

集论初步

龙季和

广西人民出版社

集 论 初 步

龙 季 和

广西人民出版社

集 论 初 步

龙 孚 和

☆

广西人民出版社出版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 1.5印张 33千字

1980年2月第1版 1980年2月第1次印刷

印数: 1—34,000册

书号 7113 313 定价: 0.16元

序 言

在华主席为首的党中央的领导下，全国各族人民正在各条战线上大踏步地向四个现代化进军。为了适应实现四个现代化的需要，新的中学数学教学大纲已把许多新的内容，例如集和对应的概念，吸收进去。因此，结合新的中学数学教学大纲对集论知识的要求，通俗地介绍集论的基本内容和基本思想是一件颇有意义的工作。这本小册子，就是在这个思想指导下编写出来的。

本书共分两章，第一章介绍集论的基本知识，第二章应用集论和对应的观点进一步阐述函数概念。为了便于读者进一步学习，在附录一中简略地介绍了映射、关系等内容。

本书是以中学数学课外读物，或是补充教材的形式写出，供中学数学老师参考，也供有兴趣的工人、农民、知识青年和中学生自学之用。关于中学数学内容现代化的重要意义，不少文章已有论述，本书不再重复。关于本书采用的数学符号，国内外涉及集论的书籍很不统一，这里只能尽量采用多数书籍共同的符号。

本书稿写完之后，由广西大学数学系曾繁烈同志校订并补充了一些内容，在此表示感谢。

由于作者水平所限，文章里可能有误，请同志们批评指正。

龙季和
一九七九年四月

目 录

序言

第一章 集和集的运算 (1)

§ 1 集的概念 (1)

§ 2 集的代表法 (4)

§ 3 集与集的关系 (7)

§ 4 集的运算 (9)

§ 5 运算律 (17)

§ 6 集恒等式和集不等式的一些例子 (23)

第二章 对应和函数 (27)

§ 1 对应 (27)

§ 2 函数 (33)

§ 3 集的基数 (36)

附录一 映射与关系 (41)

附录二 本书使用符号一览表 (44)

第一章 集和集的运算

§ 1. 集 的 概 念

关于集论的许多专著是用“公理法”来处理的。就是说由一些初始概念和一些公理出发，通过逻辑推理，以定义和定理的形式表达出集的各种关系和性质。我们这里不打算这样处理，而是着重通过一些例子来说明集论中的一些基本内容。

1. 什么叫做“集”？

所谓一个“集”就是指一些事物的总合。不同的总合构成不同的集。例如，某个中学的全体学生构成一个集。又如，这个中学的全部女生又构成另外一个集。再如，这个中学的全部班级又构成另外一个集。

在中学数学中，我们遇到过整数、复数、方程、不等式、函数、三角形、圆……等等概念，这些东西我们统称为数学对象。本书要研究的集，主要是由某些数学对象组成的集。例如，全体有理数构成一个集；小于100的全部素数构成一个集；和一已知直线垂直的一切直线构成一个集；又如内接于一个已知圆的一切三角形构成一个集等等。

集，有时也称为集合。集和集合是同义词，没有区别。为简明起见本书一律采用“集”这个词。

一个集里面的每一个事物，叫做这个集的一个元素。记号 $a \in A$ ，表示 a 是集 A 的一个元素。若 b 不是集 A 的元素，则

以 $b \in A$ 记之。

对于一个集来说，任何事物或是这个集的元素，或者不是这个集的元素，二者必居其一，不得兼有。即任何事物（元素） a 与集 A 之间有两种关系： $a \in A$ ，或 $a \notin A$ 。我们认为，这个关系确定之后，集就算“定义妥贴”了。说得通俗些，集是由所有属于它的事物（元素）所完全确定的。

2. 例题：

〔例1〕设 ω 是一切非负整数所构成的集。

若 a 是个非负整数，则有 $a \in \omega$ 。例如 $6 \in \omega$ ， $0 \in \omega$ ， $2^{0.0} \in \omega$ 。若 b 不是非负整数，则有 $b \notin \omega$ 。例如 $\frac{1}{3} \notin \omega$ ， $-10 \notin \omega$ ， $\sqrt{2} \notin \omega$ 。

这个集在以后常常要用到，我们今后一直用 ω 来表示一切非负整数所成的集。

〔例2〕设 A 是12的所有约数的集。

记号 $|$ 表示能整除， $\nmid$ 表示不能整除。例如 $3 | 12$ ，故 $3 \in A$ ，又如 $8 \nmid 12$ ，故 $8 \notin A$ 。象 A 这种集，只有有限个元素，称为**有限集**。

〔例3〕设 B 是和直线 l 垂直的一切直线所成集。

这个集 B 的元素是和直线 l 垂直的直线，这种垂线有无限多条。这种集是由无限个元素所组成，称为**无限集**。

〔例4〕设 C 是已知圆的一切内接三角形所构成的集， D 为已知三角形的一切内接圆所构成的集。

我们知道，给定一个圆，它的内接三角形有无限多个，因此 C 是个无限集。给定一个三角形，它必有一个且仅有一个内接圆，因此集 D 只含一个元素。这种集由一个元素组成，称为**独点集**。这个“点”字是什么意思，后面将有说明。

〔例5〕设 E 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的一切实数根所成集。

我们知道，方程 $x^2 + 1 = 0$ 有两个根，它们是 $x_1 = i$ ， $x_2 = -i$ ，都不是实数而是虚数。也就是说，方程 $x^2 + 1 = 0$ 没有实数根。那末， E 是个什么集呢？它不含任何元素，这能不能叫做集呢？我们还是把它看成是集的一种。这种集不含任何元素，也就是由 0 个元素所组成，称为空集。以后都用记号 ϕ 来表示空集。

练 习 一

1. 在下列各例中，用记号 $\in$ 或 $\notin$ 表示出事物和集的关系：

(1) A 是 12 的所有约数的集； $a = 12$ ， $b = 10$ 。（答： $a \in A$ ， $b \notin A$ 。）

(2) P 是小于 10 的一切素数的集； $a = 7$ ， $b = 9$ ， $c = 11$ 。

(3) C 是一个圆上一切点所成集； x, y 是 C 和某直线的交点， z 是圆 C 的圆心， r 是圆 C 的半径。

(4) 一个方程或一个方程组所有的解构成的集，通称为它的解集。 S 是方程组 $x + y = 7$ ， $x - y = 3$ 的解集； $x_1 = 5$ ， $y_1 = 2$ 。

(5) S 是三角方程 $\operatorname{tg} x = 1$ 的解集； $a = \frac{\pi}{4}$ ， $b = \frac{3\pi}{4}$ ， $c = 225^\circ$ 。

2. 在下列各例中，指出哪些集是有限集？无限集？独点集？空集？

(1) A 是 12，18 两数所有公约数的集； B 是它们所有公倍数的集； C 是它们最大公约数的集。

(2) A 是方程 $2x + 3 = 0$ 的解集， B 是不等式 $2x + 3 > 0$ 的解集。（不等式解集的意义和方程相同。）

(3) T 是过一点 x 和圆 C 相切的一切直线的集；(I) x 在圆外；(II) x 在圆上；(III) x 在圆内。

(4) A 是以给定线段 σ 为一边的等边三角形的集; B 是以 σ 为底的等腰三角形的集; C 是以 σ 为直径的圆的集。

(5) E 是面积为 16 平方厘米的矩形的集; F 是面积为 16 平方厘米的正方形的集; G 是面积为 16 平方厘米, 边长为 3 厘米的正方形的集。

(6) L 是和给定两点等距离的点的集; M 是联这两点的线段的中垂线的集。

§ 2. 集 的 表 示 法

要表示出一个集, 通常有三种方法:

1. 语言法

就是用普通的语言来描述所给集的特性。其实这种表示法, 上面已用过多次。例如, ω 是一切非负整数的集。又如, L 是和给定两点等距离的一切点的集。

2. 符号法

就是用符号来描述所给集的特性。例如符号 $\{x: 2x-1 < 0\}$ 表示一个集, 它包含一切 x , 使 $2x-1 < 0$ 。因此这个集也就是不等式 $2x-1 < 0$ 的解集。这个符号内有个冒号“:”, 在冒号“:”前面的 x 是集的元素; 冒号“:”后面则是元素 x 的特性。通常我们尽量用数学符号来描述集的元素的特征。用符号法表示集, 简洁明了, 使用方便, 在集论中经常使用, 应予注意。

有时我们可以把一个集的元素罗列出来。例如 12 的所有正约数的集, 也可以表成

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

3. 图形法

通常是用一个圆域来表示一个集。所谓“圆域”是指一

个圆内部的点，连同圆周上的点（图1）。这里要注意：本来，一个圆域是具有无限多个点的，但是由于我们用图形法无非是想利用几何直观的明显性来表出集的关系，所以一个圆域不限于表示无限集，也可以表示一般的集。

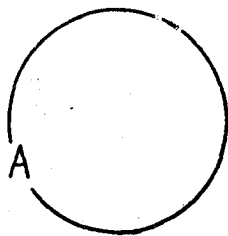


图 1

在图形法中，我们用一个圆域的点来代表一个集的元素。因此，我们可以借用这个“点”字来代替“元素”

一词。对一个集的元素，我们也可称为集的点。“点”和“元素”在这里是同义词。

〔例1〕用语言法表示下列的集

(1) $A = \{n : 5 \nmid n, n \in N\}$ ，其中 N 为自然数集；

(2) $B = \{(x, y) : 2x - 3y = 5, x \in \omega, y \in \omega\}$ ；

(3) $C = \{n - 1 : n \in \omega\}$ 。

〔解〕

(1) 第一个条件表示 n 不能被 5 整除，第二个条件要求 n 是自然数。所以，集 A 是由不能被 5 整除的自然数所组成的集。

(2) 这个集的元素是数对 (x, y) ，第一个条件要求 x, y 满足方程 $2x - 3y = 5$ ，第二、三个条件要求 x, y 都是非负整数。因此，集 B 就是二元一次方程 $2x - 3y = 5$ 的一切非负整数解的集，通过验算，可知 $(4, 1) \in B$ ， $(1, 4) \notin B$ ， $(\frac{5}{2}, 0) \notin B$ ，等等。

(3) $n \in \omega$ 要求 n 是非负整数，于是 $n - 1$ 是大于或等于 -1 的整数。因此，集 C 是一切不小于 -1 的整数所组成的集。

〔例2〕用符号法表示下列的集

- (1) A 是小于50的正数所成的集;
 (2) B 是能被2整除的自然数所成的集;
 (3) E 是和已知直线 l 垂直的一切直线所成的集;
 (4) R^+ 是所有正有理数组成的集。

〔解〕

(1) 因为小于50的正数用不等式可以表示为: $0 < x < 50$,
 故集 A 可以表示为 $\{x: 0 < x < 50\}$;

(2) 用 N 表示自然数集, 则集 B 可以表示为 $\{n: 2 \mid n, n \in N\}$;

(3) 用 m 表示直线, 则集 E 可以表示为 $\{m: m \perp l\}$;

(4) 设 n, m 为正整数, 于是任一正有理数均可表示为 $\frac{n}{m}$ 的形式; 反之, $\frac{n}{m}$ 必为一个正有理数。所以, 集 R^+ 可以表示为 $\{\frac{n}{m}: n, m \text{ 为正整数}\}$ 。

练习二

1. 把下列的集用语言法表出, 并各举出一元素:

- (1) $\{x: |x-1| < 0.01\}$;
 (2) $\{(x, y): (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 9\}$;

(3) 设 A, B 为固定的两点, P 为动点, $\{P: \angle APB = 30^\circ\}$;

(4) 设 p 为素数集, $\{n: n \text{ 为大于2的偶数, 且 } n = p_1 + p_2, p_1 \in p, p_2 \in p\}$ 。

2. 把下列的集用符号法表出, 并各举出一元素:

- (1) B 是所有与3之和, 能被7整除的数所组成的集(可以利用整除的符号“ $\mid$ ”, $a \mid b$ 表示整数 a 可以整除整数 b);
 (2) C 是所有被8除余数是3的数组成的集;

(3) A 是 12、18 两个数的一切公约数的集， B 是它们的一切公倍数的集；

(4) 不等式组 $\frac{x}{2} < 1, 4 + x > 1$ 的解集 S ，

(5) 过已知圆周上一点的一切割线的集。

§ 3. 集 与 集 的 关 系

1. 包含关系

我们先看一个实际例子。设 B 是某中学的全体学生所组成的集， A 是该校全体女学生组成的集。显然，如果甲是该校的女学生，那末，甲必是该校的学生。用通俗的话讲， A 是 B 的一部分。在集论中，称 A 是 B 的一个子集。

〔定义1〕如果集 A 的每一个元素都是集 B 的元素，那末就说集 A 是集 B 的一个子集，记成 $A \subset B$ 。

从图形来看(图2)， $A \subset B$ 用圆域 A 含在圆域 B 内表示。

例如， ω 是一切有理数的集 R_0 的一个子集： $\omega \subset R_0$ 。又如平面上一切等边三角形的集 E 是一切等腰三角形的集 I 的一个子集： $E \subset I$ 。

如果集 A 的每一个元素都是集 B 的元素，而且集 B 有元素不属于 A ，那末就说 A 是 B 的一个真子集。在上面的例中， ω 是 R_0 的一个真子集； E 是 I 的一个真子集。

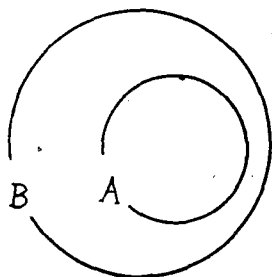


图 2

2. 相等关系

〔定义2〕如果集 A 的每一个元素都是集 B 的元素，而且集 B 的每一个元素也都是集 A 的元素，那末就说集 A 和集 B 相等，记

成 $A = B$ 。

从图形来看, $A = B$ 表示圆域 A 和圆域 B 重合。

把定义 1 和定义 2 合起来看, 不难看出: 如果 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 则 $A = B$; 反之, 如果 $A = B$, 则 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 这个事实对于我们今后去证明两个集相等, 是很有用处的。

这里说到的相等的含义, 和中学数学中有些相等的概念是不同的。例如, 若 M 是线段 AB 的中点, 则有 $AM = MB$ 。这个等式表示两个线段 AM 和 MB 的长度相等, 并不是说 AM, MB 这两个由点组成的集相等。

3. 集族

一个集也可以由一些集构成, 也就是说, 一个集的元素, 本身可以是一个集。我们在本文开始的时候所举的第三个例就是如此。为了避免混淆起见, 我们把以集为元素的集, 特别称为集族。

[例] 设 A 为某中学全体女生的集; B 为这个中学全体学生的集; Γ 为这个中学全部班级的集 (注意: 这里“班级”是指该班全体学生所组成的集, 所以 Γ 是一集族), P 为该中学的初二第三班全体学生组成的集, x 是初二第三班的一个男学生。试用 $\in, \subseteq, \subset$ 等符号, 把这些集和这些元素的关系表示出来。

解: 由于每个女生都是学生, 故有 $A \subset B$;

由于初二第三班是一个班级, 故有 $P \in \Gamma$;

由于初二第三班的每个学生都是这中学的学生, 故有 $P \subset B$;

由于 x 是初二第三班的一个学生, 故有 $x \in P$;

由于 x 不是女生, 故有 $x \notin A$;

由于 x 是这学校的学生, 故有 $x \in B$ 。

练习三

1. 写出下列各集的一个真子集:

- (1) 非负整数集 ω ;
- (2) 二元一次方程 $ax + by = c$ 的解集 S ;
- (3) 一个圆柱体的点所成集 Y ;
- (4) 一个圆柱面的点所成集 S ;
- (5) 某中学全部班级的集 Γ 。

2. 设 S 是方程组 $2x - y = 5$, $x + 3y = 6$ 的解集; S_1 是 $2x - y = 5$ 的解集; S_2 是 $x + 3y = 6$ 的解集; 又设有有序数对 $(3, 1)$, $(\frac{5}{2}, 0)$ 。试用 $\in$, $\bar{\in}$, $\subset$ 等符号把这些集和这些元素的关系表示出来。

3. 设 V 是一个球体所有点的集; S 是这个球的球面所有点的集; R 是一个大圆圆域所有点的集; C 是这个大圆圆周所有点的集; x 是这个大圆圆周上的一点; y 是这个球的球心。试把 V , S , R , C , x , y 的关系表出来。(所谓大圆就是过球心的平面与球相交所截得的圆。)

§ 4. 集的运算

1. 并集

先举个例子来说明: 某中学开运动会, 设 A 是某班派出的田径队员的集, B 是这个班派出的球赛队员的集, 又设 C 是这个班派出的全体运动员的集。那末集 C 和集 A 、集 B 有什么关系呢? 不难看出每个运动员或是田径队员, 或是球赛队员,

或同时是两种队员。因此可以说集 C 是把集 A 和集 B 并起来的。

我们再从图形来看。设集 A 、集 B 各用圆域来表示,这两个圆域的位置有种种相互关系:相离,相交,包含(相切当

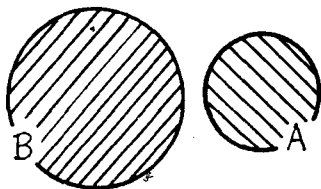


图 3

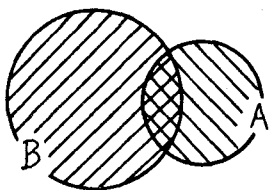


图 4

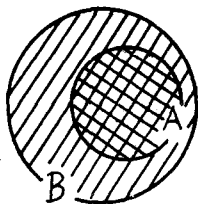


图 5

中,外切可看成相交,内切可看成包含),见左面的图3,图4和图5。我们可以把这两个集“并起来”,在每个图中,凡在画有斜线地方的点,都是并起来的集的点,同时这些点也只在画有斜线的部分。

由以上的例子和图形的启发,我们不难作出两个集的并集的定义。

〔定义3〕集 A 和集 B 的并集是由集 A 和集 B 的一切元素所组成的集。

集 A 和集 B 的并集用符号 $A \cup B$ 来表示。用符号法表示,便是

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

〔例1〕 A 是正奇数的集, B 是正偶数的集, A 和 B 的并集是什么?

答: $A \cup B$ 是所有正整数所成集。

〔例2〕 A 是不等式 $2x - 1 > 0$ 的解集, B 是不等式 $2x - 5 < 0$ 的解集, $A \cup B$ 是什么?

答: $A \cup B$ 是所有实数所成的集。

〔例3〕 A 是平面上所有正方形的集, B 是所有平行四边形的集, $A \cup B$ 是什么?

答: 由于正方形也是平行四边形, 即 $A \subset B$, 故 $A \cup B$ 就是所有平行四边形的集 B 。

2. 交集

先看看前面说明并集的那个例子。设 D 是“兼职运动员”的集, 就是说那些既参加田径比赛, 又参加球类比赛的队员的集。不难看出, D 的每一个队员是田径队员, 且是球赛队员。我们说集 D 是集 A 和集 B 的交集。从图3~图5来看则更清楚, 两个集的交集就是各图上两种斜线相交的部分。我们不难作出两个集的交集的定义。

〔定义4〕集 A 和集 B 的交集是由集 A 和集 B 的公共元素所组成的集。

集 A 和集 B 的交集用符号 $A \cap B$ 来表示。用符号法表示, 便是

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

〔例4〕例1到例3中, 集 A 和集 B 的交集是什么?

在例1中, 由于没有一个正奇数也是正偶数的, 因此集 A 和集 B 的交是空集, 即 $A \cap B = \phi$ 。在例2中, $A \cap B$ 就是不等式组

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 5 < 0 \end{cases}$$

的解集, 就是 $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$, 即 $A \cap B = \left\{ x: \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \right\}$ 。

在例3中, $A \cap B$ 是所有正方形的集 A 。

3. 集的第二种几何表示法

我们在前面已讲集的几何表示法(即 § 2 中的图形法),在那里是用一个圆域来表示一个集。利用几何直观的明显性,集的关系看得比较清楚。但是用什么图形来表示给定的抽象事物,那是可以任我们自由选择的。总之,是要达到利用几何直观的明显性去认识、去理解这个抽象事物的要求。因此,我们除了继续采用前述的用圆域来表示一个集的表示法以外,还采用第二种几何表示法,就是用一根直线上的一个线段来表示一个集。用这个线段的点子来表示这个集的元素。

这两种几何表示法都是图形法。我们把它们分别称为**圆域表示法**和**线段表示法**。

在讨论一个问题(或一类问题)时,往往需要考虑这个问题(或这类问题)中一切集的并集,我们把这个集称为基本集。例如上面在讨论某个中学的学生、班级等时,我们可以把这个中学全体学生构成的集取作基本集。又如研究实数的各种关系时,我们可以把全体实数构成的集取作基本集。

采取线段表示法时,先用一个线段来表示基本集。我们统一地用 X 来代表基本集和表示它的线段。在所论问题中,任一个集都是基本集的子集,可以用这个线段里面的一个或多个线段来表示。在不引起误解的情况下,为简明起见,我们都用一个线段来表示一个集。在讨论几个集的关系时,如果把表示它们的线段都画在表示基本集的线段上,那就容易混淆不清,降低或者失掉几何直观的作用。因此,我们采取一个补救的办法,把每个线段“拉出来画”。

现在我们先上面讲过的几种关系,用线段表示法表示出来: