新代数

湖北教育出版社

约翰 L. 凯利 著
周正中 黄力平 译

新 代 数

约翰 L·凯利 著

周正中 黄力平 译

*

湖北教育出版社出版、发行 新华书店湖北发行所经销

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 11.5印张 245 000字

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

印数：1—2 000

ISBN 7—5351—0155—0/O·2 定价：1.95元

译 者 的 话

本书作者凯利（J·L·Kelley）教授是美国当代著名数学家，曾任加利福尼亚大学伯克莱分校数学系系主任，他还先后在美国几所名牌大学任教或担任名誉教授．他的名著《一般拓扑学》是拓扑学的经典著作，已译成中文，1982年由科学出版社出版，该书在我国数学界享有崇高威望。

凯利教授撰著此书时，采纳了许多数学组织的意见，得到当时美国数学科学会议局主席普赖斯教授任命的顾问委员会以及数学教学改革咨询处的推荐。

该书系统地、深入浅出地叙述了代数与解析几何学的基础知识，它从研究自然数系开始直到对实数系，都作了清晰的解释，这是对初等代数的独特处理方法，其实就是用代数公理去证明代数定理，就好比用几何公理去证明欧几里德几何的定理那样，这样的处理方法颇有吸引力，可以说是本书的重要特色之一．本书引进数学上的重要概念之一——函数，完全是从集合论的观点来定义的，并且把这个概念贯穿于本书的始终，其观点之高，分析之透彻也是少见的，这对我们加深对这个概念的理解和掌握非常有益。这样的处理方法是本书的另一重要特色。本书还有些特色也是其它书中极少有的。例如，本书对于每个重要概念都能深入浅出地反复

地阐明清楚；对较难定理的证明，注意采用启发式，化难为易，通俗地进行论证；书中列出的问题，有助于对学生理解能力的培养，使学生有可能深入到自己感兴趣的课题中去，等等。

本书大部分内容是目前我国高中数学教学内容，因此，它适用于高、初中教师和高中学生阅读参考，也可作为电大、师专、教育学院等有关课程的教学参考书。

译者从本书的实际内容出发，将原书名《近世代数引论》改为《新代数》，以免把该书的内容与我国在高等学校数学系开设的近世代数课程相混淆。

本书共分七章，前四章由黄力平译出，后三章由周正中译出，译文初稿完成后由周正中纂总。

本书译稿得到华东师范大学教授、我国著名函数论专家程其襄先生的审校，他对译文不妥之处提出了宝贵意见，在此我们向程教授表示衷心感谢。周嘉章同志参加了一些疑难章节的翻译工作以及译稿的绘图工作，在此表示谢意。

由于译者外文和专业知识水平有限，译文可能与原意有出入，甚至译错，希望读者批评指正。

译者

1984年5月15日

序　　言

本书要求学生具备高中代数和平面几何的基本知识，是准备作为大学文科第一学年，或者作为高中学生进一步提高的课程用的。许多数学专业组织关于数学课程的有益建议，都体现在这本教程中。因此本书对于中学数学教师也有裨益。

本书主要是为非理科的学生写的，但我也照顾到未来的数学家们的兴趣。书中内容是学习微积分所应该具备的一部分代数基础。具备了这些基础的学生，他们在学习微积分时可以得到真正的提高。

书中的一些特色是不寻常的。编列的问题有时相当长，但其中很多问题是重要的数学定理（到书的末尾尤其是这样）。编列这些问题的目的，不是吓唬学生，而是使学生有可能继续深入到自己特别感兴趣的那些课题中去。预料大多数学生仅能解决这些难题中的少数几个。本教程的主要目的与其说是技巧训练，倒不如说是理解能力的培养，所以“训练”题较少。

书中某些课题实际上超出了教程的范围。我已设法指出那些在后继课程中几乎没有用到或者根本没有用到的部分。就一个学期而言，本教程的内容很可能太多。因此，省略某些内容是必要的。

最后指出，书中涉及的题材，包括了大学全部非正统的代数课程。（把中学最后一个学期的代数，说成是“大学代数”

是不适当的.)末了,我还想给学生提出一些劝告,来满足大多数教师的共同愿望:

大多数学生都是第一次学习陈述代数公理和证明代数定理,但对此不必惊慌,习惯代数证明,就象习惯几何证明一样,只需坚持练习一段时间.如果你对定理的理解感到困难,可阅读该节后面所列的开头那些问题,这样有助于对定理的理解.那些问题都是为了帮助你理解定理的含义而设置的,阅读了这些问题的讨论和处理后,如果你仍感到不踏实,没有完全理解,你不妨仍往后面阅读.有了进一步的知识后,回头再读这一节,对这些问题你会意外的得到解决.

阅读定理的证明,要有一定的方法.首先阅读定理,明确该定理的条件和结论,然后在阅读证明之前,自己设想怎样构造一个证明.如果一时想不出,可以先看看证明的头几行后再去设想.当你成功地作出了定理的证明,再来阅读课本给出的证明,就会感到轻松自如.要是发现自己的证明与课本不同,不要马上就认为自己做错了,因为大多数定理都可能有许多不同的证法.无论在什么情况下都不应该死记定理的证明.

作出定理的证明,虽然首先要有一定的智慧,但还要有一定的技巧.一定要确切明瞭证明的对象,想出一些具体例子,然后设想各种可能的证法.不要一开始就急着动笔,应该在你合理地确定了自己的思路后,才正式动笔.复习用来构造这个证明的定义、公理和定理,往往是值得的,对本书第一、二章的定理特别如此,因为其中只采用极少的定义和定理.

最后给学生一句劝告:不要把这门课程拉下了.

J. L·Kelley

于加利福尼亚大学伯克莱分校

目　录

第一章　数的公理

本章专门复习与重述初等代数. 我们将循序渐进地进行，以便理解课题的实质. 我们假定读者已有少量的代数或几何知识，当然，熟悉代数的通常方法将更有益.

§1　不下定义的术语

读者可能出乎意料地发现这本代数教程与经典的平面几何教程有许多相同之处，有公理、定义、定理及其证明. 我们用这种方法陈述，是因为想要显示出这部分数学的全部结构. 虽然在代数的初等教程中往往是、且在某种程度上也必须是致力于解决“怎样去做”这类技巧性的问题，而我们更感兴趣的还是“为什么要这样做”. 另一方面，我们必须强调，数学不是旁观者的游戏，为了理解和体会数学，就必须亲自大量地思考和解题.（简言之，独立完成作业！）

这种描述方法，还有另外一个有点令人感到意外的特点，就是把某些专门名词(例如“数”或“集合”)作为不下定义的术语. 虽然在某些几何论述中，每个概念都有定义，如欧几里德定义直线为“没有宽度的”. 但至少可以说，这个定义什么也没有说明，理解或者运用这个隐晦的定义，从来都是不必要的. 这个发现解除了许多学习几何者的苦恼. 事实上，从现代数学家的观点来看，“直线”就是欧氏几何中一个不下

定义的术语.

定义的含意，值得我们进一步考察. 设想我们处在这样一种情况下，我们碰上了单词“gizmo”，去查词典求其意思. 在词典中我们查到它的好些同义词，比如说是“frazimer”，“whatsis”以及“sicklebob”，结果发现它们每一个都是生词；接着我们再查单词“frazimer”，并发现“whatsis”“sicklebob”以及“gizmo”都列为同义词；我们再查“whatsis”、“sicklebob”，碰到的都是同一组单词. 很显然，我们无法查到“gizmo”的意思，除非借助于我们已经熟悉的单词来定义“gizmo”.

现在设想我们打算用一个非常严密的方法来描述一个数学理论，特别地，设想我们要定义每一个术语.(这正是欧几里德在他的几何论述中所试图做的.)让我们考虑最初的定义，它也许就是“gizmo 是…”我们要问：用什么去定义 gizmo 呢？如果这是最初的定义，我们能够找一类什么对象来填写定义的叙述“gizmo 是…”中的空白呢？不使用某些术语，显然不可能作出定义. 如果这是最初的定义的话，那么这个术语就不是已经定义了的！

总而言之，在每个数学体系中都必然会有不下定义的术语. 我们不必因此而引起过分的苦恼，同样不要因为无法理解平面几何学中“没有宽度”这个概念所产生的困难而苦恼. 我们需要知道的只是几何公理关于直线所断言的那些事实.

如历史上那样，有时把公理看作是“不证自明的真理”会有些困难，因为公理本身是关于未下定义的对象的描述. 直观地说，公理通过描述未下定义的对象之间的关系，告诉我们这些对象的本质. 我们再利用这些公理，通过推理来证明数学定理. 必须有公理，这点是再清楚不过的了. 因为如果

既要从未下定义的术语开始，而又没有公理，那么我们绝对无法着手证明定理。

§2 数学语言

我们从复习代数的某些基本概念开始. 然而，因为我们要仔细考虑所涉及的概念，所以本节不能过多地讨论代数. 本节主要关心数学语言. 有人说数学是一种语言，如果承认关于语言的任何一种通常的描述，就很难赞成这种说法. 数学中确实有一套规范的术语，它们比常用语言简练得多. 当然，数学也可以不用这类简略的记法来完成，但事实上，这类记法的惊人的作用，使它们显得不可缺少.

数、加法、乘法的概念都是不下定义的. 分配公理是代数公理之一，通常叙述为：

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \tag{1}$$

由(1) 我们十分明确地理解了这个命题的含义.

(1)式中叙述的命题当然可以不用这种 x—y—z 式的语言，而可叙述为：对任何三个数，第一个数乘以第二个数与第三个数的和等于第一个数与第二个数的积，加上第一个数与第三个数的积. 当然，由于我们都学了些代数，(1) 式的叙述似乎比刚才用一般语言的叙述要简单得多. 这就是我们想强调的一点：数学语言不仅简短，而且易于理解.

我们并不总是把每个命题都简写成完全象(1) 那样. 通常还要把理解(1)时所假定的条件包括进去，而把(1)写为

对所有的数 x、y 和 z，

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \tag{2}$$

习惯上还可以用“对每一个”代替“对所有的”，或者可以写为“对每个数 x、y 和 z”. 这几种不同的表达方式都假定为同一个含意. 我们所断言的是，如果在表达式“$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$”中，用数代替“x”、“y”、“z”，那么所得到的结果总是正确的.

关于这种数学语言，还有另一个应该注意的重要事实.

对所有的数 a、b和c，

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \tag{3}$$

及对所有的数a、r和x，

$$a\cdot(r+x)=a\cdot r+a\cdot x \tag{4}$$

确切地说，它们与(2)是同一回事. 即，在这类命题中使用什么字母无关紧要. 数学语言就是如此奇特，几乎可以任意地*使用各种不同的字母.

下面是本书中经常出现的另一些叙述：

有一个数 x，使得 $x+2=5$. (5)

对某个数 a，$a+2=5$. (6)

存在一个数 r，使得$r+2=5$. (7)

显然，这些命题断言的都是同一回事，即有一个数，它加上2得5，形如“$x+2=5$”的叙述，有时称为条件等式，而形如“$x+y=y+x$”的叙述，称为恒等式. 我们将不使用这类难懂的专业术语.

结束对语言的探讨之前，还有一个我们希望讨论的更有意思的问题，即通常使用的“相等”的意义是什么？在阿拉伯

---

* 并非完全任意，见问题2.13.

数字和罗马数字的讨论中，如果我们说$4=\mathrm{IV}$，那么这个式子说明什么呢？我们总是在逻辑恒等的意义上使用“相等”的，从而断言“$4=\mathrm{IV}$”仅仅意味着“4”与“IV”是指同一对象的两个名称。一个对象可以有许多名称，我们可以交替地使用这些名称。对于4能够成立的任何事实，对于IV也成立。

关于相等的几种叙述有时视为公理.如“每一个对象都与本身相等”，“等于同一对象的对象，相互相等”，以及“一个等式中，等量代替等量，结果还是相等的”.因为我们仅仅是在恒等的意义上使用相等，所以能够把这些叙述（以及很多这类更精确的叙述）认为是恒等概念当然的一部分.因为每个对象都恒等于自身，所以$4=4$。如果我们知道$2+2=3+1$，以及$3+1=4$，那么我们就可推得$2+2=4$。前两个等式告诉我们“$2+2$”与“$3+1$”是同一对象的名称，而“$3+1$”与“4”也是同一对象的名称。对这个相同的数，我们就有三个不同的名称，从而很显然，$2+2=4$。等式往往被直观地认为是一个论断，它左右两边的符号表示同一个对象的名称。

我们使用的字母“x”，“y”等等，好象它们是名称。严格地说，它们不是名称，虽然人们在数学书中经常看到这样的叙述，“设x表示任意固定的数…”.这种叙述是难以理解的专业术语的一部分。数学家们交流时是能心领神会的，但人们在文字上不一定要采用这种叙述。在数学里，一个名称总是指一个个别的对象，而不是以含混的形式指总体中的任何一个。我们用许多相同的方法使用字母，作为常用的代词。正如代词在句子结构中常用来代表名词那样，字母在数学结构中常用来代表名称。类似的“语法”规则适用于字母也适用于名称。因此，如果x是一个数，并且$x+5=7$，我们就以

“$x+5$”和“7”为同一个数的名称，从而立即推出 $x+5+(-5)=7+(-5)$. 我们可以更详细地把理由叙述如下：因为每一对象都恒等于自身，所以 $7+(-5)=7+(-5)$ 成立。如果 $x+5=7$，那么“$x+5$”与“7”是同一对象的名称. 所以我们可以用另一个名称“$x+5$”代替“$7+(-5)$”中的“7”，故得 $(x+5)+(-5)=7+(-5)$。

以后我们不一定要运用上述推理，这里我们这样论证，只不过是为了获得对相等意义的清楚而直观的理解. 因为相等意味着恒等，所以读者应该看得出下面每个命题都显然成立。

(1) 如果A是三角形，且 $A=B$，那么 B 是三角形.

(2) 如果 x、y、u、v 都是数，且 $x=y$，$u=v$，那么 $x+u=y+v$，$x+u=x+v$，$x-u=y-u$。

(3) 如果 x、y 都是数，且 $x=y+2$，那么 $17x=17(y+2)$ 以及 $x+2(y+2)+x=(y+2)+2x+x$。另一方面，下面的叙述都成立，但其根据不仅是相等的概念，而还要加上一些代数原理。

(1) 如果 x，y 是数，那么 $x+y=y+x$；

(2) 如果 x 是数，那么 $x+2x+3=3(x+1)$。

问　题

2.1　下面哪些命题的证明，只依据相等总是意味着逻辑恒等这一事实？

(a) 如果 $a=b$，那么 $a+a=b+b$；

(b) 如果 $a=b$，那么 $2\cdot a+b=3\cdot a$；

(c) 如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$；

(d) 如果 $a=b$，那么 $(a+a)+b=a+(a+b)$；

(e) 如果 $a=b$，那么 $a+b=b+a$

下面的定理选自 J•B•克拉克著《代数》(1881 年版)，把每个定理都用"数学语言"表述出来。

2.2 两数和的平方，等于第一个数的平方加上第一、第二两数的乘积的两倍，再加上第二个数的平方。

2.3 两数差的平方，等于第一个数的平方减去第一、第二两数的乘积的两倍，再加上第二个数的平方。

2.4 两数和与两数差的乘积，等于这两个数的平方差。

2.5 已知任意三个数，第一个与第二个的和乘以第一个与第三个的和，等于第一个的平方加上第二个与第三个的和与第一个的乘积，再加上第二个与第三个的乘积。

用普通语言表述下列各式：

2.6 $(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$。

2.7 $(a-b)+(b-a)=0$.

2.8 "如果 a,b,c,d 是整数，使 $a=2b+1$，$c=2d+1$，那么存在整数 m，使 $ac=2m+1$"。

注意：这个命题是正确的，试用普通语言将它表述成关于整数的简短命题。

2.9 在集合论中，如果两个集合具有相同的元素，则称它们相等。用公理表述即："如果 A,B 是集合，且对所有的 X，X 属于 A 当且仅当 X 属于 B 时，那么 $A=B$." 考虑这个公理之逆，即"如果 $A=B$，那么对所有的 X 当且仅当 X 属于 B 时，X 属于 A". 证明这个命题，是否只需依据相等的意义？

2.10 设“点”，“直线”及“在…上”都是不加定义的，并且若a与b都是点，且$a \neq b$，那么存在唯一的一条直线L，使a，b在L上。证明如果P，Q是直线，且$P \neq Q$，那么至多有一点C，使得C在P和Q两直线上。

2.11 考虑陈述：“对任意数x，都存在数y，使$y \neq x$”。这个陈述应该是真的。那么，从它用“x”代替“y”所得的陈述是否为真。

§3 加法公理

从现在起，我们随意使用已讨论过的数学语言来复习初等代数。第一个任务是描述数的加法。我们把数以及用“+”表示的加法，视为是不下定义的概念。我们假定五条公理，依次叙述和讨论如下。第一条是：

A1 闭合公理 对于每一个数x和每一个数y，$x+y$是一个数。

这条公理告诉了我们有关加法运算的一些事实。两个数相加，得到另一个数。例如$2+2$是一个数，$1+3$也是一个数——事实上，是同一个数。

A2 交换公理 对于每一个数x和每一个数y，有$x+y=y+x$。

交换公理告诉我们，比如说，$3+7=7+3$。由于我们以前的数学训练，这个事实如此熟悉，实际上用不着提。但是人们可以回想到(或者在小孩时已经观察到)，在我们开始学习加法结合运算时，对这个命题感到非常意外。因为加法可以交换，而没有看到大多数运算却不可以交换。例如，我们间