

漢 譯

斯 蓋 尼

新 解 析 幾 何 學

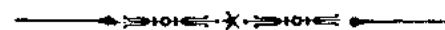
北 平 科 學 社 印 行

1935

漢 譯

斯 蓋 尼

新解 析幾何學



譯 者 丁 夢 松
王 俊 奎

校 者 高 佩 玉
王 喬 南
楊 夢 華

北 平 科 學 社 印 行

1935

所有權版

究處印翻

學何幾解析新尼蓋斯譯漢

洋宣精裝一元四角

全一冊實價

洋宣平裝一元一角

報紙平裝九角

譯者	王俊奎	丁夢松
校者	高佩玉	楊夢華
發行	北平科學社	
社址	北平油掛東	地安門內
電話	掛號局	四四九九〇三

二十二年八月初版

中華民國

二十四年十一月三版

原 序

著者在校訂時，將本書中已得諸位先生所稱讚之要點，仍然保存。然同時更以經驗所得之見解，將其加以改善，其主要題目稍加變更。增加可使學生發生興趣之幾個論題，此等變更，計畫出一種更合理之進展，同時更貢獻出諸多新奇而又艱深之問題。

著者將頭版所示之新材料，現在改為本書之標準材料，此請原諒。依事實言之，解析幾何學之進程，現在包括超越曲線 (Transcendental curves) 章，裏變方程 (Parametric equations) 章，圖形 (Graphs) 章，以及經驗方程 (Empirical equations) 章。

許多先生常欲將立體解析幾何一科，簡要編定之，現在此書之進序，即為應其要求。然許多先生又欲儲備學微積分之豐富教材，故又將必需者加入之。

問題已全部校訂，問題之後常附有備選問題，此對於普通學生固屬困難，然對於特殊天才之學生，而得以研究盤詰之機會。

北平科學社最近出版新書

漢譯	葛氏平面三角學 (訂正三版)	實價	洋宜精裝一元四角 不裝一元一角 報紙平裝八角
漢譯	范氏大代數學 (訂正三版)	實價	洋宜精裝二元八角 報紙精裝二元
漢譯	舒塞司立體幾何學 (訂正再版)	實價	洋宜平裝九角 報紙平裝六角
漢譯	舒塞司平面幾何學 (訂正四版)	實價	洋宜精裝一元四角 洋宜平裝一元一角 報紙平裝九角
漢譯	斯蓋二氏解析幾何學	實價	洋宜精裝二元二角 報紙精裝一元八角
漢譯	郝愛高等代數學 (附答案)	實價	洋宜精裝二元 報紙精裝一元六角
漢譯	斯梯渥高等物理學	實價	洋宜精裝三元六角 報紙精裝三元
漢譯	米益培物理綱要	實價	洋宜精裝二元四角 報紙精裝一元八角
漢譯	勃康實用化學	實價	洋宜精裝二元四角 報紙精裝一元九角
漢譯	勃康實用化學實驗	實價	八角
漢譯	郝氏高級代數學 (附無限級數)	實價	報紙平裝九角 洋宜精裝一元四角

目 錄

第一章 引用公式及表

節	頁
1. 幾何,代數及三角公式.....	1
2. 特殊角之三角函數.....	4
3. 三角函數之性號定則.....	4
4. 三角函數之值.....	5
5. 希臘字母.....	5

第二章 狄卡兒坐標

6. 解析幾何學.....	6
7. 狄卡兒直坐標,斜坐標.....	6
8. 方向線.....	9
9. 長.....	10
10. 定比分點.....	12
11. 坐標在幾何學上之應用.....	13
12. 斜角及斜率.....	16
13. 平行線或垂直線之證驗法.....	17
14. 角之公式.....	18
15. 面積.....	20

第三章 曲線與方程式

16. 曲線之方程式(點之軌跡).....	25
17. 方程式之軌跡.....	28
18. 方程式之討論.....	31
19. 撮要.....	36
20. 水平及直立漸近線.....	39
21. 交點.....	43

第四章 直線

22. 直線方程式之次數.....	46
23. 次方程式之軌跡.....	46

24. 直線之描跡, 定理, 劈因數描跡法.	48
25. 點斜式.	51
26. 兩點式.	51
27. 截距式.	52
28. 三線相交之條件.	52
29. 直線之法線方程式.	55
30. 法線式之化成.	56
31. 由線至點之垂直距離.	59
32. 直線系.	63
33. 過兩線交點之直線系.	66

第五章 圓

34. 圓之方程式.	71
35. 圓之方程式之證驗法.	72
36. 三條件定一圓.	73
37. 根軸.	78
38. 切線之長.	79
39. 圓系.	81

第六章 拋物線橢圓與雙曲線

40. 拋物線.	85
41. 拋物線之作圖法.	87
42. 拱形.	87
43. 拋物線之描跡.	89
44. 橢圓.	91
45. 橢圓之作圖法.	93
46. 橢圓之描跡.	95
47. 特例.	95
48. 雙曲線.	97
49. 雙曲線之作圖法.	99
50. 雙曲線之描跡.	100
51. 配偶雙曲線及其漸近線.	102
52. 等軸雙曲線或直角雙曲線.	105
53. 摘要.	105
54. 圓錐曲線.	105
55. 圓錐曲線系.	105

第七章 坐標之變換

56. 引言.....	108
57. 移軸法.....	108
58. 用移軸法化簡方程式.....	110
59. 定理.....	114
60. 圓錐曲線之標準方程式.....	114
61. 轉軸法.....	116
62. 用轉軸法化簡方程式.....	118
63. 二次方程式之軌跡.....	120
64. 描二次方程式之軌跡.....	122
65. 特例, 等軸(直角)雙曲線, 等軸雙曲線之作圖法.....	127
66. 圓錐曲線之第二曲線定義.....	129
67. 變換坐標軸之通法.....	129
68. 軌跡之分類.....	130

第八章 切線

69. 切線之方程式.....	132
70. 普通定理.....	135
71. 法線之方程式.....	136
72. 次切線及次法線.....	137
73. 已知斜率之切線.....	138
74. 過曲線外一點之切線.....	139
75. 已知斜率之切線之公式.....	140
76. 圓錐曲線之切線及法線之性質.....	143

第九章 極坐標

77. 極坐標.....	148
78. 極坐標方程式之描跡.....	150
79. 極坐標方程式描跡之捷法.....	154
80. 直角坐標與極坐標之關係.....	156
81. 應用直線及圓.....	157
82. 圓錐曲線之極坐標方程式.....	159
83. 交點.....	160
84. 用極坐標之軌跡.....	162

第十章 越曲線

85. 自然對數, 指數, 曲線與對數曲線.....	166
----------------------------	-----

86. 正弦曲線.....	171
87. 週期性.....	173
88. 正弦曲線之描跡.....	174
89. 其他三角函數曲線.....	176
90. 縱坐標之和.....	178
91. 界限曲線.....	181

第十一章 襄變方程式與軌跡

92. 襄變方程式之描跡.....	184
93. 由襄變方程式化為直角坐標方程式.....	186
94. 同一曲線之各式襄變方程式.....	187
95. 用襄變方程式解軌跡問題.....	190
96. 相當線之交點軌跡.....	196
97. 圓錐曲線之直徑.....	200

第十二章 函數 圖形及經驗方程式

98. 函數、函數之記法.....	204
99. 函數之圖形、簡單函數之例.....	205
100. 函數之立式及圖形.....	208
101. 經驗函數.....	211
102. 直線定律.....	212
103. 平均法.....	213
104. 上例之評論.....	214
105. 含二常數之定律.....	217
106. 方幂定律.....	218
107. 指數定律及雙曲線定律.....	221
108. 拋物線定律.....	225
109. 平均法適用於拋物線定律.....	227
110. 代數方程式之圖解.....	229
111. 超越方程式之圖解.....	232

第十三章 空間之狄卡兒坐標

112. 狄卡兒坐標.....	235
113. 重要關係.....	237
114. 直線之方向餘弦.....	238

115.	直線之方向數.	239
116.	長.	242
117.	兩方向線間之角.	242
118.	平行線及垂直線之驗察法.	243
119.	定比分點.	244
120.	空間之軌跡.	247
121.	面之方程式.	248
122.	曲線之方程式.	248
123.	方程之軌跡, 聯立二方程之軌跡.	249

第十四章 空間之平面與直線

124.	平面方程式之法線式.	251
125.	一次方程式之軌跡, 法線式之化代.	252
126.	特殊平面.	254
127.	平面之截距及跡線, 作平面法.	254
128.	二平面間之角.	257
129.	三條件決定一平面.	258
130.	平面方程之截距式.	260
131.	由平面至一點之距離.	262
132.	平面系.	264
133.	直線方程式之通式.	267
134.	直線方程式之各種特式.	271
135.	直線之射影面, 射影式.	272
136.	直線與平面相關之位置.	276

第十五章 特殊曲面

137.	球面.	280
138.	圓錐.	283
139.	圓柱面.	284
140.	曲面方程式之討論.	287
141.	二次曲面.	290
142.	橢圓.	290
143.	單葉雙曲面.	292
144.	雙葉雙曲面.	293
145.	橢圓拋物面.	295
146.	雙曲線拋物面.	297

第十六章 空間幾何補編

147. 旋轉面.....	300
148. 直紋面.....	303
149. 二次直紋面, 直母線.....	304
150. 斜圓錐.....	306
151. 曲線之射影圓錐.....	307
152. 空間曲線之裏變方程式.....	311

第十七章 坐標之變換 各種坐標系

153. 移軸法.....	314
154. 轉軸法.....	314
155. x, y, z 二次方程式之軌跡.....	317
156. 三變數二次方程式之化簡.....	318
157. 極坐標.....	320
158. 球坐標.....	321
159. 壘坐標.....	321

解析幾何學

第一章

引用公式及表

1. 此章先將幾何學，代數學，以及三角學中已證明之公式及定理寫出，以資以下諸章之引用。

幾何學

1. 在諸公式中， r 為半徑， h 為高， B 為底之面積， s 為斜高。

圓(Circle). 圓周 $=2\pi r$. 面積 $=\pi r^2$.

角柱體(Prism), 體積 $=Ba$. 角錐體(Pyramid), 體積 $=\frac{1}{3}Ba$.

直圓柱體(Right circular cylinder), 體積 $=\pi r^2 a$. 側面積 $=2\pi r a$.
全面積 $=2\pi r(r+a)$.

直圓錐體(Right circular cone), 體積 $=\frac{1}{3}\pi r^2 a$. 側面積 $=\pi r s$. 全面積 $=\pi r(r+s)$.

球體(Sphere), 體積 $=\frac{4}{3}\pi r^3$. 面積 $=4\pi r^2$.

代數學

2. 二次方程式. $Ax^2+Bx+C=0$.

解. 1. 劈因法: 劈 $Ax^2+Bx+C=0$ 之因數, 令每因子等於零, 而解 x .

2. 配方法: 運 C 項, 以 x^2 之係數除之, 再加 x 係數二分之一之平方於此兩組, 且開平方.

3. 公式法. $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$.

諸根之性質. $B^2 - 4AC$ 式在根號內, 此式謂之判別式. 此兩根為不等實根, 為等實根, 或為虛根, 則視此判別式為正, 為零, 或為負而定.

3. 對數.

$$\log ab = \log a + \log b, \quad \log a^n = n \log a, \quad \log 1 = 0,$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a, \quad \log_a a = 1.$$

三 角 學

4. 直角三角形. 銳角A之函數之定義如下:

$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{弦}},$$

$$\csc A = \frac{\text{弦}}{\text{對邊}},$$

$$\cos A = \frac{\text{隣邊}}{\text{弦}},$$

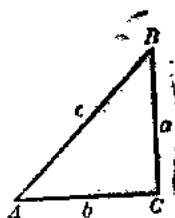
$$\sec A = \frac{\text{弦}}{\text{隣邊}},$$

$$\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{隣邊}},$$

$$\cot A = \frac{\text{隣邊}}{\text{對邊}}.$$

定理. 直角三角形中, 一邊等於弦與對角之

正弦之相乘積; 或等於弦與隣角之餘弦之相乘積.

5. 任意角. $\angle XO A$ 角可視為一線由 OX 轉

至 OA 所造成, 此線反時針方向轉時, 則成為正角;

而順時針方向轉時, 則為負角. 定線 OX 謂之始線, OA 謂之終線 (如圖.)

6. 角之測法. 量角之大小, 常用者有二法, 亦即有二單位角.

度制. 單位角為全周之 $\frac{1}{360}$, 謂之一

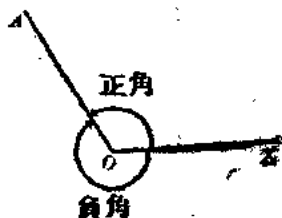
度.

弧制. 與半徑等長之弧所對之角為單位角, 此角曰半徑角.

兩單位角間之關係, 由下方程式可知:

$$180^\circ = \pi \text{ 半徑角 } (\pi = 3.14159 \dots);$$

解此式又可知,



$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = .0174 \dots \text{ 半徑角}; \quad 1 \text{ 半徑角} = \frac{180}{\pi} = 57.29 \dots^\circ.$$

由前之定義,可得

$$\text{一角之半徑角之數} = \frac{\text{所對之弧}}{\text{半徑}}.$$

此等方程式,可使由一種測法而知他種測法。

7. 函數間之關係.

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}; \sec x = \frac{1}{\cos x}; \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; 1 + \tan^2 x = \sec^2 x; 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

8. 化角之諸公式.

角	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

9. $(x+y)$ 與 $(x-y)$ 之諸函數.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

10. $2x$ 與 $\frac{1}{2}x$ 之諸函數.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

11. 任意三角形之邊及角之關係. 餘弦定律. 任意三角形一邊之平方等於他二邊平方之和, 減去此二邊與其夾角之餘弦之乘積之二倍; 即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

三角形之面積. 任意三角形之面積等於二邊與其夾角之正弦相乘積之半. 即

$$\text{面積} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B.$$

2. 特殊角之三角函數

半徑角	角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	-1	0	∞	-1	∞
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	∞	0	∞	-1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞

半徑角	角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1

3. 三角函數之性號定則

象 限	sin	cos	tan	cot	sec	csc
第一象限	+	+	+	+	+	+
第二象限	+	-	-	-	-	+
第三象限	-	-	+	+	-	-
第四象限	-	+	-	-	+	-

4. 三角函數之值

半徑角	角度	sin	cos	tan	cot		
.000	0°	.000	1.000	.000	∞	90°	1.571
.017	1°	.017	1.000	.017	57.29	89°	1.553
.035	2°	.035	.999	.035	28.64	88°	1.538
.052	3°	.052	.999	.052	19.08	87°	1.518
.070	4°	.070	.998	.070	14.30	86°	1.501
.087	5°	.087	.996	.088	11.43	85°	1.484
.175	10°	.174	.985	.176	5.67	80°	1.398
.262	15°	.259	.966	.268	3.73	75°	1.309
.349	20°	.342	.940	.364	2.75	70°	1.238
.436	25°	.423	.906	.468	2.14	65°	1.134
.524	30°	.500	.866	.577	1.73	60°	1.047
.611	35°	.574	.819	.700	1.43	55°	.980
.698	40°	.643	.766	.839	1.19	50°	.873
.785	45°	.707	.707	1.000	1.00	45°	.785
		cos	sin	cot	tan	角度	半徑角

5. 希臘字母

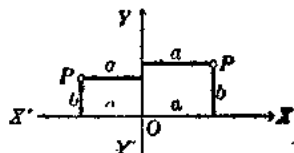
字母	名稱	字母	名稱	字母	名稱
A α	Alpha	I ι	Iota	P ρ	Rho
B β	Beta	K κ	Kappa	Σ σ	Sigma
Γ γ	Gamma	Λ λ	Lambda	T τ	Tau
Δ δ	Delta	M μ	Mu	T υ	Upsilon
E ε	Epsilon	N ν	Nu	Φ φ	Phi
Z ζ	Zeta	Ξ ξ	Xi	X χ	Chi
H η	Eta	O ο	Omicron	Ψ ψ	Psi
Θ θ	Theta	Π π	Pi	Ω ω	Omega

第二章

狄卡兒坐標

6. 解析幾何之各問題，俱用坐標，方程式及代數學中之方法解之。

7. 狄卡兒直坐標*。設 XX' 與 YY' 為平面中直交於 O 之兩線，由 YY' 至一點之距離，謂之此點之橫坐標；由 XX' 至此點之距離，謂之此點之縱坐標，平面中一點之位置，依符號定則，由其諸距離定之。若 P 點在 YY' 之右，則此點 P 之橫坐標為正；若在左邊，則為負。若 P 點在 XX' 之上，則此點 P 之縱坐標為正；若在下，則為負。



橫坐標 a 與縱坐標 b 為 P 點之坐標，而寫為括號 (a, b) 。橫坐標在縱坐標之前， XX' 與 YY' 諸線謂之坐標軸： XX' 為 x 軸（或橫軸）； YY' 為 y 軸（或縱軸）。點 O 為原點。

直坐標中作點之位置，若用坐標紙，則非常簡單。此種紙乃以器械將平面分為諸等方格，其各邊平行於各軸。

圖中為各點之位置，其長之單位，乃設想等於每軸上一段，此法簡單如下：

*狄卡兒氏 Rene Descartes (1596—1650) 首將坐標引用於幾何學中，故後以此名其坐標。