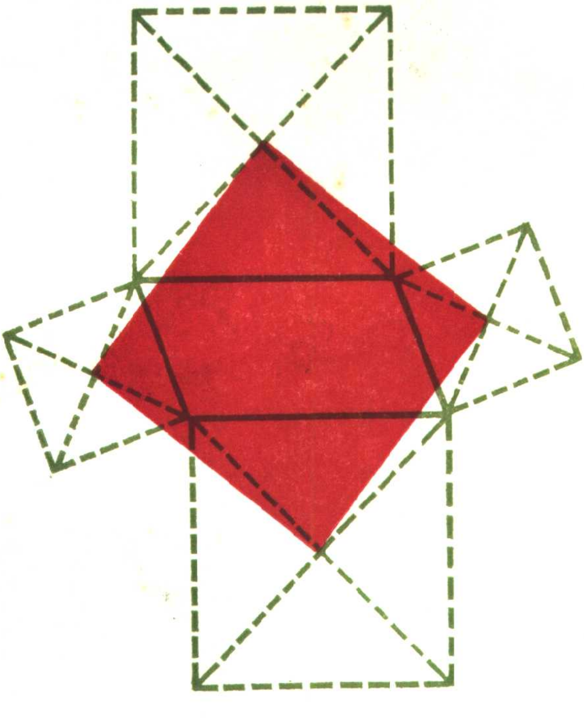
美国新数学丛书

几何变换 1

U.M. 亚格龙 著



北京大学出版社

几 何 变 换

第 一 册

U.M.亚格龙 著

尤承业 译 詹汉生 校

北 京 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书讨论的是平面上的一类基本的几何变换——保距变换。

本书通过对"什么是几何学？"这个问题的讨论，自然地引出保距变换的概念。然后给出了平移、旋转、反射和滑动反射等保距变换的定义和性质，复合和分解的规律，以及它们的相互关系。最后对保距变换作了分类。

书中配有许多相当困难但饶有兴味的习题，认真做这些题，有助于加深对正文的理解，并增添学习的兴趣。书后附有详细的题解。

本书可作为中学数学教师的参考资料，也可作为爱好数学的中学生、低年级大学生的课外读物。

几 何 变 换 （第一册）

U.M.亚格龙 著

尤承业 译 詹汉生 校

责任编辑 徐信之

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

787×1092毫米 32开本 4.5印张 100千字

1987年2月第一版 1987年7月第一次印刷

印数：00001—8800册

统一书号：13209·139 定价：0.95元

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学。入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大。一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步。

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱。好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套“新数学丛书”，向广大读者推荐。

和一般的通俗数学读物不同，“新数学丛书”的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题。这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用。内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想。

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌。

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径。

“新数学丛书”首创于一九六一年，已陆续出版近三十

册。有些书早已脱销。“新数学丛书”编委会，特别是Anneli Lax教授得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书。在此，我们表示衷心的感谢。

江泽涵　张恭庆

一九八三年春 于 北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围，各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快，他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告 Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y. 10012.

编 辑 者

作 者 简 介

亚格龙(Яглом)1921年出生于苏联哈尔科夫市，1942 年毕业于斯维尔德洛夫大学，1945年获得副博士学位。他早年曾在莫斯科国立大学、奥彼克霍夫-基辅教育学院等校任教，1957年至1968年任莫斯科国立教育学院的几何学教授。1968年以后，他在莫斯科的一所工程技术夜大学任教。

他对苏联的数学教学具有相当大的影响。他还发表了许多科学论著，其中有不少被译成英文，如《Complex Numbers in Geometry》，《Couvex Figures》等等。

序　　言（摘译）

这部书分为两册[①]，是专为初等几何写的。长期以来，尤其是在十九世纪，初等几何的领域里积累了极其丰富的资料。许多关于圆、三角形和多边形的美妙而意想不到的定理被证明了；在初等几何的内部，还形成了一些完整的分支，如“三角形的几何”，“四面体的几何”等等。这些分支都有各自的广泛题材，各自的习题和解题的方法。

然而，本书的目的并不是向读者介绍初等几何中那些他们所不熟悉的定理。我们认为，上面谈到的初等几何的那些发展，并不说明需要有专著来阐述它们。这是因为超出高中课程范围的大部分定理只不过是一些“古董”，它们既没有什么实用价值，又脱离了数学发展的主流。但是，在初等几何中，除去一些具体的定理之外，还包含了两个重要的有普遍意义的思想，它们构成了几何学的一切进一步发展的基础，其重要性远远超出了几何学的界限。其中之一是演绎法和几何学的公理基础；另一个是几何变换和几何学的群论基础。这些思想都是内容丰富和卓有成效的。例如，两者的直接发展都导致了非欧几何的产生。本书的任务是阐明这两种思想之一——几何学的群论基础。

……

我们还要就本书的特点说几句话。本书面向十分广泛的读者。在这种情况下，难免要为照顾一部分读者而不能顾及另一部分读者的兴趣。作者牺牲了基础较好的读者的某些兴趣，力求使本书简单明了，通俗易懂，而不去过分追求严密

① 中译本分成四册。——中译者

性和逻辑上的精确性。例如，我们不一般地对几何变换这个概念下定义，因为尽管定义的术语在直观上是清楚的，但它总是使一些缺乏经验的读者感到困难。由于同样的原因，我们不得不避开有向角的概念，并且把有向线段的概念推迟到第二章引进，尽管这样做使得正文和习题解答中的某些论证严格地说是不完整的。……但是我们认为，基础好的读者自己能够去完善这些论证；而对于基础不那么好的读者，严格性上的欠缺不会对他们有什么妨碍。……

在术语的选用上也有同样的考虑。作者根据自己当学生的经验确信，如果在一本书中出现大量生疏的术语，会大大增加它的难度。因此在术语的使用上尽量做得最为经济。在某些情况下，不得不放弃一些方便的术语，这样也就可能忽视了基础较好的读者的某些兴趣。……

习题为读者提供了自己对正文内容掌握如何的一个检验机会。不必按顺序解所有的习题，但是我们主张读者在每一组习题中至少选做一个(做几个更好)。本书的结构使得照这样办法做的读者将不会丢失任何基本的内容。在解完(或试图去解)一个习题时，读者应当研究书后的解答。

习题一般不一定与正文衔接，但解答都是用本书的基本内容和初等几何中的变换。特别要注意的是解题方法而不是结论。个别的习题可能出现在几个不同的地方，因为将同一个问题的几种不同的解法加以比较，常常是有益的。

有许多作图题。在解这些习题时，我们并不去追求“最简单”(在某种意义下)的作图法。作者的看法是，对这些习题主要的兴趣是在逻辑上，而实际上怎样完成作图并不很重要。

……

亚格龙

目　录

前　　言

什么是几何学？

基谢廖夫在他的高级中学几何课本的开头，给出了点、线、面、体的定义，并规定几何图形是“以常规的方式处在空间中的点、线、面、体的集合”，紧跟着就给几何学下了定义：“几何学是研究几何图形的性质的学科。”这可能使人产生一个印象：作为前言标题的这个问题似乎早已在高级中学几何课本中回答了，用不着我们再来做文章。

然而，这种简单化的印象是错误的。虽然不能说基谢廖夫的定义不对，但它是不完善的。“性质”这个词的含义很广泛，几何学当然不能研究图形的所有性质。例如，一个三角形是画在白纸上的，还是画在黑板上的，这在几何学中是不重要的；三角形的颜色并不是几何学的研究对象。当然我们可以这样解释：按照上面的定义，几何学所研究的是几何图形的性质，而颜色是用来画三角形的纸的性质，不是图形本身的性质。但是，这种解释仍然不会使人满意。究竟图形的哪些性质是几何学中所研究的？人们总是希望能依据一个“数学式”的定义来判别，而这里还缺少这样的定义。例如，当你试图去解释下面的现象时，就会感到这种不足。在几何学中，我们只研究画在黑板上的三角形的一个顶点到某些直线（例如这个三角形的这个顶点的对边）的距离，而不研究它到另一些直线（例如黑板的边框线）的距离。如果要用上面的定义来解释这现象，简直是不可能做到的。

但是在这里我们要说明，不能因为上述定义的不完善而

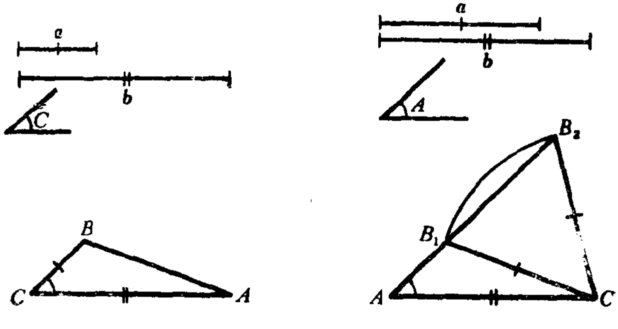
去责怪学校用的几何课本，在学习几何的最初阶段，基谢廖夫的定义也许是所能给出的唯一的定义。要明白这一点，只需看看下面的事实，几何学的历史开始于4000多年以前，但几何学的第一个科学的定义（本书的主要目的之一就是描述这个定义）却是在大约80年前(1872年)由德国数学家克莱因(F. Klein)给出的。非欧几何学的创建推动了这个定义的产生。在罗巴切夫斯基(Лобачевский)创建非欧几何学时，数学家们并没有明确认识到有必要对几何学的研究对象下一个确切的定义。只是在非欧几何创建之后，人们才明白，"几何图形"的直观概念不再能作为几何学科中的丰富多采的结构的基础了。直观概念是不能容纳多种"几何学"的。

现在我们回到原题来澄清几何学所研究的几何图形的性质。我们已看到，几何学所研究的并不是几何图形的所有性质，而只是其中的一部分。在对这部分属于几何学所研究的性质作出精确描述之前，我们只能笼统地说：几何学研究的是图形的"几何性质"。而这个说法并不能使基谢廖夫的定义得到完善，只是把问题变成了"什么是几何性质？"。对这个新问题又只能回答"几何性质是几何学中所研究的那些性质"。这样，我们就兜了一个圈子：几何学规定为研究图形的几何性质的学科，而几何性质又规定为几何学中所研究的性质。要冲破这个圈子，我们必须不用"几何学"这个词来规定"几何性质"。

为了研究什么是图形的"几何性质"这个问题，我们先看一个大家熟悉的命题：给定两边 a,b 和夹角 C 作三角形，则只有一个解[图1(a)]①。可是，如果从另一角度去考虑，

① 与此不同，给定两边 a,b 和一个对角 A 作三角形，则可能有两个解[图(b)]。

这个结论似乎是不对的：实际上不止一个三角形具有给定边 a,b 和夹角 C，而是有无穷多个（图2）；因此上述问题不止一个解，而是有无穷多个解。那么结论说只有一个解又是什么意思呢？



(a)　　　　　　　　(b)

图 1

“由两边 a,b 和夹角 C 只能作一个三角形”这个结论显然是意味着所有具有给定边 a,b 和夹角 C 的三角形互相全

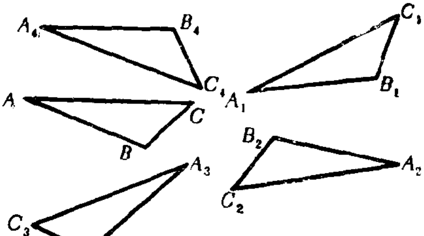


图 2

等。因此，更确切的说法是：给定两边和夹角可以作无穷多个三角形，但它们都互相全等。而在几何学中说只有一个

三角形具有给定的两边a,b和夹角C时，对那些只在位置上不相同的三角形是不加以区别的。既然几何学是研究图形的“几何性质”的学科，那么很清楚，只有几何性质完全相同的图形才能彼此不加区别。因此，全等的图形就有完全相同的几何性质；相反地，不全等的图形一定具有不同的几何性质，否则它们就不能区别了。

这样，我们就得到了图形的几何性质的定义：**图形的几何性质是全等的图形所共有的那些性质**。现在，我们可以明确回答前面提到的问题：为什么几何学中不研究三角形的一个顶点到黑板边框线的距离？这是因为这个距离不是几何性质，对于全等的图形来说，它不是不变的。而另一方面，三角形的高是几何性质，因为全等三角形的对应高是相等的。

至此，我们离几何学的定义已经很近了。我们知道几何学研究的是图形的“几何性质”，也就是全等图形所共有的性质。剩下只用回答“什么是全等图形？”这个问题了。

最后的这个问题也许会使有些读者失望，它可能造成这样的印象：到此为止我们什么也没有得到，只是单单把一个问题变成另一个同样困难的问题。然而事实并不是这样，什么情况下两个图形全等的问题是不难回答的，基谢廖夫的几何课本已给出了一个完全令人满意的回答。按照基谢廖夫的说法，“如果两个图形中的一个经过在空间中的移动，可以和另一个在各个部分上都重合，就称它们是全等的”。换句话说，全等的图形就是能经过运动而做到彼此完全重合的那些图形。因此，图形的几何性质——全等图形所共有的性质——就是图形在移动中不变的那些性质。

现在，我们终于得到了几何学的下述定义：**几何学是研究几何图形在运动中不变的那些性质的学科**。我们就在这个

定义上停步了，尽管这个定义还有进一步发展的余地，但我们将在以后来讨论它。

爱追根究底的读者也许对这个定义仍不满意，要求我们解释运动的意义。可以这样回答：运动① 是平面(或空间)的一个几何变换，它把每一点A变到另一点A'，并且使得任何两点A和B之间的距离等于它们所变到的点A'和B'之间的距离②。运动的这个定义是相当抽象的。既然我们已认识到保距变换在几何学中起了如此重要的根本性作用，就愿意直观地认识它，并仔细地研究它的所有性质。这种研究就是本书第一册的重要内容，在这一册的末尾，列出了平面上所有可能的保距变换，这可以作为平面上保距变换的一个新的，而且更简单的定义。(参看第二章第二节末尾。)

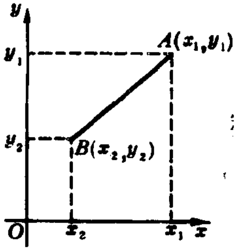


图 3

我们还要指出，研究保距变换不仅是为了用来明确几何学这个概念，它还有重要的实用意义。保距变换在解决许多几何题，特别是作图题时，有许多应用；这可以用它在几何学中的根

---

① 或称保距变换，或称刚体运动。下面将常用保距变换这个词。——英译者

② 平面上两点A和B之间的距离等于

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

这里x_1,y_1和x_2,y_2分别是A和B在某个直角坐标系中的坐标(图3)。(坐标系的选择是无关紧要的。)于是距离概念归结为一个简单的代数式，不必作任何解释了。

类似地，空间中两点A和B的距离等于

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

这里x_1,y_1,z_1和x_2,y_2,z_2是A和B在空间中的直角坐标。

本性作用来解释。同时，从保距变换的研究中还能得到可用来解许多几何题的某些一般方法。有时，我们能应用它们把一组习题化成同一个习题；而若由别的途径去解这些习题，则要用各不相同的方法。例如，我们考虑三个大家熟悉的作图题：

(a) 在平面上作一个三角形，使得在它的三条边上分别向外作的三个等边三角形的新顶点恰为预先给定的三点。

(b) 在平面上作一个三角形，使得在它的三条边上分别向外作的三个正方形的中心恰为预先给定的三点。

(c) 给定七边形各边的中点，求作此七边形。

这三个习题用中学课本中的通常的方法也能解，但这时看起来它们似乎是互不相关的(而且都是相当复杂的习题)。

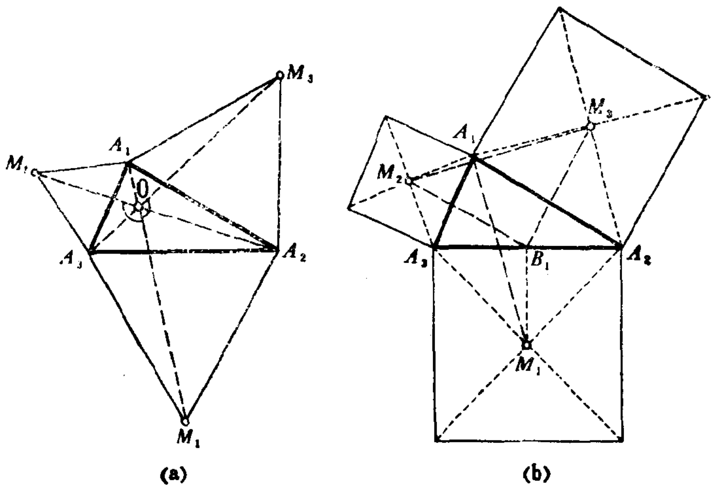


图 4

第一题可以这样解：先证明图 4(a)中三条直线 A_1M_1，A_2M_2 和 A_3M_3 交于一点 O，并且互相夹相等的角(就是说

$\angle M_1OM_2=\angle M_1OM_3=\angle M_2OM_3=120°$。于是我们可以由 M_1, M_2 和 M_3 找到 O 点了)。然后再证明

$$OA_1+OA_2=OM_3,\quad OA_2+OA_3=OM_1,\quad OA_3+OA_1=OM_2.$$

(从而就有 $OA_1=(OM_2+OM_3-OM_1)/2$ 等三个等式。这样就能找到点 A_1, A_2, A_3 了。)

解第二题时只要先证明[图4(b)]

$$M_2B_1\perp M_3B_1 \quad 和 \quad M_2B_1=M_3B_1,$$

这里 B_1 是三角形 $A_1A_2A_3$ 中 A_2A_3 边的中点；或者证明（这是第二种解法！）

$$A_1M_1=M_2M_3 \quad 和 \quad A_1M_1\perp M_2M_3.$$

解第三题可以利用下面的事实：七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 的对角线 A_1A_5 的中点 M_5' 与点 M_5, M_6, M_7 恰是一个平行四边形的四个顶点[图4(c)]，因此 M_5' 可以作出。于是，作七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 的问题就转化成作五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的类似问题了。这个新问题又可用同样方法继续化简。

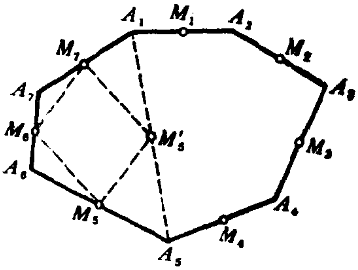


图 4(c)

以上这几个解法技巧性都是相当高的，都要作一些辅助线，(事先我们怎么知道要作哪些辅助线呢？)并且都是要动动脑筋的。但是，保距变换的研究使我们能提出并解答一个更一般的作图题(参见21题)：

求作一个 n 边形，使得分别以它的各边为底边、给定角 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为顶角的(并在 n 边形外的) n 个等腰三角形的顶点