21世纪高等学校教材

经济应用数学

微积分

主　编　郭子雪　李　凯
副主编　齐红然

国防工业出版社
http://www.ndip.cn

21世纪高等学校教材

经济应用数学

微积分

主　编　郭子雪　李　凯
副主编　齐红然

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分:经济应用数学/郭子雪,李凯主编.—北京:
国防工业出版社,2003.8
ISBN 7-118-03223-9

Ⅰ.微... Ⅱ.①郭...②李... Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 063841 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
新艺印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16 印张 18 416 千字
2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月北京第 1 次印刷
印数:1—4000 册 定价:24.00 元

本书编委会

主　　编　郭子雪　李　凯

副主编　齐红然

参编人员　谷银山　张运玲　张玉芬

前　　言

经济应用数学·微积分是高等院校经济管理类各专业的重要基础课之一，是学习后继课程所必不可少的。本书是按照国家教委对经济、管理类大学本科“微积分”教学大纲编写的，包含了教学大纲要求的全部内容，体现了经济管理类各专业在“微积分”方面所必须具备的基本知识和技能要求。

本书在忠实体现“微积分”课程的教学大纲要求的前提下，力求做到科学性与通俗性相结合，深入浅出，逐步提高。本书在每一节都附有适量的练习题，每章后还附有总复习题，能帮助读者在掌握基本理论知识和基本技能的同时，提高其分析和解决实际问题的能力。本书可作为高等院校经济管理类各专业“微积分”课程的教学用书。

本书共分 9 章，其中第 1 章由张运玲、张玉芬编写，第 2，3 章由齐红然编写，第 4 章由李凯、谷银山编写，第 5，6，9 章由郭子雪编写，第 7，8 章由李凯编写，全书最后由郭子雪修改、定稿。

在编写过程中，我们参阅了国内外有关研究成果和资料，在此谨致谢意。由于我们水平所限，书中不妥或错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2003 年 6 月

内容简介

本书是根据教育部制定的经济管理类高等数学教学大纲的要求编写的,也是编者多年从事高等数学教学工作的结晶。本书具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、例题较多、便于自学等优点,可作为高等院校经济管理专业本科生微积分课程的教材,也可作为参加经济管理类自学考试者的参考用书。

全书主要内容有:函数;极限与连续;导数与微分;中值定理及导数的应用;不定积分;定积分;多元函数;微分方程与差分方程;无穷级数。另外,书的最后还附有习题答案与提示。

目　　录

第1章 函　　数

函数是微积分的主要研究对象。这一章将介绍函数的概念、函数的简单性质、反函数与复合函数以及初等函数等内容。

1.1 集　合

一、集合的概念

定义 1.1 具有某种共同属性的事物的全体称为一个集合，用大写字母 A、B、C… 表示；构成集合的事物称为集合的元素，用小写字母 a、b、c… 表示。

[例 1] 全体实数。

[例 2] 不等式 $x^2-5x+6<0$ 的所有实数解。

[例 3] 圆 $x^2+y^2=1$ 上所有的点。

[例 4] 方程 $x^2-3x+2=0$ 的所有根。

如果元素 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A 或 A 在 a 中；如果元素 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \overline{\in} A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中。

二、集合的表示法

(1) 列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用{ }括起来。

[例 1] 由 1,2,3,4,5 组成的集合 A，可以表示为

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

注意：用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复。

(2) 描述法：设 A 是具有某种特性的元素 x 的全体所组成的集合，则 A 记为

$$A=\{x \mid x\text{ 所具有的特性}\}$$

这里所谓 x 所具有的特性，实际上就是 x 作为 A 的元素应适合的充分必要条件：适合这个条件的任何事物都是集合 A 的元素；反之，集合 A 的元素都必须适合这个条件。

[例 2] 设 A 为 $x^2+5x+6=0$ 的根构成的集合，则 A 可表示为

$$A=\{x \mid x^2+5x+6=0\}$$

另外，集合以及集合之间的关系可以用图形表示，称为文氏图。文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，集合内的元素用区域内的点表示。如图 1-1 所示。

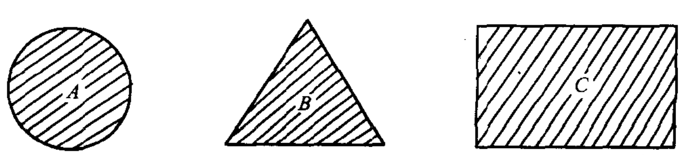

图 1-1

三、全集、空集和子集

定义 1.2 由所研究的所有事物构成的集合称为全集，用 U 表示。

全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一个条件下就可能不是全集。比如我们研究的对象是有理数，则由全体有理数组成的集合就是全集；如果研究的对象是全体实数，则由所有有理数构成的集合就不是全集了，此时的全集应是全体实数构成的集合。

定义 1.3 不包含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示。

［例 1］ 满足方程 $x^2+1=0$ 的所有实数构成的集合为空集。

［例 2］ 平面上两条平行直线的交点构成的集合为空集。

注意：$\varnothing$ 与 $\{0\}$ 及 $\{\varnothing\}$ 不同。$\{0\}$ 是含有元素“0”的集合，$\{\varnothing\}$ 是以空集为元素的集合，它们都不是空集。

定义 1.4 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即“如果 $a\in A$，$a\in B$”，则称 A 是 B 的子集。记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A。如图 1-2 所示。

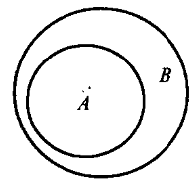

图 1-2

［例 1］ 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$ 则 $A\subset B$。

［例 2］ 设 N 表示全体正整数的集合，R 表示全体实数的集合，则 $N\subset R$

注意：“$\in$”与“$\subset$”用法的区别，前者只能用于集合与元素间的关系，后者只能表示集合与集合之间的关系。

子集有以下几个性质：

(1) $A\subset A$，即“集合 A 是其自身的子集”；

(2) 对任意集合 A，有 $\varnothing\subset A$，即“空集是任意集合的子集”；

(3) 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，即“集合的包含关系具有传递性”。

定义 1.5 设有集合 A 和 B，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

［例 3］ 设 $A=\{x\mid x$ 为不大于 3 的正整数$\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A=B$

四、集合的运算

定义 1.6 设有集合 A 与 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合称集合 A 与集合 B 的并集，记为 $A\cup B$，如图 1-3 所示。即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

［例 1］ 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,5,6\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$。

［例 2］ 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid -1<x<6\}$，则 $A\cup B=\{x\mid -2\leqslant x<6\}$。

并集有以下几个性质：

(1) $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；

(2) 对任意集合 A，都有 $A\cup\varnothing=A$，$A\cup U=U$，$A\cup A=A$。

定义 1.7 设有集合 A 与 B，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为集合 A 与集合 B 的交集，记为 $A\cap B$，如图 1-4 的阴影部分所示。即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

［例 3］ 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，则 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$。

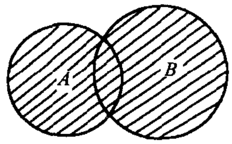

图 1-3

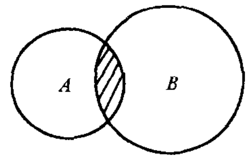

图 1-4

[例 4]　设 A 为奇数集合，B 为偶数集合，则 $A \cap B = \varnothing$

对于集合 A 和 B，如果 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 是分离的，如图 1-5 所示。

交集有以下几个性质：

(1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$;

(2) 对任意集合 A，都有 $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap U = A, A \cap A = A$。

定义 1.8　设有集合 A 与 B，由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素构成的集合，称为集合 A 与集合 B 的差集，记为 $A - B$，如图 1-6 的阴影部分所示。即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{但} x \notin B\}$$

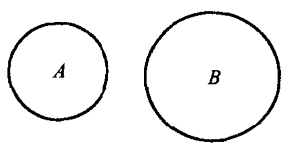

图 1-5

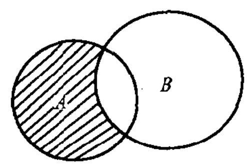

图 1-6

[例 5]　设 $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$，则 $A - B = \{1,2\}, B - A = \{5,6\}$。

[例 6]　若 $A \cap B = \varnothing$，则 $A - B = A, B - A = B$。

定义 1.9　设 $A \subseteq U$，由属于全集 U 而不属于集合 A 的所有元素构成的集合，称为集合 A 的补集，记为 A' 或 $\overline{A}$，如图 1-7 所示。即

$$A' = \{x \mid x \in U, \text{且 } x \notin A\}$$

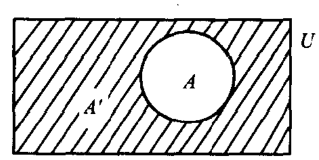

图 1-7

补集有下列性质：

$$A \cup A' = U, A \cap A' = \varnothing$$

[例 7]　设参加体能测试的运动员集合为全集 U。如果 A 表示测试合格的运动员集合，则 A' 表示测试不合格运动员集合。如果将测试成绩分为优、良、合格、不合格 4 种，用 B 表示测试成绩为优或不合格的运动员集合，则 B' 表示测试成绩为良或合格的运动员集合。

五、集合的运算律

1. 交换律

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

2. 结合律

(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. 分配律

(1)$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(2)$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. 吸收律

(1)$(A \cup B) \cap A = A$

(2)$(A \cap B) \cup A = A$

5. 摩根律

(1)$(A \cup B)' = A' \cap B'$

(2)$(A \cap B)' = A' \cup B'$

对于集合运算律的证明,只以结合律(2) 为例示范说明,其它运算律可以类似地证明。

结合律(2) 的证明:

如果 $x \in (A \cap B) \cap C$,则 $x \in A \cap B$ 且 $x \in C$,即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 且 $x \in C$,因而 $x \in A$ 且 $x \in B \cap C$,所以 $x \in A \cap (B \cap C)$,由子集定义可知 $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$

同理可证

$$A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$$

因此

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

[例1]　设全集 $\cup$ 为某班全体同学的集合,A 为全体男同学的集合,B 为全体共青团员的集合,试验证 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 成立。

[解]　$A \cap B$ 是全体男共青团员的集合,因此,$\overline{A \cap B}$ 是全体女同学或全体不是共青团员的男同学构成的集合。

$\overline{A}$ 是全体女同学的集合,$\overline{B}$ 是全体不是共青团员的同学构成的集合,因此,$\overline{A} \cup \overline{B}$ 是全体女同学或全体不是共青团员的同学构成的集合,即全体女同学或全体不是共青团员的男同学构成的集合。

所以 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

[例2]　利用集合的运算律证明:$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$。

证　由 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 可知

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup A') \cap B = U \cap B = B$$

习题 1—1

1. 用集合的描述法表示下列集合:

(1) 小于 3 的所有实数的集合;

(2) 圆 $x^2 + y^2 = 9$ 内部(包括圆周) 一切点的集合;

(3) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合。

2. 用列举法表示下列集合:

(1) 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根的集合;

(2) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合;

(3) 集合 $\{x \mid |x - 2| < 2$ 的整数$\}$。

3. 指出下列集合中哪些是空集:

$A = \{x \mid x^2 + 1 = 1\}$　　　　$B = \{x \mid x^2 + 5 = 0, x \in R\}$

$C = \{x \mid x > 2$ 且 $x < 2\}$　　　　$D = \{x \mid x > 2$ 或 $x < 2\}$

$E = \{x \mid x > 2$ 且 $x < 0\}$　　　　$F = \{x \mid x > 2$ 或 $x < 0\}$

4. 写出 $A = \{0,1,2\}$ 的所有子集。

5. 如果 $A = \{a,b,c\}$,下列式子哪些是正确的?

(1)$\varnothing \in A$　　(2)$a \overline{\in} A$　　(3)$\{a\} \subset A$　　(4)$\{a\} \in A$

(5)$a \subset A$　　(6)$b \in A$　　(7)$A \subset A$　　(8)$\{b,c\} \subset A$

6. 设 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}, B = \{x \mid 0 < x < 5\}$,求:

(1)$A \cup B$　　(2)$A \cap B$　　(3)$A - B$

7. 设 $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,3,5\}, C = \{1,2,4,6\}$,求:

(1)$A \cup B$　　(2)$A \cap B$　　(3)$A \cup B \cup C$　　(4)$A \cap B \cap C$

(5)$A \cup B \cap C$　　(6)$A - B$　　(7)$C - B$

8. 如果全集 $\cup = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,5\}$,求:

(1)$\overline{A}$　　(2)$\overline{B}$　　(3)$\overline{A} \cup \overline{B}$　　(4)$\overline{A} \cap \overline{B}$

9. 如果 A 是非空集合,下列各个等式哪些正确?哪些不正确?

(1)$A \cup A = A$　　(2)$A \cap A = A$　　(3)$A \cap A = \varnothing$　　(4)$A \cup A = \varnothing$

(5)$A \cup \varnothing = A$　　(6)$A \cup \varnothing = \varnothing$　　(7)$A \cap \varnothing = A$　　(8)$A \cap \varnothing = \varnothing$

(9)$A - A = \varnothing$　　(10)$A - A = A$　　(11)$A - \overline{A} = A$　　(12)$A - \overline{A} = \varnothing$

10. 如果 A 表示某单位会英语的人的集合,B 表示会俄语的人的集合,那么,$\overline{A}$、$\overline{B}$、$A - B$、$\overline{A \cup B}$、$\overline{A \cap B}$、$A \cup B$、$A \cap B$ 各表示什么样人的集合?

1.2　实数集

微积分是在实数范围内讨论问题的,因此,需要对实数和实数集有足够的认识。这一节将对实数作简单介绍。

一、实数与数轴

实数是有理数和无理数的总称,所有实数构成的集合称为实数集,记作 R。在理数包括零、正负整数和正负分数。凡是有理数都可以表示为 $\frac{p}{q}$,其中 p、q 都是整数,且 $q \neq 0$;而无理数则不能表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式。分数可以用无穷小数或无穷循环小数表示;反之,有穷小数或无穷循环小数也可用分数表示。所以,有理数可以表示为有穷小数或无穷循环小数,而无理数为无穷不循环小数。

数轴是研究实数的重要工具,有关实数的许多性质,都可以通过数轴直观地反映出来。

设有一条水平直线,在这条直线上取定一点,记作 O,称其为原点;规定由原点向右的方向为正方向,并用箭头表示,再取一个单位长度。这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴,如图 1-8 所示。

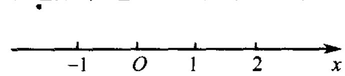

图 1-8

数轴上的点与实数之间是一一对应的关系。数轴上的任意一个点 p,都对应于一个实数 x,这个实数 x 是这样确定的:若点 p 与原点 O 重合,则 $x = 0$;若点 p 在原点 O 的右侧,则取

x 为线段 Op 的长度 $|Op|$；若点 P 在原点 O 的左侧，则取 x 为线段 Op 长度的相反数 $-|Op|$。反过来，任给一个实数 x，都可以在数轴上找到一个点 p，使得点 p 所对应的实数为 x。这说明全体实数与数轴上的所有点形成一一对应的关系。为了简单起见，常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别，如实数 x 也称为点 x，反之亦然。

二、实数的绝对值

定义 1.10 设 x 为实数，它的绝对值记为 $|x|$，其定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

从数轴上看，实数 x 的绝对值 $|x|$ 的几何意义是：点 x 与原点 O 之间的距离。由绝对值的定义可知，对于任何实数 a 和 b，

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geqslant b \\ b-a, & a < b \end{cases}$$

$|a-b|$ 的几何意义是：点 a 与点 b 之间的距离。

由绝对值的定义及几何意义可以得到 $|x|$ 的下列性质：

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

因为 $x > 0$ 时 $-|x| < x = |x|$

$x = 0$ 时 $-|x| = x = |x|$

$x < 0$ 时 $-|x| = x < |x|$

所以 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(5) 如果实数 $a > 0$，则 $\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$

由绝对值的几何意义可知，$|x| < a$ 表示所有与原点间距离小于 a 的点 x 的集合，而 $-a < x < a$ 表示在点 $-a$ 和点 a 之间的所有点 x 的集合，所以它们表示的是相同的集合。

(6) 如果实数 $b > 0$，则 $\{x \mid |x| > b\} = \{x \mid x > b\} \cup \{x \mid x < -b\}$

由绝对值的几何意义可知，$|x| > b$ 表示所有与原点间距离大于 b 的点 x 的集合，而"$x > b$"和"$x < -b$"分别表示"在点 b 右边"和"在点 $-b$ 左边"的所有点 x 的集合，所以它们表示的是相同的集合。

(7) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

根据性质(4)有

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$
$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

所以

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

再由性质(5)得

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

(8) $|x-y| \geqslant |x| - |y|$

因为 $|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|$，所以

$$|x-y| \geqslant |x|-|y|$$

(9) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \qquad (y \neq 0)$

三、区间

区间是指介于任意两个实数 a 与 b 之间的全体实数的集合，这两个实数 a、b 称为区间的端点。按区间是否包含端点以及区间端点是否有限，可将区间分为以下几种类型：

(1) 闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，如图 1-9 所示。

(2) 开区间 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$，如图 1-10 所示。

(3) 半开半闭区间 $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$，如图 1-11 所示。

$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$，如图 1-12 所示。

(4) 半无穷区间 $(a,+\infty) = \{x \mid x > a\}$，$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$

$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$，$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$

(5) 无穷区间 $(-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，即全体实数的集合

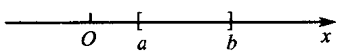

图 1-9

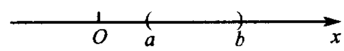

图 1-10

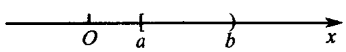

图 1-11

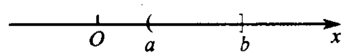

图 1-12

［例］ 用区间表示下列点集：

(1) $I_1 = \{x \mid |x+3| < 2\}$；(2) $I_2 = \{x \mid x^2 - x - 6 > 0\}$。

［解］ (1) 因为 $|x+3| < 2$

所以 $\qquad -2 < x+3 < 2$，即 $-5 < x < -1$

因此 I_1 用区间表示为 $I_1 = (-5,-1)$。

(2) 因为 $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

所以由 $x^2 - x - 6 > 0$ 得 $(x-3)(x+2) > 0$ 即

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x+2>0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x-3<0 \\ x+2<0 \end{cases}$$

解之得 $x > 3$ 或 $x < -2$，因此，I_2 用区间表示为

$$I_2 = (-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$$

四、邻域

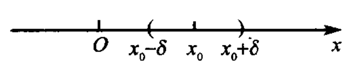

图 1-13

邻域是今后经常提到的概念。设 δ 是某个小的正数，则开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，简称邻域，x_0 称为邻域中心，δ 称为邻域半径。如图 1-13 所示。可用集合表示为

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x \mid |x-x_0| < \delta\}$$

如果在邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中去掉中心点x_0,则得到集合

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

称为x_0的空心的δ邻域,它是两个开区间的并集:

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

习题 1—2

1. 解下列不等式:

(1)$x^2<4$　　(2)$|x-4|<7$

(3)$0<(x-1)^2<4$　　(4)$\left|5-\frac{1}{x}\right|<1$

2. 用区间表示满足下列不等式的所有x的集合:

(1)$|x|\leqslant 2$　　(2)$|x-2|<3$

(3)$|2x+1|<1$　　(4)$|x-a|<\varepsilon$　(a为常数,$\varepsilon>0$)

(5)$x^2-4\leqslant 0$　　(6)$|x+2|>3$

(7)$x^2+x-12>0$　　(8)$a^2<x^2<b^2$　$(0<a<b)$

3. 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来:

(1)$A=\{x \mid |x-1|<2\}$　　(2)$B=\{x \mid 1<|x-2|<3\}$

1.3　函数的概念

函数是微积分研究的对象,是自然现象或技术过程中变量之间相互依存关系的数学抽象。

一、常量与变量

在自然现象或技术过程的观察研究中,常常遇到各种不同的量,其中有的量在过程中保持一定的数值不变,这种量叫做常量;还有一些量在过程中不断变化,可以取不同的数值,这种量叫做变量。

例如,一块金属受热膨胀时,金属的质量和分子数保持一定,它们是常量;而金属的温度和体积在变化,取得越来越大的数值,它们是变量。

一个量是常量还是变量,要看具体情况而定。例如,对小范围地区来说,重力加速度可以看作常量,但对广大地区来说,重力加速度是变量。

通常用a、b、c、d、n等符号表示常量,用x、y、u、v、t等符号表示变量。

二、函数的概念

定义 1.11　设D是一个给定的数集,x和y是两个变量。如果对于每个数$x\in D$,按照一定法则,变量y总有确定的数值与之对应,则称y是x的函数,记作$y=f(x)$。数集D叫做这个函数的定义域,x叫做自变量,y叫做因变量。

当x取数值$x_0\in D$时,与x_0相对应的y的数值称为函数$y=f(x)$在点x_0处的函数值,记作$f(x_0)$。当x取遍数集D的各个数值时,对应的函数值全体组成的集合$Z=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的值域。

函数$y=f(x)$中表示对应关系的记号f也可以改用其它字母,如“φ”,“F”,“g”等,这时函数记作$y=\varphi(x)$,$y=F(x)$,$y=g(x)$等。

如果自变量任取定义域内一个数值时，与之对应的函数值总是只有一个，则称这种函数为单值函数，否则称为多值函数。例如函数 $y=\pm x$ 就是一个多值函数。以后凡是无特别说明时，函数都是指单值函数。

在函数的概念中应注意以下 3 点：

(1) 构成函数的两个基本要素是：函数的定义域和对应关系，只要这两者确定了，一个函数就完全确定了。判别两个函数是否相同，也是看这两者是否完全相同，只有完全相同时，才是相同函数。

如 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$、$y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 都不是相同函数，而 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 就是相同函数。

(2) 函数定义域的确定是函数中的一个主要问题。确定定义域有两种类型，一种是在实际问题中完全由实际问题的条件确定；另一种是由一个数学式子表示的函数，要使函数有意义，必须通过计算求出定义域。

(3) 函数 $y=f(x)$ 中，f 表示的是函数符号，是一种对应关系。如 $y=x^2+2x+2$ 中，f 表示：$(\ )^2+2(\ )+2$，把这种关系作用于 x，即 $f(x)=(x)^2+2(x)+2$；作用于$\dfrac{1}{x}$，即 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{x}\right)+2$；作用于 1，即 $f(1)=(1)^2+2(1)+2=5$，表示 $y=x^2+2x+2$ 在 $x=1$ 处的函数值，也可记为 $y|_{x=1}=5$。

［例］ 已知 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$，求 $f(-x)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$f\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)$。

［解］ $f(-x)=(-x)^2-\dfrac{1}{(-x)}=x^2+\dfrac{1}{x}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{x^2}-x$$

$$f\left(x^2-\frac{1}{x}\right)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{\left(x^2-\frac{1}{x}\right)}=x^4-2x-\frac{1}{x^2(x^3-1)}$$

三、函数定义域的求法

求用数学式子表示的函数的定义域要遵循以下几个原则：

原则 1 分式的分母不为零。

［例 1］ 确定函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 的定义域。

［解］ 要使 y 有意义，则 $x^2-1\neq 0$

即 $x\neq\pm 1$ 的全体实数为所求定义域。也可用区间表示为

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

［例 2］ 确定函数 $y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$ 的定义域。

［解］ 要使 y 有意义，则 $x^2+x-2\neq 0$

即 $x\neq -2$ 且 $x\neq 1$ 的全体实数为所求定义域，也就是

$$D=(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$$