育研究在方法方面已经有所改进,但从选题的范围,到探索论据的途径和角度,直至提炼结论的恰当程度,仍大有提高之处。纵观近几年国际上的数学教育研究,方法上正在经历变动,更加强调定性分析与定量分析的完善结合。要尽快提升我们研究的水平,关注和学习研究的方法在当前显得尤为重要。借鉴丛书提供的优秀的方法范例,能使我们的一些课题研究以及博士、硕士论文的写作有更严谨的、规范的参照坐标。



收录本丛书前两辑的均是薄本子,约10万字。我们希望研究的课题适当小一些,谈的问题精一些,并做到言之有物,言必有据。这是我们的编辑意图。范良火的《教师教学知识发展研究》,因英文版的篇幅较大,为反映全貌,保留它的完整性,全文照译,单独作为第三辑。

数学教育研究的目的,是揭示数学教育的基本原理、特有规律,把隐藏在大量实践背后的因果线索理清楚,并上升为理论。这里,不能仅仅停留在若干教育学、心理学的一般规律上,更不能只满足于符合一些时髦的口号。弗赖登塔尔的“数学现实论”、“数学再创造论”、“数学形式化原则”;波利亚的“合情推理”学说;范·希尔的“几何学习5水平”界说;杜宾斯基的APOS数学概念教学观;徐利治的数学方法论;陈重穆的“淡化形式、注重实质”;张景中院士研究的“Z+Z”数学教育软件等等,都具有浓厚的数学品味和理论价值。从本丛书的成果中,我们也看到了这样的特点。作者们并没有停留在“建构主义”、“个性发展”、“尝试探索”一类的教育学口号之上,而是针对数学教育情境,由下而上,比较扎实地就某个专题进行探究。一位数学教育名家说过,数学教育研究应当“上通数学,下达课堂”,大概是不错的。

现在我们还有许多重要的事情要做。例如,数学“双基”教学模式,数学练习的变式方法,数学训练中的熟能生巧,数学解题教学中的中国式设计,数学课程的中国特色,以及中国数学教育的原始资料的积累等等,都有待于今后的努力开拓。建设有中国特色的数学教育理论,任重而道远。愿我们大家积极地进取开拓,在不远的将来,在世界数学教育论坛上能够多听到中国的声音。中国应该为国际数学教育事业作出自己的贡献。

张奠宙 李士琦

2002.9.7



目 录

总 序

前 言 (1)

理 论 部 分

1 实验的理论背景 (7)

- 1.1 施万克关于特征性与功能性认知结构理论 (9)
 - 1.1.1 理论的界定 (9)
 - 1.1.2 理论的应用 (10)
 - 1.1.3 名称的选择 (13)
 - 1.1.4 传统教学法中的功能性思维 (13)
 - 1.1.5 物理与技术上的功能性思维 (14)
- 1.2 特征性与功能性认知结构理论与其他认知理论的联系 (16)
 - 1.2.1 与安德森陈述式与程序式知识结构理论的联系 (16)
 - 1.2.2 与克里克斯知识表征理论的联系 (20)
 - 1.2.3 与恩格刊朴复合模式记忆理论的联系 (22)
- 1.3 基于特征性与功能性认知结构理论的算法实验 (26)
 - 1.3.1 关于三种外在表征形式 (27)
 - 1.3.2 基于认知结构理论分析外在表征形式“木棒移动” (31)



- 1.3.3 基于认知结构理论分析外在表征形式“计算网”
(31)
- 1.3.4 基于认知结构理论分析外在表征形式“程序语言”
(35)
- 1.4 基于特征性和功能性认知结构理论的物理实验 (37)

实 验 部 分

2 实验的计划与实施 (43)

- 2.1 实验对象的选择 (44)
 - 2.1.1 实验学校的选择 (44)
 - 2.1.2 被试的选择 (46)
- 2.2 算法实验的进程 (46)
- 2.3 物理实验的进程 (47)

3 算法实验的分析与评价 (48)

- 3.1 实验数据的收集与整理 (48)
- 3.2 实验的分析与评价体系 (49)
- 3.3 算法活动的上位指标体系 (51)
- 3.4 指标体系 AUFKA 应用于外在表征“木棒移动”上的行为表现 (52)
 - 3.4.1 有关实验试题 (52)
 - 3.4.2 指标的具体应用 (52)
 - 3.4.3 结论的比较与小结 (60)
- 3.5 指标体系 AUFKA 应用于外在表征“计算网”上的行为表现 (61)
 - 3.5.1 有关实验试题 (61)
 - 3.5.2 指标的具体应用 (61)
 - 3.5.3 结论的比较与小结 (71)



3.6	指标体系 AUFKA 应用于外在表征“程序语言”上的行为表现	(72)
3.6.1	有关实验试题	(72)
3.6.2	指标的具体应用	(72)
3.6.3	结论的比较与小结	(82)
3.7	指标体系 MIAUKA 应用于算法活动中的语言表述	(84)
3.7.1	在“木棒移动”表征上的表达方式	(84)
3.7.2	在“计算网”表征上的表达方式	(89)
3.7.3	在“程序语言”上的表达方式	(94)
3.8	总结	(99)
4	利用三种表征形式,建构数学思想	
	——女生莉和男生翼的案例分析	(100)
4.1	三种表征形式上数学思想的具体体现	(100)
4.2	分析数学思想的指标体系(MIKA)	(102)
4.3	指标体系 MIKA 的具体应用	(107)
4.3.1	MIKA 在表征形式“木棒移动”上的应用	(108)
4.3.2	MIKA 在表征形式“计算网”上的应用	(120)
4.3.3	MIKA 在表征形式“程序语言”上的应用	(127)
4.4	总结	(133)
5	关于特征性与功能性思维的物理实验	(134)
5.1	物理实验活动概况	(134)
5.2	物理实验活动的分析与评价	(136)
5.3	两个实验结果的比较	(141)
	展 望	(143)
	参考文献	(146)
	人名索引	(154)
	后 记	(155)



前 言

长期以来,数学教育研究主要局限在数学教学法方面,在中国也是如此。研究人员主要专心于改善课堂教学方法与内容,并且始终认为学生的学习成效主要依赖于他们的年龄以及智力的发展。近10年来,偶尔有些讨论学生个性差异的研究性论文发表在杂志上(参见 Wu, 1993; Zhou, 1993; Shi, 1985),讨论如何从认知心理学角度实验研究这些个性差异。

从国际范围看,冯格拉塞斯费尔德(E. von Glasersfeld)可谓研究人的个性差异的先驱之一。早在1983年他曾撰文指出:“我们应该把知识与能力看成个人组织其经验的产物,教师的作用将不再是讲授‘事实’,而是帮助和指导学生对特定领域的经验进行概念化的组织。”(von Glasersfeld, 1983, p. 66~67)他强调在传授知识和能力时必须重视个人的认知组织。根据他的这个观点,教师的首要任务在于为学生指明适当的方向,使他们能够借助特定的经验获得知识。

另外,认知数学的先驱戴维斯(R. B. Davis)在分析数学教育的最新观点时十分注重心理表征问题,他呼吁要研究人的个性特征。他明确指出:“数学不是写在纸上的符号。数学是一种思维方式,它包括问题情景的心理表征和相关知识的心理表征,包括这些心理表征的分析,包括注释学的使用。”(Davis, 1992, p. 226)他认为教学研究的重点应该是,探讨教师如何“帮助学生去理解问题或目标,培养学生开发问题解决途径的能力……培养学生利用那些问题表征的能



力,以及为解决新问题建构新表征的能力。”(Davis, 1992, p. 238~239)

从戴维斯对教学研究的阐述中可见,教学目标在于“获得学生如何进行建构与使用表征的轮廓”,而不是“为每个学生确定一个分数”。(Davis, 1992, p. 239)他进一步提出,应该进行一种以认知心理学为定向的教学研究,将每个学生作为个体来对待,在研究中首先要分析学生就问题的外在表征是如何应用各自的心理模式的。这向传统的教材教法研究提出挑战。

在德国奥斯纳布吕克大学活跃着一支由科豪斯弗莱森堡(E. Cohors-Fresenborg)教授领导、基于认知心理学的数学教育研究队伍。他们一方面关注各种不同表征形式的作用(Cohors-Fresenborg, 1985);另一方面对建构心理模式过程中的个性差异进行系统研究(Kaune, 1985)。在研究成果方面尤其突出的是由施万克(Schwank, 1986)提出的认知结构(特征性与功能性)上的个性差异理论,以及对于认知结构和认知策略关系的分析。施万克的认知结构理论,已经针对德国学生和印尼学生顺利地开展了系统的实验研究(参见 Schwank, 1988a; Marpaung, 1986),本书所介绍的是,施万克的理论对于研究中国学生个性差异的意义。在此我们对中国学生进行系统的实验研究,并对实验数据进行科学的分析。我们希望这一研究工作将有助于理解中国学生学习算法概念过程中的认知结构上的个性差异。

我们的研究结果也进一步表明,施万克所提出的认知结构差异理论是一种文化不变量。

我们的重点是针对如下5个问题进行实验研究:

第一,掌握“算法基本概念”这个特殊对象领域时,被试是如何表现的?

第二,在问题解决过程中,学生是否表现出依赖于各种不同表征形式的各种不同的个性行为方式?

第三,在学习算法基本概念时学生是否存在各种不同的认知



结构?

第四,学生形成了哪些有关数学概念的心理模式?

第五,解决物理问题时学生是否也存在着内在的个性差异?

本书由两大部分组成:即理论部分与实验部分。在“理论部分”(第1章,实验的理论背景)我们首先简短地介绍实验研究所依据的特征性和功能性认知结构差异理论;紧接着与实验认知心理学的相关理论作对比分析;然后依据特征性与功能性认知结构的理论,分析两种实验研究(算法实验与物理实验)的内涵。

“实验部分”的论述以1700多页的数据分析报告为基础,这些分析报告都以德国奥斯纳布吕克数学教育研究所(FMD)的工作报告形式公开发表(Xu,1990,1992a~n)。在这个部分我们首先描述算法实验与物理实验的组织与实施进程(见第2章),然后从三个方面分析整个主实验。一是刻画被试用三种不同的表征工具,构建算法以及分析算法过程中表现的行为方式(见第3章);二是利用两个案例详细地分析学生对数学思想的建构过程(见第4章);三是介绍物理实验的结果,并且与来自算法实验的结果进行比较分析(见第5章)。



理论部分



1

实验的理论背景

本书介绍的对于中国学生的实验研究,是德国奥斯纳布吕克大学数学系与数学教育研究所主持的研究项目中的一个部分。该研究项目的重点是,分析学生学习算法过程中,其数学思维以及数学概念的建构过程,从而找出理解人类认知组织形式的主导方法。施万克为此建立了一种发人深省的理论,该理论假设不同个体内部存在着各种不同认知结构(特征性或功能性)。

我们将有关该研究项目的最新发展归纳总结在表 1-1 中,研究项目启动后至 1984 年的实验活动概览参见玛尔堡(Marpaung)的专著。(1986, p. 17~21)

我们这里介绍的实验项目从三个纬度进行。

其一是提出有关数学思维与文化的关系,分析数学思维中文化变量与常量,我们选择曾经在德国与印尼实施的实验方案,作适当调整后用于中国学生。当然这个实验项目仅仅是为了今后实施大规模的跨文化比较研究做准备。

其二试图开发一种精确的分析模式,对学生的认知结构(特征性与功能性)做出科学的分类。尤其是给出各种不同的精致的分析过程,并首次用于 8 名被试,对其行为方式做出分析,再进一步选择两名被试,对他们在 3 小时实验中的行为方式进行完整的分析,由此我们成功地开发出一套用于评价的指标体系。

其三利用算法实验中获得的经验,我们进一步设计物理类实验,检验学生的认知结构。正是在这一点上体现出我们实验工作的创新



数学教育研究前沿

表 1-1 实验研究的回顾

实 验 研 究	研究时间	实 验 对 象				
		国家	学校类型	年 级	年 龄	数 量
学生基于计算机的思维方式—— 实验研究外在表征形式对于学生建 构与分析算法的影响	84.09~85.09	德国	完全中学	7 年级	12 岁 10 月~14 岁 平均 13 岁 5 个月	16 名女生 7 名男生
	82.10~84.03	印尼	普通初级中学	8 年级	13 岁 6 个月~15 岁 6 个月 平均 14 岁 6 个月	12 名女生
印尼学生学生学习算法的特点及其 分析	84.04~86.03	印尼	普通初级中学	8 年级	13 岁 6 个月~14 岁 9 个月 平均 14 岁 2 个月	5 名女生 9 名男生
	86.01~87.12	德国	定向阶段(推荐 报考主要学校)	6 年级末	12 岁 1 个月~13 岁 11 个月 平均 13 岁 1 个月	4 名女生 4 名男生
数学教学中聋哑学生的算法思维 研究	86.02~87.01	德国	州聋哑教育中心	6~7 年级	11 岁 6 个月~13 岁 9 个月	3 女生 6 男生
实验研究女生的数学思维过程,推 动女生在新技术领域的发展	87.01~90.12	德国	实科学校	7 年级	12 岁 7 个月~13 岁 9 个月 平均 13 岁 2 个月	10 名女生
各种算法概念表征形式的作用以 及心理模式的建立	86.01~90.12	德国	完全中学	7 年级初	12 岁 2 个月~13 岁 2 个月 平均 12 岁 7 个月	20 名女生 12 名男生
	89.01~91.04	中国	普通中学	7 年级	12 岁 1 个月~13 岁 2 个月 平均 12 岁 8 个月	2 名女生 2 名男生
中国学生特征性思维与功能性思 维的实验研究	91.05~93.12	中国	重点中学	7 年级	12 岁 8 个月~13 岁 8 个月 平均 13 岁 2 个月	9 名女生 9 名男生