全国各类成人高考

专科起点升本科

高教最新版

KAOSHI

高等数学(一)应试模拟

本书编写组

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

全国各类成人高考专科起点升本科

高等数学(一)应试模拟

本书编写组

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国各类成人高考（专科起点升本科）高等数学（1）应试模拟 /《全国各类成人高考（专科起点升本科）高等数学（1）应试模拟》编写组．—北京：高等教育出版社，2002.8
ISBN 7－04－011294－9

Ⅰ.全… Ⅱ.全… Ⅲ.高等数学－成人教育：高等教育—试题 Ⅳ.O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 042886 号

全国各类成人高考专科起点升本科高等数学(一)应试模拟
本书编写组

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/16	版　　次	2002 年 8 月第 1 版
印　　张	7.5	印　　次	2002 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	11.40 元

出版前言

2002年，教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，其中专科起点升本科的复习考试大纲将全国统考科目调整为政治、英语、教育理论、大学语文、艺术概论、民法、高等数学(一)、高等数学(二)、生态学基础、医学综合等十科。

为了满足广大考生复习备考的需求，我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授以及前大纲编写修订和考试命题研究人员，编写了上述十门课程的复习考试辅导等系列教材。

本套书是与辅导教材配套的复习备考强化冲刺阶段用书。书中的模拟试卷严格按照考试大纲中规定的试卷内容比例、试卷题型比例、试卷难易比例编制，按考试科目独立编写成册，每册包含10套左右试卷，同时根据不同科目的特点，编写了"解题指导"等内容。

本套书的作者为编写"专升本"复习辅导教材的原班人马，对成人高考的教学与辅导均有深入研究，对成人高考的命题思路也多有了解。相信本套书的问世，将会对各类成人高考"专升本"考生检验自己的复习效果，进行考前"实战演练"提供更多帮助。

高等教育出版社

2002.6.26

目　录

模拟试卷(一)

一、选择题：本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 当 $x\to 0$ 时，$2x^2+3x$ 是 x 的

A. 高阶无穷小

B. 等价无穷小

C. 同阶无穷小，但不是等价无穷小

D. 低阶无穷小 ( )

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，$f'(x)>0$，则

A. $f(1)>f(0)$ B. $f(1)<f(0)$

C. $f(1)=f(0)$ D. $f(1)$ 与 $f(0)$ 的值不能比较 ( )

3. 设 $a=(1,2,-1)$，$b=(2,1,4)$，则 a 与 b 的夹角为

A. 0 B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$ ( )

4. 设 $z=x^2+y^2-2x-4y+a$，则点 $(1,2)$

A. 为 z 的极大值点 B. 为 z 的极小值点

C. 不为 z 的极值点 D. 是否为 z 的极值点与 a 有关 ( )

5. 设 y_1,y_2 为二阶线性常系数微分方程 $y''+p_1y'+p_2y=0$ 的两个特解，则 $C_1y_1+C_2y_2$

A. 为所给方程的解，但不是通解

B. 为所给方程的解，但不一定是通解

C. 为所给方程的通解

D. 不为所给方程的解 ( )

二、填空题：本大题共 10 个小题，10 个空，每空 4 分，共 40 分. 把答案填在题中横线上.

6. 设 $f(x+1)=3x^2+2x+1$，则 $f(x)=$ ________.

7. 设 $y=2^x\cdot x^2+\sin 2$，则 $y'=$ ________.

8. 函数 $y=x^3-2x+1$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值为 ____________.

9. $\int_0^1 x e^{x^2}\mathrm{d}x=$ ____________.

10. 设 $z=\sin\left(\frac{y}{x}+x^2\right)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ____________.

11. 微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解为 ________.

12. 过点 $M_0(1,-2,0)$ 且与直线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{1}$ 垂直的平面方程为 ____________.

13. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于 x 轴，则该切线方程为 ________________.

14. 广义积分 $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{3}}dx =$ ________.

15. 设区域 D 由 y 轴，$y=x$，$y=1$ 所围成，则 $\iint\limits_D x\,dx\,dy =$ ________.

三、解答题：本大题共 13 个小题，共 90 分，第 16 题～第 25 题每小题 6 分，第 26 题～第 28 题每小题 10 分. 解答时应写出推理、演算步骤.

16. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$.

17. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 1, \\ a, & x=1, \end{cases}$ 确定 a，使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续.

18. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+2y^3+2xy+3y-x=1$ 确定，求 y'.

19. 计算 $\int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

20. 设 x^2+x 为 $f(x)$ 的原函数，求 $\int_0^1 xf'(x)dx$.

21. 设 $z=2xy^2+y\sin x-x\cos y$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

22. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 的收敛性. 若其收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

23. 求 $\iint\limits_D (x+y)dx\,dy$，其中区域 D 是由曲线 $y=1+x^2$，$y=x^2$，$x=0$ 与 $x=1$ 所围成.

24. 求微分方程 $x^2y'+xy=1$ 的通解.

25. 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$x\geqslant \arctan x$.

26. 求由曲线 $y=3-x^2$，$y=2x$ 与 y 轴所围成的平面图形的面积及该封闭图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

27. 在曲线 $y=\sqrt{x}$ 上求一点 M_0，使该曲线过点 M_0 的切线平行于已知直线 $x-2y=5$，并求出相应的切线方程.

28. 将 $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$ 展开为 x 的幂级数.

模拟试卷(一)参考答案

一、选择题

1. C　2. A　3. D　4. B　5. B

二、填空题

6. $3x^2-4x+2$　　7. $2^x\cdot x^2\ln 2+2^{x+1}x$

8. 0　　9. $\dfrac{1}{2}(e-1)$

10. $\left(2x-\dfrac{y}{x^2}\right)\cos\left(\dfrac{y}{x}+x^2\right)$

11. $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

12. $3(x-1)-(y+2)+z=0$　(或 $3x-y+z=5$)

13. $y=f(1)$

14. $\frac{3}{2}$

15. $\frac{1}{6}$

三、解答题

16. **解**　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$=0.$$

17. **解**　欲使 $f(x)$在点 $x=1$ 处连续,必须有

$$\lim_{x\to 1}f(x) = f(1).$$

即

$$\lim_{x\to 1}(x^2+1) = a.$$

得

$$a = 2.$$

所以,当 $a=2$ 时,$f(x)$在点 $x=1$ 连续.

18. **解法 1**　将所给方程两端关于 x 求导,可得

$$2x + 6y^2\cdot y' + 2(y+xy') + 3y' - 1 = 0,$$

整理可得

$$y' = \frac{1-2x-2y}{6y^2+2x+3}.$$

解法 2　令 $F(x,y)=x^2+2y^3+2xy+3y-x-1$.

则

$$F'_x = 2x+2y-1,$$

$$F'_y = 6y^2+2x+3,$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$= -\frac{2x+2y-1}{6y^2+2x+3}.$$

19. **解法 1**　原式 $=\int\frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+x^2)$

$$=\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$$

解法 2　令 $u=1+x^2$,则 $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$.

$$原式 = \int \frac{1}{2} u^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}u$$
$$= \frac{3}{8} u^{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{3}{8}(1 + x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

注 丢常数 C 扣 1 分.

20. **解法 1** $\int x f'(x)\mathrm{d}x = x f(x) - \int f(x)\mathrm{d}x.$

由于 $x^2 + x$ 为 $f(x)$ 的原函数,因此 $f(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + x + C,$$

且 $f(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1,$

故 $\int_0^1 x f'(x)\mathrm{d}x = x(2x + 1)\Big|_0^1 - (x^2 + x)\Big|_0^1$

$= 1$

解法 2 由于 $x^2 + x$ 为 $f(x)$ 的原函数,因此

$$f(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1,$$
$$f'(x) = 2.$$
$$\int_0^1 x f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\mathrm{d}x$$
$$= x^2\Big|_0^1$$
$$= 1.$$

21. **解** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 + y\cos x - \cos y,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4y + \cos x + \sin y.$$

22. **解** 记 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right|,$

取 $v_n = \frac{1}{n}$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为发散级数.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

由正项级数的极限形式比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ 发散.

又由于 $u_{n+1} < u_n, n = 1, 2, \cdots$,且

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = 0,$$

由莱布尼茨定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ 收敛,从而知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ 收敛,且为条件

收敛.

23. **解** 积分区域 D 如图 1 所示.

D 可以表示为

$$0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2.$$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1+x^2} (x + y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{1+x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x + x^2 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

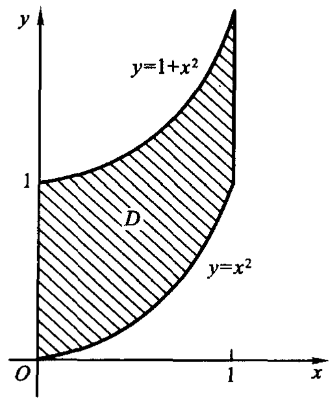

图 1

24. **解** 所给方程为一阶线性微分方程,化为标准形

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2},$$

其通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}\left[\int q\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right],$$

$$p = \frac{1}{x}, q = \frac{1}{x^2}.$$

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\ln x}\left[\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{x^2} \cdot x\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \frac{1}{x}(\ln x + C).
\end{aligned}
$$

25. **证法 1** 令 $f(x) = x - \arctan x$,

则
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{1 + x^2} \geqslant 0,$$

可知当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x)$ 单调增加.

又由于 $f(0) = 0$,

因此当 $x \geqslant 0$ 时,

$$f(x) \geqslant f(0) = 0, x - \arctan x \geqslant 0,$$

即
$$x \geqslant \arctan x.$$

证法 2 设 $y = \arctan u$,则对于任意 $x > 0$,y 在闭区间 $[0, x]$ 上连续,在开区间 $(0, x)$ 内可导,因此由拉格朗日中值定理可知,必定存在 $\xi \in (0, x)$,使得

$$\arctan x - \arctan 0 = \frac{1}{1 + \xi^2}(x - 0),$$

从而 $$\arctan x = \frac{x}{1+\xi^2} < x,$$

因此当 $x \geqslant 0$ 时，$x \geqslant \arctan x$.

26. 所给曲线围成的平面图形如图 2 所示.

解法 1 利用定积分求平面图形面积.

由于 $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = 2x \end{cases}$ 的解为 $x = 1, y = 2$,

可得知

$$S = \int_0^1 [(3 - x^2) - 2x] \mathrm{d}x$$

$$= \left(3x - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{3}.$$

$$V = \int_0^1 \pi [(3 - x^2)^2 - (2x)^2] \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^1 (9 - 6x^2 + x^4 - 4x^2) \mathrm{d}x$$

$$= \pi \left(9x - \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{88}{15}\pi.$$

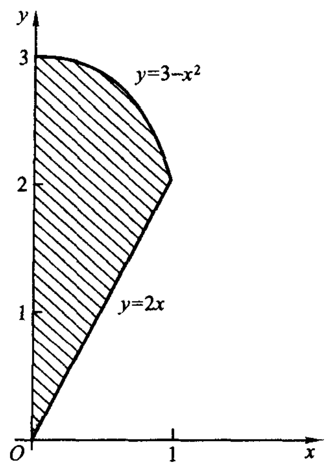

图 2

解法 2 利用二重积分求平面图形面积.

由于 $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = 2x \end{cases}$ 的解为 $x = 1, y = 2$,

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2x}^{3-x^2} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 [(3 - x^2) - 2x] \mathrm{d}x$$

$$= \left(3x - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{3}.$$

求旋转体体积与解法 1 同.

27. **解** 设点 M_0 的坐标为 $(x_0, \sqrt{x_0})$，由于

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$y'\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

已知直线 $x - 2y = 5$ 的斜率 $k = \frac{1}{2}$,

依题意应有

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2},$$

可解得 $$x_0=1,$$

因此 M_0 的坐标为(1,1).

相应的过点 $M_0(1,1)$的切线方程为

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$$

或 $x-2y+1=0$.

28. **解** $1+x-2x^2=(1+2x)(1-x)$

$\ln(1+x-2x^2)=\ln(1+2x)+\ln(1-x)$

$\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},-1<x<1;$

$\ln(1+2x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n}x^n,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},$

因此 $\ln(1+x-2x^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}2^n-1]\frac{1}{n}x^n,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$

模拟试卷(一)解题提示与分析

第 1 题考查的知识点为:无穷小阶的比较.

应依定义考察

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}(2x+3)=3.$$

由此可知,当 $x\to 0$ 时,$2x^3+3x$ 是 x 的同阶无穷小,但不是等价无穷小.故知应选 C.

本题应明确的是:考察当 $x\to x_0$ 时无穷小 β 为无穷小 α 的阶的关系时,是判定极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}$$

这里是以 α 为“基本量”,考生要特别注意此点,才能避免错误.有时考生考虑 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}$ 常引起错误.

第 2 题考查的知识点有两个:一是连续性与可导的关系;二是利用导数符号判定函数的单调性.

由于 $f(x)$在[0,1]上可导,可知 $f(x)$在[0,1]上连续.又由于在[0,1]上有 $f'(x)>0$,可知 $f(x)$在[0,1]上单调增加,从而知 $f(1)>f(0)$.故应选 A.

本题通常容易忽视连续性与可导的关系.如果将所给问题改变为:“设函数 $f(x)$在区间[0,1]上有定义,$f(x)$在(0,1)内可导,$f'(x)>0$,则

A. $f(1)>f(0)$.　　B. $f(1)<f(0)$.

C. $f(1)=f(0)$.　　D. $f(1)$与 $f(0)$的值不能比较.”

读者对照原题可以发现,这里 $f(x)$在(0,1)内可导,而不是[0,1]上可导.仅仅改变了函数 $f(x)$在区间端点的可导性,但是本题应该选 D.这是因为 $f(x)$在(0,1)内可导,可以知道 $f(x)$

在(0,1)内连续. 在(0,1)内有 $f'(x)>0$,表示 $f(x)$在(0,1)内单调增加,这些结论都不能判定 $f(1)$与 $f(0)$的值的大小,因此应选 D.

为了防范错误的出现,应该注意题目中条件的提法及解题中起到了什么作用.

第 3 题考查的知识点为:两个向量之间的关系.

欲求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,应依夹角余弦公式求解.

由于

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},\quad \boldsymbol{a} = (1,2,-1),\boldsymbol{b} = (2,1,4),$$

因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 4=0$,

可知 $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$,故应选 D.

第 4 题考查的知识点为:二元函数的极值.

其求解的一般步骤为:先求出函数的一阶偏导数,令两个偏导数等于零,确定函数的驻点. 再求函数的二阶偏导数. 依极值的充分条件来判定所求驻点是否为极值点.

由于 $z=x^2+y^2-2x-4y+a$,可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x-2=0,\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y-4=0,\end{cases}$$

解得 z 有唯一驻点 $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$. 即点(1,2)为驻点. 又由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,2)} = 2,\quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,2)} = 0,\quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,2)} = 2.$$

$$B^2-AC=-4<0, A=2>0,$$

由极值的充分条件可知点(1,2)为 z 的极小值点,故应选 B.

由于本题的特殊性,也可以利用初等数学知识判定. 注意到

$$\begin{aligned} z &= x^2+y^2-2x-4y+a \\ &= (x-1)^2+(y-2)^2+(a-5), \end{aligned}$$

可知当 $x=1,y=2$ 时,函数 z 取得最小值,因此点(1,2)为 z 的极小值点.

第 5 题考查的知识点为:线性常系数微分方程解的结构.

已知 y_1,y_2 为二阶线性常系数齐次微分方程 $y''+p_1y'+p_2y=0$ 的两个解,由解的结构定理可知 $C_1y_1+C_2y_2$ 为所给方程的解,因此应排除 D. 又由解的结构定理可知,当 y_1,y_2 线性无关时,$C_1y_1+C_2y_2$ 为 $y''+p_1y'+p_2y=0$ 的通解,因此应该选 B.

本题中常见的错误是选 C. 这是由于忽略了线性常系数方程解的结构定理中的条件所导致的错误. 解的结构定理中指出:"若 y_1,y_2 为二阶线性常系数微分方程 $y''+p_1y'+p_2y=0$ 的两个线性无关的特解,则 $C_1y_1+C_2y_2$ 为所给微分方程的通解,其中 C_1,C_2 为任意常数". 由于所给命题中没有指出 y_1,y_2 为线性无关的特解,可知 $C_1y_1+C_2y_2$ 不一定为方程的通解. 但是由解的结构定理知 $C_1y_1+C_2y_2$ 为方程的解,因此应选 B.

第 6 题考查的知识点为：函数符号的运用.

这类问题通常有两种解法.

解法 1 引入令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，由所给函数表达式可得

$$f(t)=3(t-1)^2+2(t-1)+1=3t^2-4t+2,$$

因此 $f(x)=3x^2-4x+2$.

解法 2 将所给函数表达式右端化为$(x+1)$的表达式，可得

$$\begin{aligned}f(x+1)&=3x^2+2x+1\\&=3(x^2+2x+1)-6x-3+2x+1\\&=3(x+1)^2-4x-2\\&=3(x+1)^2-4(x+1)+2,\end{aligned}$$

因此 $f(x)=3x^2-4x+2$.

第 7 题考查的知识点为：初等函数的求导运算.

本题需利用导数的四则运算法则求解.

$$\begin{aligned}y'&=(2^x\cdot x^2+\sin 2)'=(2^x)'\cdot x^2+2^x\cdot(x^2)'+(\sin 2)'\\&=2^x\ln 2\cdot x^2+2^x\cdot 2x\\&=2^x\cdot x^2\ln 2+x\cdot 2^{x+1}.\end{aligned}$$

本题中常见的错误有两种：

1°. $(2^x\cdot x^2)'=(2^x)'\cdot(x^2)'=2^x\ln 2\cdot(2x)=x\cdot 2^{x+1}\cdot\ln 2$.

这是由于忘记了求导数的乘法规则

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

2°. $(\sin 2)'=\cos 2$.

这是由于误将 $\sin 2$ 认作 $\sin x$，事实上 $\sin 2$ 为一个常数，而常数的导数为 0，即

$$(\sin 2)'=0.$$

相仿

$(\cos 3)'=0,(\ln 5)'=0,(e^{\frac{1}{2}})'=0$ 等等.

请考生注意，不论以什么函数形式出现，只要是常数，它的导数必定为 0.

第 8 题考查的知识点为：连续函数在闭区间的最小值问题.

通常求解的思路为：

先求出连续函数 $f(x)$在(a,b)内的所有驻点 $x_1,\cdots,x_k$.

比较 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_k),f(a),f(b)$，其中最大(小)值即为 $f(x)$在$[a,b]$上的最大(小)值，相应的 x 即为$f(x)$在$[a,b]$上的最大(小)值点.

由于 $y=x^3-2x+1$，可得

$$y'=3x^2-2,$$

令 $y'=0$ 得 y 的驻点为$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$，所给驻点皆不在区间(1,2)内，且当 $x\in(1,2)$时有

$$y'=3x^2-2>0,$$

可知 $y=x^3-2x+1$ 在$[1,2]$上为单调增加函数，最小值点为 $x=1$，最小值为 $f(1)=0$.

注 也可以比较 $f(1),f(2)$直接得出其中最小者，即为 $f(x)$在$[1,2]$上的最小值.

本题中常见的错误是,得到驻点 $x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ 和 $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 之后,不讨论它们是否在区间(1,2)内,而是错误地比较

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right),f(1),f(2)$$

从中确定 $f(x)$在[1,2]上的最小值.则会得到错误结论.

第 9 题考查的知识点为:定积分计算.

可以利用变量替换,令 $u=x^2$,则 $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$,当 $x=0$ 时,$u=0$;当 $x=1$ 时,$u=1$.因此

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{e}^u\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

或利用凑微分法

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

本题中考生常在最后由粗心而出现错误.如

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\mathrm{e},$$

这里 $\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}-1$ 中丢掉第二项.

第 10 题考查的知识点为:二元函数的偏导数计算.

可以令 $u=\frac{y}{x}$,得 $z=\sin u$,由复合函数偏导数的链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\cos u\cdot\left(\frac{-y}{x^2}+2x\right)$$

$$=\left(2x-\frac{y}{x^2}\right)\cos\left(\frac{y}{x}+x^2\right).$$

第 11 题考查的知识点为:二阶线性常系数齐次微分方程的求解.

二阶线性常系数齐次微分方程求解一般步骤为:先写出特征方程,求出特征根,写出方程通解.

微分方程为　$y''+y'+y=0$,

特征方程为　$r^2+r+1=0$,

特征根　$r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,

因此所给微分方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

第 12 题考查的知识点为:平面与直线的方程.

由题设条件可知应该利用点法式方程确定所求平面方程.

所给直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(3,-1,1)$.若所求平面 π 垂直于直线 l,则平面 π 的法线向量 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s}$,不妨取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=(3,-1,1)$.则由平面的点法式方程可知

$$3(x-1)-[y-(-2)]+(z-0)=0,$$

即 $$3(x-1)-(y+2)+z=0$$
为所求平面方程.

或写为　$3x-y+z-5=0$.

上述两个结果都正确,前者 $3(x-1)-(y+2)+z=0$ 称为平面的点法式方程.而后者 $3x-y+z-5=0$ 称为平面的一般式方程.

第13题考查的知识点为两个:一是导数的几何意义,二是求切线方程.

设切点为$(x_0,f(x_0))$,则曲线 $y=f(x)$过该点的切线方程为
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

由题意可知 $x_0=1$,且在$(1,f(1))$处曲线 $y=f(x)$的切线平行于 x 轴,因此应有 $f'(x_0)=0$,故所求切线方程为
$$y-f(1)=0.$$

本题中考生最常见的错误为:将曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程写为
$$y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)$$
而导致错误.本例中写为
$$y-f(1)=f'(x)(x-1).$$

本例中由于 $f(x)$为抽象函数,考生中一些人不习惯于写 $f(1)$,有些人误写为切线方程为
$$y-1=0.$$

第14题考查的知识点为:广义积分.

应依广义积分定义求解.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}x^{-\frac{5}{3}}\mathrm{d}x&=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\frac{5}{3}}\mathrm{d}x\\&=\lim_{b\to+\infty}\frac{-3}{2}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_1^b\\&=\lim_{b\to+\infty}\frac{-3}{2}(b^{-\frac{2}{3}}-1)\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

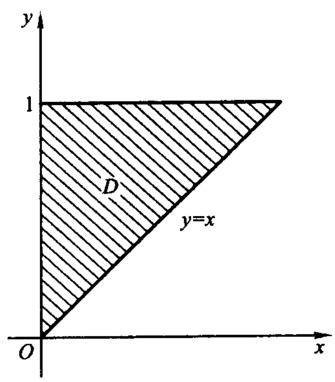

图 3

第15题考查的知识点为:计算二重积分.

其积分区域如图3所示.

应将二重积分化为二次积分解之.

解法1　化为先对 y 积分,后对 x 积分的二次积分.

作平行于 y 轴的直线与区域D 相交,沿 y 轴正向看,入口曲线为 $y=x$,作为积分下限;出口曲线为 $y=1$,作为积分上限,因此
$$x\leqslant y\leqslant 1.$$
区域 D 在 x 轴上的投影最小值为 $x=0$,最大值为 $x=1$,因此
$$0\leqslant x\leqslant 1.$$

可得知

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_x^1 x\,dy$$

$$= \int_0^1 xy\Big|_x^1 dx = \int_0^1 x(1-x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

解法 2 化为先对 x 积分，后对 y 积分的二次积分.

作平行于 x 轴的直线与区域 D 相交，沿 x 轴正向看，入口曲线为 $x=0$，作为积分下限；出口曲线为 $x=y$，作为积分上限，因此

$$0 \leqslant x \leqslant y.$$

区域 D 在 y 轴上投影的最小值为 $y=0$，最大值为 $y=1$，因此

$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

可得知

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 dy\int_0^y x\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\Big|_0^y dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 dy$$

$$= \frac{1}{6}y^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

本题中将二重积分化为二次积分时，最常见的错误为

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^x x\,dy.$$

如图 4 所示. 上式右端的二次积分实质上应等于 $\iint_{D_1} x\,dx\,dy$，而不等于 $\iint_D x\,dx\,dy$.

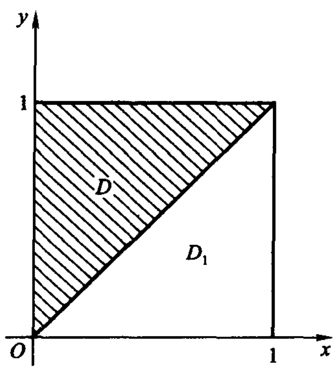

图 4

第 16 题考查的知识点为：用洛必达法则求极限.

由于问题为"$\infty - \infty$"型极限问题，应先将求极限的函数通分，使所求极限化为"$\frac{0}{0}$"型问题.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x\tan x},$$

如果将上式右端直接利用洛必达法则求之，则运算复杂. 注意到使用洛必达法则求极限时，如果能与等价无穷小代换相结合，则问题常能得到简化，由于当 $x\to 0$ 时，$\tan x \sim x$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2x\cos^2 x},$$