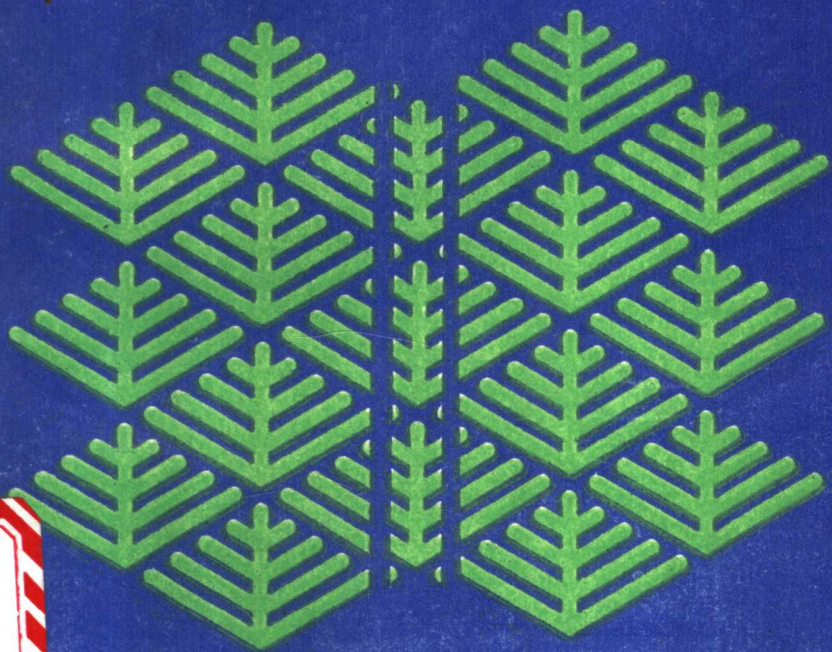


怎样解
数学题
——毛估与发现



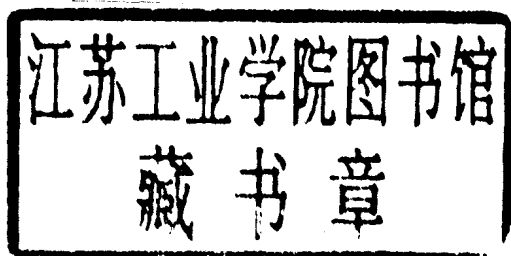
刘云章 马复
南京大学出版社



怎样解数学题

——毛估与发现

刘云章 马 复 编著



南京大学出版社

1990·南京

怎样解数学题

——毛估与发现

刘云章 马 复 编著

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 镇江前进印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 146千

1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

印数 1—3,000

ISBN 7-305-00646-7

O·36

定价:2.95 元

前 言

怎样获得解题的“金钥匙”，这是众多读者梦寐以求的事。解数学题有个发现过程，要发挥创造性。怎样发现？怎样创造？爱因斯坦说：“看来，直觉是头等重要的。”直觉往往产生于经验、观察、联想、归纳和类比的基础上。当代美国著名数学家和教育家G.波里亚则明确指出，数学发现常从实验、观察、归纳和类比开始。他期望，数学的发现“在未来的中学里将不会像今天那样完全遭到忽视”。徐利治先生指出：“数学直觉力的培养应成为数学教育的重要内容之一。”并提倡在数学教材或数学参考书中添加“数学美”、“数学猜想”艺术和“数学发现”技巧等内容。我们撰写这个小册子的目的就是试图阐明一些数学解题中的发现技巧。

本书中有些例题，有一定的难度，其中部分例题选自近年来国内外的数学竞赛试题，各级升学试题和各种期刊的优秀文章中，在此对作者们表示感谢。

数学解题时，怎样猜想，怎样发现，是个大难题，本书只是抛砖引玉，不妥之处请批评指正。

作者

1989年4月

目 录

1	先毛估 再证明·····	(1)
2	眼力·····	(9)
3	观察法·····	(14)
4	不充足理由律·····	(29)
5	和谐化原则·····	(38)
6	联想发现法·····	(52)
7	归纳法·····	(71)
8	类比推理·····	(86)
9	基本量方法·····	(99)
10	顺向探索 ·····	(114)
11	逆向探索 ·····	(131)
12	构造法 ·····	(149)
13	直觉选择 ·····	(175)
14	灵感的诱发 ·····	(188)
15	梦中能解题吗?·····	(200)

先毛估 再证明

人们在日常工作中,常常要对有关问题进行毛估。例如,出门时毛估天气,考试结束后毛估成绩,秋天毛估水稻产量,盖大楼前毛估造价……。

数学解题时,也常常要使用毛估法。

例1 如图1,设 P, Q 为线段 BC 上两定点,且 $BP=CQ$, A 为 BC 外一动点,当点 A 运动到使 $\angle BAP = \angle CAQ$ 时, $\triangle ABC$ 是什么三角形? 试证明你的结论(1986年全国初中数学竞赛试题)。

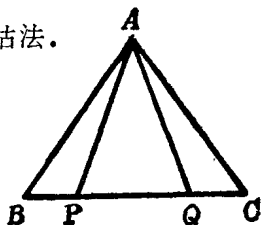


图1

分析 $\because BP=CQ, \angle BAP = \angle CAQ$, 可以猜测 $AB=AC$, 即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

我们的理由不够充足, 结论不一定可靠。下面给出严格的逻辑证明:

$$\because S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ACQ}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACQ}} = 1$$

$$\therefore \frac{AB \cdot AP \cdot \sin \angle BAP}{AC \cdot AQ \cdot \sin \angle CAQ} = \frac{AB \cdot AP}{AC \cdot AQ} = 1$$

$$\text{故 } AB \cdot AP = AC \cdot AQ \quad (1)$$

同理,由

$$S_{\triangle BAQ} = S_{\triangle CAP}$$

可得

$$AB \cdot AQ = AC \cdot AP \quad (2)$$

$$(1) \times (2) \text{得: } AB^2 = AC^2, \quad \therefore AB = AC$$

$\therefore \triangle ABC$ 等腰.

例2 函数 $F(x) = |\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x + Ax + B|$ 在 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A, B 有关. 问 A, B 取什么值时 M 为最小? 证明你的结论 (1983 年省市自治区联合数学竞赛试题).

$$\text{分析 } F(x) = |\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + Ax + B|$$

考虑到正弦函数和一次函数的特征, 可以猜测所需答案是“ $A = B = 0$ ”.

当 $A = B = 0$ 时, 记 $F(x)$ 为 $f(x) = \sqrt{2} |\sin(2x + \frac{\pi}{4})|$, 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上, 有三点 $x_1 = \frac{\pi}{8}$, $x_2 = \frac{5}{8}\pi$, $x_3 = \frac{9}{8}\pi$, 使 $f(x)$ 取得最大值 $M_f = \sqrt{2}$, 它就是要求的最小的 M 的值.

下面运用逻辑思维证明, 对任何 A, B 不同时为零时有:

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}} F(x) > \max_{0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}} f(x) = M_f = \sqrt{2}$$

用反证法证明之:

若设

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}} F(x) \leq \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\text{则应有 } F\left(\frac{\pi}{8}\right) \leq \sqrt{2}, \quad F\left(\frac{5\pi}{8}\right) \leq \sqrt{2},$$

$$F\left(\frac{9\pi}{8}\right) \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{即 } \begin{cases} |\sqrt{2} + \frac{\pi}{8}A + B| \leq \sqrt{2}; \\ |-\sqrt{2} + \frac{5\pi}{8}A + B| \leq \sqrt{2}; \\ |\sqrt{2} + \frac{9\pi}{8}A + B| \leq \sqrt{2}. \end{cases} \text{即 } \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq \frac{\pi}{8}A + B \leq 0; \\ 2\sqrt{2} \geq \frac{5\pi}{8}A + B \geq 0; \\ -2\sqrt{2} \leq \frac{9\pi}{8}A + B \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{\pi}{8}A + B \leq 0 \\ \frac{5\pi}{8}A + B \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{4\pi}{8}A \geq 0 \Rightarrow A \geq 0;$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{5\pi}{8}A + B \geq 0 \\ \frac{9\pi}{8}A + B \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{4\pi}{8}A \leq 0 \Rightarrow A \leq 0,$$

因而 $A = 0$.

但当 $A = 0, B \neq 0$ 时有

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}} F(x) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}} |\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + B| \\ &= \sqrt{2} + |B| > \sqrt{2}, \end{aligned}$$

与(1)式矛盾。猜测的结论得证。

对于例1、例2我们都是先毛估,再证明。所谓毛估就是

对问题作出合情猜想。毛估对于发现解题途径有极重要的意义。许多数学问题,包括世界名题的解决,都是首先从图形或数据的直接观察中获得某种合情猜想,然后再进行逻辑证明的。这是因为,逻辑论证虽然严密,但毕竟需要一定的过程,而且在结论未事先给出时,也不知从哪儿着手论证。而通过观察、分析得出的毛估往往很快引导我们到达正确的结论。正如中国科学院前任院长卢嘉锡所讲:“先有毛估,然后才有逻辑思维。”

例3 求 $P_n = (n+1)(n+2)\cdots(n+n)$ 除以 $Q_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ 所得的商 ($n \in \mathbb{N}$)。

分析 先实验、观察,

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } P_1 = 2, \quad Q_1 = 1, \quad \therefore \frac{P_1}{Q_1} = 2,$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } P_2 = 3 \times 4, Q_2 = 3, \quad \therefore \frac{P_2}{Q_2} = 4,$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } P_3 = 120, Q_3 = 15, \quad \therefore \frac{P_3}{Q_3} = 8.$$

$$\text{毛估: } \frac{P_n}{Q_n} = 2^n.$$

下面用数学归纳法严格证明:

$$(1) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } \frac{P_1}{Q_1} = 2, \text{ 结论成立,}$$

(2) 设当 $n=k$ 时结论成立, 即 $\frac{P_k}{Q_k} = 2^k$, 则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{\frac{P_k}{k+1} (2k+1)(2k+2)}{Q_k \cdot (2k+1)} = 2 \cdot \frac{P_k}{Q_k} = 2^{k+1},$$

结论也成立。

由(1),(2)知毛估结论正确。

初看此题,似乎难以下手。用实验、观察、归纳的办法得到毛估的结论之后,问题就不难了。

例4 已知 $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$, 求 $x^n + \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

分析 先实验、观察,

$$n = 1 \text{ 时, } x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta;$$

$$\begin{aligned} n = 2 \text{ 时, } x^2 + \frac{1}{x^2} &= (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \\ &= 4\cos^2\theta - 2 \\ &= 2\cos 2\theta; \end{aligned}$$

.....

毛估: $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$.

下面用数学归纳法证明:

(1) 当 $n = 1, 2$ 时, 结论成立;

(2) 设 $n \leq k$ 时, 结论成立, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} &x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \\ &= (x^k + \frac{1}{x^k})(x + \frac{1}{x}) - (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) \\ &= 2\cos k\theta \cdot 2\cos\theta - 2\cos(k-1)\theta \\ &= 2\cos(k+1)\theta + 2\cos(k-1)\theta \\ &\quad - 2\cos(k-1)\theta \\ &= 2\cos(k+1)\theta. \end{aligned}$$

因此, 当 $n = k + 1$ 时, 结论仍成立,

由(1)、(2)知毛估结论正确。

例5 在数列 $\{a_n\}$ 中前两项为 $a_1 = 3, a_2 = 9$ 而对于任何的 $k > 2$, 下面等式 $a_k = 4a_{k-1} - 3a_{k-2}$ 成立, 求通项 a_n 的表达式.

分析 先实验、观察,

$$n = 1 \text{ 时, } a_1 = 3;$$

$$n = 2 \text{ 时, } a_2 = 9 = 3^2;$$

$$n = 3 \text{ 时, } a_3 = 4a_2 - 3a_1 = 27 = 3^3;$$

$$n = 4 \text{ 时, } a_4 = 4a_3 - 3a_2 = 81 = 3^4.$$

毛估: $a_n = 3^n$.

下面用数学归纳法证明:

(1) $n = 1$ 时, 结论成立;

(2) 设 $n < k$ 时, 结论成立, 则当 $n = k$ 时,

$$\begin{aligned} a_k &= 4a_{k-1} - 3a_{k-2} \\ &= 4 \cdot 3^{k-1} - 3 \cdot 3^{k-2} \\ &= 3^k. \end{aligned}$$

由(1), (2)知毛估结论正确.

例6 如图2, 已知 $\triangle ABC$ 中, D, E 为 BC 上的两点, 且 $BD = CE$, 试比较 $AB + AC$ 与 $AD + AE$ 的大小.

分析 因为 $\triangle ADE$ 包在 $\triangle ABC$ 中, 凭经验可以猜到 $AB + AC > AD + AE$.

下面证明这个毛估结论:

延长 AD 至 F , 使 $DF = AE$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle FBD$ 中, $BD = EC$, $DF = AE$, 而 $\angle AEC > \angle ADE = \angle FDB$,

由余弦定理可得 $AC > BF$, 故

$$AB + AC > AB + BF > AF = AD + DF = AD + AE$$

即 $AB + AC > AD + AE$.

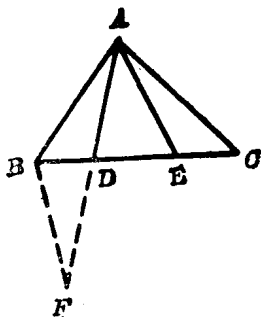


图 2

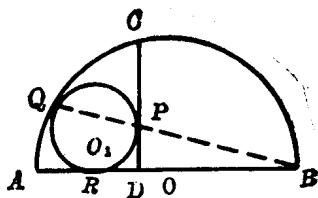


图 3

例7 如图 3, 已知 AB 为半圆 O 的直径, C 为半圆上一点, $CD \perp AB$, 圆 O_1 切半圆于 Q , 切 CD 于 P , 切 AB 于 R .

求证: $BC = BR$.

分析 作图、观察, 发现 Q, P, B 可能共线.

毛估: 问题也许可分下面两步来解决:

(1) 由题设推得 Q, P, B 共线,

(2) 由 Q, P, B 共线推得 $BC = BR$.

事情果真如此, 证明留给读者.

例8 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $c^n = a^n + b^n (n > 2)$, 问 $\triangle ABC$ 为何种三角形?

分析 我们知道, 若 $c^2 = a^2 + b^2$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 现在 $n > 2$, 我们一下子难以说出结论, 可以先取一些特殊情况实验、观察. 例如

取 $n = 3, a = 1, b = 2$, 则 $c = \sqrt[3]{9} \approx 2.08$. 作出这三边形的草图, 得到一个锐角三角形. 再观察另外一些特例发现还是锐角三角形.

毛估: 若 $c^n = a^n + b^n (n > 2)$, 则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

证明如下:

在 $\triangle ABC$ 中, $\because c^n = a^n + b^n (n > 2)$, $\therefore c$ 为 $\triangle ABC$ 的最大边, 为此只需验证 C 为锐角即可. 因为 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 问题转化为证明:

$$a^2 + b^2 > c^2$$

该式等价于 $(a^2 + b^2)c^{n-2} > c^n$

因此问题又归为能否证明:

$$(a^2 + b^2)c^{n-2} - c^n > 0$$

把已知式 $c^n = a^n + b^n$ 代入左边得:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)c^{n-2} - a^n - b^n &= a^2(c^{n-2} - a^{n-2}) \\ &\quad + b^2(c^{n-2} - b^{n-2}) > 0 \end{aligned}$$

从而 $\cos C > 0$, C 为锐角, 即 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

例9 对确定的正整数 a, b, c , 方程 $a^x + b^x = c^x$ 有多少个正整数解?

分析 众所周知, 当 $a = 3, b = 4, c = 5$ 时, 方程有一解 $x = 2$; 当 $a = 3, b = 4, c = 6$ 时, 似乎无正整数解; 当 $a = 5, b = 12, c = 13$ 时, 方程也有一解 $x = 2$; 当 $a = 1, b = 12, c = 13$ 时, 似乎无正整数解.

毛估: 该方程至多有一个正整数解, 证明如下:

若方程存在正整数解 N , 现证不存在其他解.

当 $n > N$ 时, $(\frac{a}{c})^n < (\frac{a}{c})^N, (\frac{b}{c})^n < (\frac{b}{c})^N$, 所以 $(\frac{a}{c})^n$

$$+ (\frac{b}{c})^n < (\frac{a}{c})^N + (\frac{b}{c})^N = 1, \text{ 即 } a^n + b^n < c^n,$$

同理可证当 $n < N$ 时, 有 $a^n + b^n > c^n$.

所以除 N 外不存在其他解.

眼 力

毛估，需要眼力。有的同学能很快看出银幕上哪一个是“坏人”，有的舞蹈家能很快分辨出哪几位考生有培养前途，这是因为他们很有眼力。解数学题，也要有眼力。

一、小高斯的眼力

大数学家高斯 10 岁的时候，数学教师布特纳要求全班学生计算 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ ，刚解释完题目，高斯就把写好答案的石板交上去。布特纳连看也没有看，心想这个全班最小的学生准是瞎写了些什么或者交上了白卷，当别的学生一个一个地交上石板以后，他才开始审阅。许多学生都算错了，而高斯的石板上却写着一个正确的答案。高斯的眼力使老师大吃一惊。在这以前，老师未教过学生计算等差数列。

有经验的布特纳立刻意识到这是一件不寻常的事，他买了一本最好的算术书送给高斯，并说：“他已超过我，我已经没有什么可以教他的了。”

二、直觉思维

眼力与直觉思维能力有关。直觉，有时又称为灵感。读者也许听到过这样的对话：

“你凭什么说他是好人？”

“凭我的直觉！”

小学生往往凭直觉分辨银幕上谁是“好人”，谁是“坏人”。

直觉思维不同于一般的逻辑思维，它是逻辑程序的高度简缩，是对事物规律性的一种迅速猜测。所谓“先毛估，再证明”实际上就是“先直觉猜测，再逻辑证明”。从第1章的几个例子可以看到直觉猜测不仅要观察问题中数、式、形，还要联想已有的知识经验。

直觉思维是一种创造性思维。怎样发明？怎样创造？爱因斯坦说：“看来，直觉是头等重要的。”他对直觉一直给予极高的评价，他的创造原理的模式是“经验——直觉——概念或假设——逻辑推理”。阿基米德在浴盆洗澡时悟得“浮体原理”，牛顿从苹果落地悟得万有引力定律，都是得益于直觉。

人们在解数学题时或从事任何创造性活动时，总是要不断地探索有益的念头。好念头往往来自直觉。有人问“发明大王”爱迪生，为什么会有那么多的发明。他没有回答，只是随手从衣袋里掏出一本笔记本，上面画着许多奇妙的设计图或匆匆记上的断断续续的字句。原来，爱迪生勤于思考，不断地观察、实验、想主意，一有什么好念头，立即写在笔记本上。有时，在一天之内，甚至出现二十个新念头。他一生的专利发明有1328项，这是与他的直觉思维能力分不开的。

直觉猜测的结论为什么还要经过证明呢？这是因为直觉有时也会“骗人”。假设我们沿地球的赤道给地球围一个“圆铁箍”，铁箍的“圆心”与地心重合。如果铁箍的周长比赤道“圆周”长只多1米，那么直觉也许会告诉你，铁箍与地球之间的空隙是很小的，恐怕连一张薄纸也难以插进。事实并非如此！“空隙”处足足可以钻过一只不大不小的老鼠。建议你具体计算，验证一下。

三、直觉洞察力

所谓眼力，通常就是指直觉洞察力。首届“华罗庚金杯”少

年数学邀请赛试题中，有不少题目是用来考察小朋友的直觉洞察力的。例如，“1966、1976、1986、1996、2006 这五个数的总和是多少？”读者凭直觉能很快看出答案是 $1986 \times 5 = 9930$ 。再如，“妈妈让小明给客人烧水沏茶，洗开水壶要用 1 分钟，烧开水要用 15 分钟，洗茶壶要用 1 分钟，洗茶杯要用 1 分钟，拿茶叶要用 2 分钟。小明估算了一下，完成这些工作要花 20 分钟，为了使客人早点喝上茶，按你认为最合理的安排，多少分钟就能沏茶了？”这是统筹法中的最初等的例子，读者凭直觉能很快看出答案是 16 分钟。

直觉思维的主要特点之一是“快”，它是从整体上进行识别，迅速看出问题结论或解题途径。

例1 任意调换五位数 12345 各数位上数字的位置 所得五位数中质数的个数是()。

这是 1986 年江苏省初中数学竞赛试题中的一条选择题，要求考生从下面四个答案中选出一个正确的答案填空：

(A) 4； (B) 8； (C) 12； (D) 0

许多学生的做法是先排除个位数是 2, 5, 4 的情况，再逐一考察剩下的 48 种情形，用筛去法解决。但有直觉思维习惯的学生，会从整体上把 1, 2, 3, 4, 5 五个数字考察一番，由 $1+2+3+4+5=15$ ，便可肯定不论怎样改变数字的位置，排出来的五位数一定是 3 的倍数，而不是质数。

解析几何的创始人笛卡尔曾提出过“两种求知之道”，即直觉和推断。他非常明确地描述了关于数学证明的某种见解：“……例如我们去推断 2 加 2 等于 3 加 1，那么我们必须直觉地看到不仅 2 加 2 得 4 和 3 加 1 得 4，并且也应当看到由这两个命题出发，上面提到的第三个命题也就必然导出。”这里，笛卡尔强调了直觉洞察力在数学推导的每一步中的重

要性。

例2 m 为何值时, 方程 $x^3 - x^2 - x + m^3 = 0$, ① 有三个相异实根; ② 有两个相异实根, 而其中有一个为二重根; ③ 只有一个实根?

解 设 $f(x) = x^3 - x^2 - x + m^3$.

(1) 当方程 $f(x) = 0$ 有三个相异实根时, 连续曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴相交三次, 所以 $f(x)$ 有一极大值、一极小值, 且两极值异号 (因 $f'(x)$ 为二次函数, $f(x)$ 也只有两个极值)。

因 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$, 故 $f(x)$ 在点 $x = -1/3$, $x = 1$ 处取极值

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27} + m^3 \quad f(1) = m^3 - 1$$

于是, 得

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot f(1) = (m^3 - 1) \left(\frac{5}{27} + m^3\right) < 0$$

即

$$(m-1)(m^2+m+1)\left(m+\frac{\sqrt[3]{5}}{3}\right) \\ \times \left(m^2 - \frac{\sqrt[3]{5}}{3}m + \frac{\sqrt[3]{25}}{9}\right) < 0$$

即

$$(m-1) \left(m + \frac{\sqrt[3]{5}}{3}\right) < 0$$

从而

$$-\frac{\sqrt[3]{5}}{3} < m < 1$$

(2) 当方程 $f(x) = 0$ 有两个相异实根, 而其中有一个为二重根时, 连续曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴相交于两点且其中之一