萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

三角法
二角和差之三角函數

林鶴一 矢袋喜一著
駱師曾譯

商務印書館發行

三角法

二角和差之三角函數

林鶴一　矢袋喜一著

駱師曾譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

三角法一二角和差之三角函數

林鶴一　矢袋喜一著

駱師曾譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

中華民國十八年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF SUM AND DIFFERENCE OF TWO ANGLES

By
HAYASHI and YABUKURO
Translated by
LO SHIH TSENG

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1929

原　　序

本篇乃論三角法中二角和差之三角函數，倍角，加法定理及減法定理之變形，及分角。本篇所收者，爲三角法中最重要之部分。著者於問題之分類，選擇及其配列，頗費多大之注意，而讀者視爲困難之問題常感苦痛者，皆可以非常之興味解之。

余欲告讀者，有次之數項。

1. 著者在數年以前，嘗論綜合的算學之必要，而於中等教育算學科教授尤爲有効。所謂綜合的算學，卽以下列二項爲目的。

A. 算術，代數學，幾何學，三角法互相聯絡。

B. 與他學科之聯絡。

幸世之教育者諸賢，極表贊同之意，現時之算學教授方針，次第傾嚮於此，著者衷心所不勝之喜也。綜合的算學之內容，今茲無多述之必要。唯今所欲言者，著者在本篇中，於綜合的算學之第一目的，卽算術，代數學，幾何學，三角法相互之聯絡，殆無遺憾。三角法性質上使之如是，著者對之費力不尠，卽各章皆揭示關於數值問題，諸種角度之三角函數計算問題，而採其與算術之聯絡，每逢定理，先用代數學的證明，次試以幾何學的證明。

2. 本篇一貫之方針，先就可爲基礎之公式，依代數的述之，再依幾何學的證明之，次爲領悟公式之適用計，先揭模範之例題，再示其解答。第三段爲熟達公式之應用計，將數多同種類之問題，由簡

而繁，由易而難，適當配列之。而各章之終，再附雜問題集，爲讀者之練習計，而揭多數之問題。

3. 本篇中凡高等各種學校之入學試驗問題，皆於適當之場所插入。而關於本篇之入學試驗問題，其數又非常之多，讀者能以自己之學力試之，興味頗深，須加注意。於入學試驗問題，陳述之方法稍異，其內容相同者，將其語句修正而揭之。例如第54節以下二三節之問題中，其三角係爲三角形之內角而提出者，今改爲三角之和等於 180°。

4. 初學三角法之讀者，凡有星號＊之事項，可以省略，因其程度稍高故也。然在普通學習三角法者，依此等之問題，亦大可鍛練腦力。

以上爲關於本書編纂上大體之旨趣。

本書聊供中學校肄業者及卒業者之參考，倘蒙有所教益，則著者不勝榮幸。

矢 袋 喜 一 識

目　　次

三角法—二角和差之三角函數

第　一　章

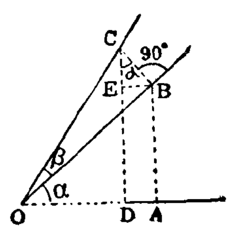
二角和差之正弦及餘弦

1. 正弦及餘弦之加法定理

α, β 爲任意之二角，則

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$



證明. 二角爲 AOB, BOC, 以 α, β 表之. 今假定 α, β 均爲銳角，且其和亦爲銳角.

從 C 在 OB, OA 上作垂線 CB, CD, 再從 B 在OA, CD 上作垂線 BA, BE, 則 $\angle BCE=\alpha$ 明矣. 如是則

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DC}{OC}=\frac{AB+EC}{OC}=\frac{AB}{OC}+\frac{EC}{OC}$$

$$=\frac{AB}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}+\frac{CE}{BC}\cdot\frac{BC}{OC}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

又 $$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OD}{OC}=\frac{OA}{OC}-\frac{EB}{OC}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}-\frac{EB}{BC}\cdot\frac{BC}{OC}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

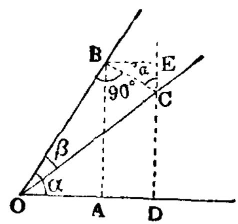
$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

2. 正弦及餘弦之減法定理.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

證明. 二角爲 AOB, BOC, 以 α, β 表之. 今假定 α, β 均爲銳角, 而 α 比 β 爲大, 與前節同法作圖, 則



$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{DC}{OC}=\frac{AB}{OC}-\frac{CE}{OC}=\frac{AB}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}-\frac{CE}{BC}\cdot\frac{BC}{OC}$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

又 $$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OD}{OC}=\frac{OA}{OC}+\frac{EB}{OC}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}+\frac{EB}{BC}\cdot\frac{BC}{OC}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

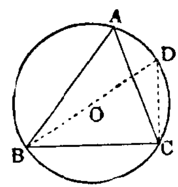
$$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

3. 以上之加法定理及減法定理,亦稱**基本公式**,極爲重要,尚可試以其他種種之幾何學的證明.

吾人在證明基本公式之先,須證明次之定理以爲預備.

三角形之一邊,以外接圓之直徑除之,所得之商,等於此邊對角之正弦.

證明. 作直徑 BD,連結 CD,因 BD 爲直徑,故 BCD 爲直角.



故 $\frac{BC}{BD} = \sin BDC = \sin BAC$

$= \sin A.$

今以 d 表直徑,以 a 表邊 BC,則

$$\frac{a}{d} = \sin A.$$

系. 若直徑等於單位之長,則

$$a = \sin A.$$

學者既於平面幾何學,已知脫雷米 Ptolemy 之定理,卽

圓之內接四邊形,其對邊所包矩形之和,等於對角線所包之矩形.

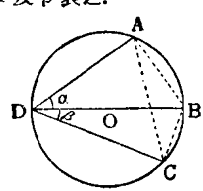
吾人以此定理爲基礎,用前證之定理,卽可證明加法定理及減法定理.

(A) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

證明. ADB, BDC 爲已知之二角,以 α 及 β 表之.

BD 等於單位之長,以此爲直徑畫圓,

連結 AB,BC,又連結 AC.



如是由脫雷米之定理,

$$AC.DB = AB.DC + AD.BC$$

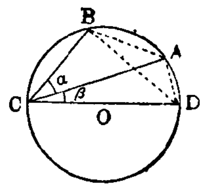
然 $AC = \sin(\alpha+\beta)$, $AB = \sin\alpha$,

$DC = \sin DBC = \cos\beta$, $BC = \sin\beta$,

$AD = \sin ABD = \cos\alpha$.

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

(B) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.



證明 BCD, ACD 爲已知之二角, 以 α 及 β 表之. CD 等於單位之長, 以此爲直徑畫圓, 連結 AB, AD, BD.

如是由脫雷米之定理,

$$BD.AC = AB.CD + BC.AD.$$

然 $BD = \sin\alpha$, $AC = \sin ADC = \cos\beta$,

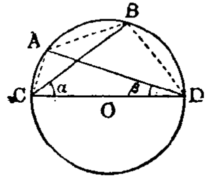
$AB = \sin(\alpha-\beta)$, $BC = \sin BDC = \cos\alpha$,

$AD = \sin\beta$.

$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \cos\alpha\sin\beta$.

從而 $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

(C) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.



證明. BCD, ADC 爲已知之二角, 以 α 及 β 表之. CD 等於單位之長, 以此爲直徑畫圓, 連結 AC, AB, BD.

如是由脫雷米之定理.

$$BC.AD=BD.AC+AB.CD.$$

然 $BC=\sin BDC=\cos\alpha,\quad AD=\sin ACD=\cos\beta,$

$BD=\sin\alpha,\qquad AC=\sin\beta,$

$AB=\sin BCA=\sin\{(90^\circ-(\alpha+\beta)\}=\cos(\alpha+\beta),$

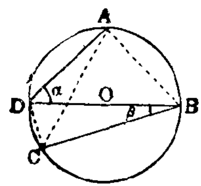
$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta).$

從而 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$

(D) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$

證明. ADB, DBC 爲已知之二角，以 α 及 β 表之.

BD 等於單位之長，以此爲直徑畫圓，連結 AB, DC, AC.



如是由脫雷米之定理，

$$AC.BD=AD.BC+AB.CD.$$

然 $AC=\sin ADC=\sin(90^\circ+\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta),$

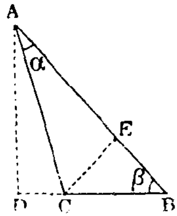
$AD=\sin ABD=\cos\alpha,\ BC=\sin BDC=\cos\beta,$

$AB=\sin\alpha,\qquad CD=\sin\beta.$

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$

4. 吾人已於前節由脫雷米之定理，證明正弦及餘弦之加法定理及減法定理，茲再於本節及次節舉其別證，而試以此重要定理之幾何學的證明法.

(A)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$



證明. 於 △ABC, 其 ∠A 及 ∠B 各以 α,β 表之.

AD 爲 △ABC 之高, 則

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}BC.AD=\frac{1}{2}BC.AC\sin ACD$$

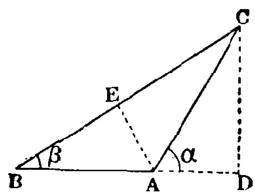
$$=\frac{1}{2}BC.AC\sin(\alpha+\beta).$$

$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{2.\triangle ABC}{AC.BC}=\frac{AB.CE}{AC.BC}=\frac{(BE+EA)CE}{AC.BC}$$

$$=\frac{CE}{AC}\cdot\frac{BE}{BC}+\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CE}{BC}$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

(B)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$



證明　△ABC 之外角 CAD 及 ∠B, 各以 α 及 β 表之.

CD 爲 △ABC 之高, 則

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}BC.AE$$

$$=\frac{1}{2}BC.AC\sin ACB=\frac{1}{2}BC.AC\sin(\alpha-\beta.)$$

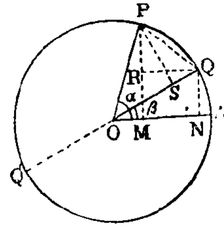
$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\frac{2.\triangle ABC}{BC.AC}=\frac{CD.AB}{BC.AC}=\frac{CD(BD-AD)}{AC.BC}$$

$$=\frac{CD}{AC}\cdot\frac{BD}{BC}-\frac{AD}{AC}\cdot\frac{CD}{BC}$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

(C) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

證明. AOP, AOQ 爲已知之二角, 以 α 及 β 表之. 以 O 爲中心畫圓, 連結 PQ, 由 P 及 Q 向 OA 作垂線 PM, QN. 且準與 OA 平行作 QR.



如是 $\overline{PQ}^2=\overline{QR}^2+\overline{RP}^2=(ON-OM)^2+(PM-QN)^2$

$$=\overline{OA}^2\{(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\}$$

$$=2.\overline{OA}^2(1-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta).$$

於直徑 QQ' 作垂線 PS. 則

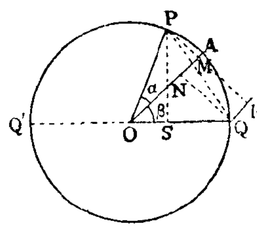
$$\overline{PQ}^2=QS.QQ'=2OA(OA-OS)$$

$$=2.\overline{OA}^2\{1-\cos(\alpha-\beta)\}.$$

$$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

(D) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

證明 與 $\cos(\alpha-\beta)$ 之例同樣作圖.



$\overline{PQ}^2=\overline{QR}^2+\overline{RP}^2$

$$=(OM-ON)^2+(PM+QN^2)$$

$$=\overline{OA}^2\{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2\}$$

$$=2.\overline{OA}^2(1-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

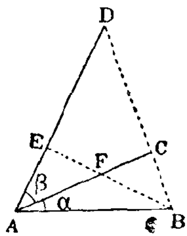
然　$\overline{PQ}^2 = QS.QQ' = 2.OA(OA-OS) = 2.\overline{OA}^2\{1-\cos(\alpha+\beta)\}$.

$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

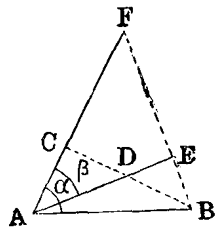
注意　(C) 及 (D) 爲高思頤 Cauchy 之證明.

5.　吾人既就加法減法定理述其三種相異之證明法. 最後再揭示尼哥爾 W. Nichols 之證明.

第一圖



第二圖



證明.　BAC, DAC 爲已知之二角, 以 α 及 β 表之. 由 B 向 AC, AD 作垂線 BC, BE, 其足爲 C, E. 於第一圖及第二圖,

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \frac{BE}{AB} = \frac{BE.AD}{AB.AD}.$$

然　$\triangle ABD = \frac{1}{2}BE.AD = \frac{1}{2}BD.AC.$

$$\therefore\ \sin(\alpha\pm\beta) = \frac{BD.AC}{AB.AD} = \frac{(BC\pm CD)AC}{AB.AD}$$

$$= \frac{BC.AC}{AB.AD} \pm \frac{AC.CD}{AB.AD} = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

次　$\cos(\alpha\pm\beta) = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AE.AF}{AB.AF} = \dfrac{(AC\mp FC)AE}{AB.AF}$

$$= \frac{AC.AE}{AB.AF} \mp \frac{FC.AE}{AB.AF}.$$