酷龙书系

黄冈、启东、海淀百位名师鼎力打造

让你0距离感受特级教师的指导

全程攻略

高考数学

命题动向

专题例析

专题练习

全真模拟

解读最新考试说明

透析最准命题走势

把握最精高考试题

设计最佳复习攻略

中国和平出版社

前　言

为了适应高中、初中升学考试改革的需要，我们特邀请了一批来自全国名校教学第一线的名师和多年从事高考、中考研究工作的专家学者编写了这套《全程攻略》丛书。这套书的特点是：虚实结合、突出实战、针对性强、代表性广、权威性高，涵盖前沿信息、一线资料丰富。

本丛书分高中、初中两个部分。均按复习备考全过程由浅到深，分步编写，以利大家学习。全书力求体现现行的高考《考试说明》精神和全国中考形势的共同要求。

其一，介绍了高考、中考命题形势，以备考生明确复习方向。

其二，从教与学和备考的实际出发，编写了专题学习资料（按考点，结合实例对各科复习考试的范围、重点、难点、疑点作了讲析；同时设置了专题训练），以备考生理清高考、中考知识能力体系的脉络，打好复习备考的基础。

其三，针对各专题编写了强化训练题，并附有名师较详细的题解分析。

其四，综合能力检测训练，对学科内和学科间的知识点、能力点作综合的检测，以提高和检测各学科实际掌握的水准。这部分内容从全国名校组稿，实际上就是升学考试的模拟试卷。

基于此，我们相信只要这一套《全程攻略》丛书在手，认真研读思考，认真独立演练，做到融会贯通必考知识，熟练掌握必考能力，必将夺取高考或中考的最终胜利。

本套丛书，高中部分共9种：语文、数学、英语、政治、历史、地理、物理、化学、生物。初中部分共6种：语文、数学、英语、物理、化学、政治。各自独立成册。

由于时间仓促，书中疏漏难免，敬请批评指正。

本丛书编委会

目　录

第一部分　命题动向

第二部分　专题例析

第三部分　专题练习

第四部分 全真模拟

一、近年高考常考知识点

(一) 简易逻辑

一、概述

简易逻辑是教材中新增内容之一．本节只按排了一些简易的逻辑知识，在学习中，要通过对数学知识的说明，解决一些简单的问题，达到理解、掌握简易逻辑知识的目的．

本章的重点是：逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义，四种命题及其相互关系．充分条件、必要条件、充要条件的含义．

本章的难点是：理解反证法的推理依据及方法．理解并掌握充分条件、必要条件的判断方法．

二、例析

例 1 分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题，并指出复合命题的真假．

(1)5 和 7 是 35 的约数

(2)菱形的对角线互相垂直平分

(3)$8x-5<2$ 无自然数解

【解】(1)是"p 或 q"的形式．其中 p：5 是 35 的约数；q：7 是 35 的约数，为真命题．

(2)是"p 且 q"的形式，其中 p：菱形的对角线互相垂直；q：菱形的对角线互相平分；为真命题．

(3)是"$\neg p$"的形式．其中 p：$8x-5<2$ 有自然数解．∵ p：$8x-5<2$ 有自然数解．如 $x=0$，则为真命题．故"$\neg p$"为假命题．

点评：分析复合命题的构成，要重视理解逻辑联结词在复合命题中的不同表达方式．

例 2 写出命题 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 3$，则 $x+y\geqslant 5$ 的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假．

【解】原命题是真命题．

逆命题是：$x+y\geqslant 5$，则 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 3$，为假命题．

否命题是：$x<2$ 或 $y<3$，则 $x+y<5$，为假命题．

逆否命题是：$x+y<5$，则 $x<2$ 或 $y<3$，为真命题．

点评：注意"p 或 q"的否定是"$\neg p$ 且 $\neg q$"，"p 且 q"的否定是"$\neg p$ 或 $\neg q$"．在否命题中的准确运用．

例 3 如果一个整数 n 的平方是偶数，那么这个整数 n 本身也是偶数，试证之．

分析：由"整数 n 的平方是偶数这个条件，很难直接证明"这个整数 n 本身也是偶数"这个结论成立．因此考虑用反证法证明．

证明．假设整数 n 不是偶数，那么 n 为奇数，可以写成：$n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$

则 $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$

∵ $k\in\mathbf{Z}$．

∴ $2k^2+2k\in\mathbf{Z}$ 则 $2(2k^2+2k)$ 为偶数

那么 $2(2k^2+2k)+1$ 为奇数

∴ n^2 为奇数．

但这与已知条件矛盾，则假设不成立，故 n 是偶数．

点评：否定结论是反证法的第一步，能否导致矛盾是反证法的关键，一般通过推理导致以下矛盾之一即可：(1)与已知条件矛盾，(2)与定义、定理、公理矛盾，(3)与客观事实矛盾，(4)自相矛盾．

例 4 (1)$xy>0$ 的一个充分不必要条件是________．

(2)$x<0$ 的一个必要而不充分条件是________．

【解】(1)$xy>0$ 的一个充分而不必要条件是 $x>0$ 且 $y>0$．

(2)$x<0$ 的一个必要不充分条件是 $x<2$．

点评：本题有两点需要注意 (1)读题，分清须要找的条件与结论，尤其是题目中有"条件是"三个字，给出要填写的是条件 (2)本题答案不惟一，是一个开放性命题．

例 5 已知：p：$a>2$ 且 $b>2$，q：$a+b>4$ 且 $ab>4$，则 p 是 q 的 ( )

(A)充分不必要条件

(B)必要不充分条件

(C)充分必要条件

(D)既不充分又不必要条件

【解】由 $a>2$ 且 $b>2$ 可得 $a+b>4$ 且 $ab>4$，反之，若取 $a=2$ 且 $b=3$，则有 $a+b=5>4$．

且 $ab=6>4$ 但 $a=2$ 不满足 p，所以 p 是 q 的充分不必要条件．

答案：A **点评**：此题有典型性，学生由于形式上受 $a>0$ 且 $b>0\Leftrightarrow a+b>0$ 且 $ab>0$ 的影响，往往以为 $a>2$ 且 $b>2\Leftrightarrow a+b>4$ 且 $ab>4$．

练习一

一、选择题

1. 命题"菱形的对角线互相垂直平分"是 ( )
   (A)简单命题 (B)非 p 形式
   (C)p 且 q 形式 (D)p 或 q 形式
2. 命题"两条对角线不相等的四边形不是平行四边形"是命题"若四边形是平行四边形，则它的两条对角线相等"的 ( )
   (A)逆命题 (B)否命题
   (C)逆否命题 (D)非四种命题关系
3. $(x-3)(y+4)=0$ 是 $(x-3)^2+(y+4)^2=0$ 的 ( )
   (A)充分不必要条件 (B)必要不充分条件
   (C)充要条件 (D)既不充分也不必要条件
4. 有下列四个命题：
   (1)"若 $b=3$，则 $b^2=9$"的逆命题
   (2)"全等三角形的面积相等"的否命题
   (3)"若 $c\leqslant 1$，则 $x^2+2x+c=0$ 有实根"
   (4)"若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$"的逆否命题
   本中真命题的个数是 ( )
   (A)1 个 (B)2 个
   (C)3 个 (D)0 个
5. 设甲、乙、丙是三个命题，如果甲是乙的必要条件，丙是乙的充分不必要条件，那么 ( )
   (A)丙是甲的充分不必要条件
   (B)丙是甲的必要不充分条件
   (C)丙是甲的充要条件

(D)丙是甲的既不充分也不必要条件

6. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-6x+8\leqslant 0\}$，则 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的 ( )

(A)充分不必要条件

(B)必要不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

二、填空题

7. 给出下列命题：

(1)梯形不是平行四边形

(2)等腰三角形两底角相等

(3)矩形的对角线相等且互相平分

(4)12 是 24 和 36 的公约数

(5)正数或 0 的平方数是实数

(6)$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形

其中简单命题是________

8. 用适当的符号填空($\Rightarrow$，$\Leftarrow$，$\Leftrightarrow$)

(1)$x+y=0$ ________ x，y 互为相反数

(2)$x+1>x$ ________ $x\in\mathbf{R}$

(3)$A=B$ ________ $A\subseteq B$

(4)$a>0$ ________ $a>1$

(5)$p\Rightarrow q$ ________ 非 $q\Rightarrow$ 非 p

三、解答题

9. 设原命题是“若 $x=1$，或 $x=-2$，则 $x^2+x-2=0$”试写出它的其它三个命题，并判断其真假.

10. 求证：在同一平面内，一条直线如果与两条平行直线中的一条相交，则它与另一条也相交.

(二) 指数函数和对数函数

一、概述

函数是高中数学的核心内容，在高考中，函数知识占有极其重要的地位，以 2001 年全国高考数学试题为例，函数部分所占分值约为 34 分，重点考查集合的有关概念及运算、映射及函数的概念、函数的性质、函数的图象及反函数等.

函数这一章，几乎涉及到中学数学里的所有的数学思想方法，学会用数学思想方法思考和解决问题，才能更深刻地理解数学的本质.

高考试卷中经常将函数与方程、不等式、数列有机结合，进行综合考查，体现了在知识的交汇点命题的思想，强调知识的综合和知识的内在联系.

在复习时，要熟练、全面的掌握基础知识，注意本章和学科内知识的相互联系，注意数学思想方法的运用，在学习中，做到举一反三. 抓住问题的实质，找出解决问题的策略，提高能力.

二、例析

例 1 (2003 年上海高考题)

$f(x)$是定在区间$[-c,c]$上的奇函数，其图象如图 1-1 所示，令 $g(x)=(-c)+b$，则下列关于函数$g(x)$的叙述正确的是 ( )

(A)若 $a<0$，则函数 $g(x)$的图象关于原点对称.

(B)若 $a=-1$，$-2<b<0$，则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实数.

(C)若 $a\neq 0$，$b=2$，则方程 $g(x)=0$ 有两个实根.

(D)若 $a>1$，$b<2$，则方程 $g(x)=0$ 有三个实根.

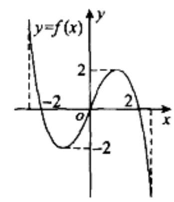

图 1-1

【解】A 因为 $g(x)=-af(x)+b$，所以，只有 $b=0$ 时，$g(-x)=-g(x)$，函数 $g(x)$的图象才关于原点对称. B、C、D 都是对 $g(x)=0$ 的根的情况分析，即分析 $f(x)=\dfrac{b}{a}$的根，即分析 $y=f(x)$与 $y=\dfrac{b}{a}$两函数图象的交点. 根据 a、b 的范围，在原图中画出直线$y=\dfrac{b}{a}$的范围即可.

答案:B

点评:深刻理解方程的根与函数图象交点的必然联系，这是数形结合思想的重要体现.

例 2 (2002 年全国高考试题)

设集合 $M=\{x\mid x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则 ( )

(A)$M=N$　(B)$M\subset N$

(C)$M\supset N$　(D)$M\cap N=\varnothing$

【解】对于集合 M，$x=\dfrac{2k+1}{4}$，对于集合 N，$x=\dfrac{k+2}{4}$，由于 $k+2$ 表示全体整数，而 $2k+1$ 表示奇数，因此有 $M\subset N$.

答案:B **点评:**本题主要考查集合的表示，集合间的关系，要求有一定的变形能力，概念要清晰准确.

例 3 (2001 年全国高考题)

若定义在区间$(-1,0)$内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足 $f(x)>0$，则 a 的取值范围是 ( )

(A)$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　(B)$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

(C)$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　(D)$(0,+\infty)$

【解】由已知，$x\in(-1,0)$，可得 $x+1\in(0,1)$. 由 $f(x)>0$，得 $0<2a<1$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$.

答案:A

点评:本题考查函数的定义域及对数函数的性质，要求对知识有较透彻的理解，在解答时，可结合对数函数的图象.

例 4 (2002 年北京高考试题)

已知 $f(x)$是定义在$(-3,3)$上的奇函数，当 $0<x<3$时，$f(x)$的图象如图 1-2 所示，那么不等式 $f(x)\cos x<0$的解集是 ( )

(A)$\left(-3,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},3\right)$

(B)$\left(-\dfrac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},3\right)$

(C)$(-3,-1)\cup(0,1)\cup(1,3)$

(D) $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup(1,3)$

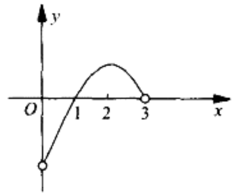

图 1-2

【解】结合 $f(x)$ 的图象和 $y=\cos x$ 的图象可知，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$，$\cos x>0$. 当 $x\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$，$\cos x>0$. 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ 时，$f(x)>0$，$\cos x<0$.

因此当 $x\in(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ 时，$f(x)\cos x<0$，由于 $y=\cos x$ 为偶函数，所以函数 $y=f(x)\cos x$ 是奇函数，由对称性可得当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$ 时，$f(x)\cos x<0$.

答案:B

点评：函数的图象是研究函数的重要工具，通过观察函数的图象，可以形象地揭示函数的有关性质，同时又能利用数形结合的方法去解决问题. 高考中函数图象的考查主要是基本初等函数的图象和函数的图象变换，如下面一例主要考函数的图象变换：

例 5 (2001 年全国高考试题)

设 $f(x)$、$g(x)$ 都是单调函数，有如下四个命题：

①若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；

②若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；

③若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减；

④若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减；

其中，正确的命题是 ( )

(A)①③ (B)①④

(C)②③ (D)②④

【解】利用 $g(x)$ 与 $-g(x)$ 单调性相反.

答案:C

点评：对函数的单调性、周期性、奇偶性的考查，历来是高考的热点，是必考的内容，考查方式也较灵活，再看下面几个例题：

例 6 (2002 年北京高考试题)

已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的不恒为零的函数，且对于任意的 a、$b\in\mathbf{R}$ 都满足：

$$f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$$

(Ⅰ)求 $f(0)$，$f(1)$ 的值；

(Ⅱ)判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

(Ⅲ)若 $f(2)=2$，$u_n=\frac{f(2^{-n})}{n}(n\in\mathbf{N})$，求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n.

【解】(Ⅰ) $f(0)=f(0\cdot0)=0\cdot f(0)+0\cdot f(0)=0$

因为 $f(1)=f(1\cdot1)=1\cdot f(1)+1\cdot f(1)$，

所以 $f(1)=0$.

(Ⅱ) $f(x)$ 是奇函数.

证明：

因为 $f(1)=f[(-1)^2]=-f(-1)-f(-1)=0$

所以 $f(-1)=0$，

$$f(-x)=f(-1\cdot x)=-f(x)+xf(-1)=-f(x)$$

因此，$f(x)$ 为奇函数.

(Ⅲ)解法一：由 $f(a^2)=af(a)+af(a)=2af(a)$，

$f(a^3)=a^2\cdot f(a)+af(a^2)=3a^2\cdot f(a)$，

猜测 $f(a^n)=n\cdot a^{n-1}f(a)$.

下面用数学归纳法证明：

1°. 当 $n=1$ 时，$f(a^1)=1\cdot a^0\cdot f(a)$，公式成立；

2°. 假设当 $n=k$ 时，$f(a^k)=ka^{k-1}f(a)$ 成立；

那么当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}f(a^{k+1})&=a^k\cdot f(a)+af(a^k)\\&=a^k\cdot f(a)+k\cdot a^k\cdot f(a)\\&=(k+1)a^k\cdot f(a)\text{，公式仍成立.}\end{aligned}$$

由上两步可知，对任意 $n\in\mathbf{N}$，$f(a^n)=na^{n-1}\cdot f(a)$ 成立.

所以 $u_n=\frac{f(2^{-n})}{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$.

因为 $f(2)=2$，

$$f(1)=f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f(2)=0,$$

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}f(2)=-\frac{1}{2}$，

$$u_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}),$$

因此

$$S_n=\frac{-\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\qquad(n\in\mathbf{N})$$

解法二：当 $ab\neq0$ 时，

$$\frac{f(a\cdot b)}{ab}=\frac{f(b)}{b}+\frac{f(a)}{a},$$

令：$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g(a\cdot b)=g(a)+g(b)$.

故 $g(a^n)=ng(a)$.

所以 $f(a^n)=a^n\cdot g(a^n)=na^ng(a)=na^{n-1}\cdot f(a)$

所以 $u_n=\frac{f(2^{-n})}{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(以下同解法一).

点评：本小题主要考查函数与数列等基本知识，在高考试题中，经常出现函数、数列、不等式相结合的综合性题目.

例 7 (2001 年全国高考试题)

设计一幅宣传画，要求画面面积为 4840cm^2，画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$，画面的上、下各留 8cm 的空白，左、右各留 5cm 空白，怎样确定画面的高与宽尺寸，能使宣传画所用纸张面积最小?

【解】设画面高为 $x$cm，宽为 λxcm，则

$$\lambda x^2=4840$$

设纸张面积为 S，有

$$\begin{aligned}S&=(x+16)(\lambda x+10)\\&=\lambda x^2+(16\lambda+10)x+160\end{aligned}$$

将 $x=\frac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}$ 代入上式，得

$$S=5000+44\sqrt{10}\left(8\sqrt{\lambda}+\frac{5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

当 $8\sqrt{\lambda}=\frac{5}{\sqrt{\lambda}}$，即 $\lambda=\frac{5}{8}$（$\frac{5}{8}<1$）时，S 取得最小值.

此时，高：$x=\sqrt{\frac{4840}{\lambda}}=88$cm

宽：$\lambda x=\frac{5}{8}\times 88=55$cm.

答：画面高为 88cm，宽为 55cm 时，能使所用纸张面积最小.

点评：本题主要考查建立函数关系式，求函数最小值的方法，在高考试题中经常出现以函数为载体的应用题，并可将求函数的极值、不等式的有关知识等嵌入其中，要注意知识的灵活运用.

练习二

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid m+1<x<2m-1\}$ 且 $B\neq 0$，若 $A\cup B=A$，则　（　）

(A) $-3\leqslant m\leqslant 4$　(B) $-3<m<4$
(C) $2<m<4$　(D) $2<m\leqslant 4$

2. 集合 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{-1, 0, 1\}$，从 A 到 B 的映射 f 满足条件 $f(a)=f(b)+f(c)$，那么这样的映射 f 的个数是　（　）

(A)2　(B)7
(C)5　(D)4

3. 某厂日产手套的总成本 y(元)与手套日产量 x(双)的关系为 $y=5x+4000$，而手套出厂价格为每双 10 元，则该厂为了不亏本，日产手套至少为　（　）

(A)200 双　(B)400 双
(C)600 双　(D)800 双

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$，则函数 $f[f(x)]$ 的定义域为　（　）

(A) $\{x\mid x\neq -1\}$
(B) $\{x\mid x\neq -2\}$
(C) $\{x\mid x\neq -1$ 且 $x\neq -2\}$
(D) $\{x\mid x\neq -1$ 或 $x\neq -2\}$

5. 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{|x|}$，对于 $f(x)$ 的图象，下列说法正确的是　（　）

(A)图象上离 x 轴最近的点只有一点，这一点是 $\left(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(B)图象上离 x 轴最近的点只有两点，这两点是 $\left(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ 和 $\left(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(C)图象上离 x 轴最远的点只有一点，这一点是 $\left(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(D)图象上离 x 轴最远的点有两点，这两点是 $\left(2\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ 和 $\left(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

6. 已知 $f(x^6)=\log_2 x$，那么 $f(8)$ 等于　（　）

(A) $\frac{4}{3}$　(B)8　(C)18　(D) $\frac{1}{2}$

7. 一组实验数据如下表：

t	1.02	1.99	3.01	4.0	4.98	6.12
v	0.01	1.5	4.04	7.5	12	18.01

则下列四个关系中，最接近实验数据的表达式（所谓最接近实验数据的表达式是指，将表中各组数据代入表达式后，等式左右两边值的差的绝对值均不超过 1）为　（　）

(A) $v=\log_2 t$　(B) $t\cdot 2^v=1$
(C) $2v=t^2-1$　(D) $v+2=2t$

8. 对函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 作 $x=h(t)$ 的代换，则总不改变函数 $f(x)$ 的值域的代换是　（　）

(A) $h(t)=10^t$　(B) $h(t)=t^2$
(C) $h(t)=\sin t$　(D) $h(t)=\log_2 t$

9. 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 a、b 都有 $f(a)+f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f\left(\frac{a-b}{2}\right)$，且 $f(0)\neq 0$，则 $f(x)$　（　）

(A)是奇函数但不是偶函数
(B)是偶函数但不是奇函数
(C)既是奇函数又是偶函数
(D)既非奇函数也非偶函数

10. 同时具有下列三个性质：

①图象过点(0, 1)；
②当 $x\in(0, +\infty)$ 时，函数单调递减；
③是偶函数.

这样的函数可能是　（　）

(A) $y=x^{\frac{2}{3}}+1$　(B) $y=\log_3|x|$
(C) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$　(D) $y=3^{|x|}$

11. 已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，把 $y=f(x)$ 的图象在坐标平面内绕原点按顺时针方向旋转 90°，得到另一个函数的图象，则这个函数是　（　）

(A) $y=-f^{-1}(x)$　(B) $y=-f^{-1}(-x)$
(C) $y=f^{-1}(x)$　(D) $y=f^{-1}(-x)$

二、填空题

12. 如图 1-3 中是定义在 **R** 上的减函数 $y=f(x-1)$ 的图象，给出下列四个结论：

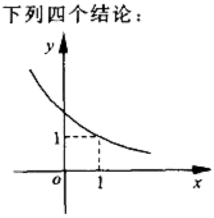

图 1-3

① $f(0)=1$　② $f(0)<1$
③ $f^{-1}(1)=0$　④ $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)>0$

其中所有正确结论的序号是________

13. 已知函数 $f(x)$ 满足：对任意实数 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，且 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$. 写出一个满足上述条件的函数：________

14. 当 $x^2+x\leqslant 0$ 时，函数 $y=2^{x+2}-3\cdot 4^x$ 的最大值和最小值分别是________.

15. 某种储蓄的月利率是 0.8%，存入 100 元本金后，本息和 y(元)与所存月数 x 之间的函数关系式为________.

三、解答题

16. 设 $a>0$，$f(x)=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

17. 定义在实数集上的函数 $f(x)$，对任意 x、$y\in\mathbf{R}$，有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，且 $f(0)\neq 0$.

(Ⅰ)求证：$f(0)=1$；

(Ⅱ)求证：$y=f(x)$是偶函数；

(Ⅲ)若存在常数 c，使 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$；①求证对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+c)=-f(x)$成立；

②试问函数 $f(x)$是不是周期函数，如果是，找出它的一个周期；如果不是，请说明理由.

18. 是否存在实数 a，使函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x)$在区间$[2,4]$上是增函数？如果存在，说明 a 可取哪些值；如果不存在，请说明理由.

19. 设 $f(x)=2^x+\frac{a}{2^x}-1$(a 为实常数).

(Ⅰ)当 $a<0$ 时，用函数的单调性定义证明：$y=f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

(Ⅱ)当 $a=0$ 时，若函数 $y=g(x)$的图象与 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，求函数 $y=g(x)$的解析式；

(Ⅲ)当 $a<0$ 时，求关于 x 的方程 $f(x)=0$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上的解.

20. 某电子公司产品经销公司针对市场上某种电子产品的销售趋势，决定对原来以每件 5500 元出售的该电子产品进行调价，并按新单价 8 折让利销售，结果每件仍获得实际销售价 45% 的利润，已知该产品每件成本是原销售价的 60%.

(Ⅰ)求调价后的新价每件多少元？让利后的实际销售价是每件多少元？

(Ⅱ)为使全年按新单价让利销售后的利润总额不低于 200000 元，全年至少应销售这种电子产品多少件？(注：每件利润＝每件实际售价－每件成本价)

(三) 三角函数

一、概述

三角函数是中学学习的重要的基本初等函数之一，作为一种特殊的函数，在研究和考查时，仍抓住研究函数的一般方法.

本章的重点是：角及三角函数的概念、三角函数的图象和性质.

在考查时，多为客观题，有时也有解答题，多为容易题和中等题.

作为一种重要的工具，在研究其他部分知识时也有广泛的应用，要注意知识间的相互联系.

二、例析

例 1 (2002 年全国高考试题)

在$(0,2\pi)$内，使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围为 (　　)

(A)$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

(B)$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

(C)$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

(D)$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

【解】在区间$(0,2\pi)$上作正余弦函数的图象.

答案:C

点评：本题主要考查三角函数的基本性质，紧贴基础知识，难度不大，要求基础知识掌握准确、熟练.

本题还可采用单位圆的三角函数线，也可较快得出正确答案，作为选择题，还可采用排除法，根据所给答案，取特殊值.

例 2 (2002 年北京高考试题)

下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上为减函数的是 (　　)

(A)$y=\cos^2 x$　　(B)$y=2|\sin x|$

(C)$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$　　(D)$y=-\cot x$

【解】显然，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$ 的最小正周期是 2π，排除 C，而函数 $y=-\cot x$ 在每一个单调区间内为增函数，排除 D，对于函数 $y=2|\sin x|$，根据图象变换，易得其图象，观察可得，符合条件，应选 B.

答案:B

点评：本题主要考查三角函数的周期性、单调性、函数图象等基础知识，难度不大，但知识点考查较多.

对三角函数图象、性质的考查是一个重点考查内容.

例 3 (2000 年全国高考试题)

函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象如图 1-4 是 (　　)

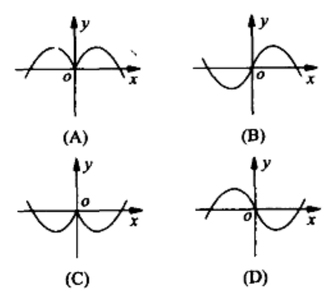

图 1-4

【解】解法一：由于函数 $y=-x\cos x$ 是奇函数，可知函数的图像关于原点成中心对称，故排除 A、C；当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$y<0$，故排除 B，得答案为 D.

解法二：对于函数 $y=-x\cos x$，当$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$时，$y>0$；当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$y<0$，在 4 个选项中，能满足条件的只有 D.

答案:D

点评：本题主要考查函数的图象，要注意函数的性质在图象上的体现.

练习三

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|x=\frac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B$ 等于　(　　)

(A)A　(B)B

(C)$\{x|x=\frac{2k+1}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$　(D)$\varnothing$

2. 已知 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\theta\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)$，$(k\in\mathbf{Z})$，那么 $\cos\theta\cot\theta$ 的值是　(　　)

(A)$\frac{16}{15}$　(B)$-\frac{16}{15}$

(C)$\frac{15}{16}$　(D)$-\frac{15}{16}$

3. 函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称的充要条件是　(　　)

(A)$\varphi=\frac{5}{6}\pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

(B)$\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

(C)$\varphi=-\frac{2}{3}\pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

(D)$\varphi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

4. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,A\neq0)$ 的图象与函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,A\neq0)$ 的图象在区间 $\left(x_0,x_0+\frac{\pi}{\omega}\right)$ 上　(　　)

(A)至少有两个交点　(B)至多有两个交点

(C)至多有一个交点　(D)至少有一个交点

5. 把函数 $y=\cos x$ 的图象上的所有点的横坐标缩小到原来的一半，纵坐标扩大到原来的两倍，然后把图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，则所得图形表示的函数的解析式为　(　　)

(A)$y=2\sin2x$

(B)$y=-2\sin2x$

(C)$y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

(D)$y=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

6. 函数 $f(x)=\sin^2\omega x-\cos^2\omega x$ 的最小正周期为 1，则　(　　)

(A)$\omega=1$，$f(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上是增函数，$f(x)$ 是偶函数

(B)$\omega=\pi$，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},0\right)$ 上是减函数，$f(x)$ 是偶函数

(C)$\omega=1$，$f(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上是减函数，$f(x)$ 是奇函数

(D)$\omega=\pi$，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ 上是增函数，$f(x)$ 是奇函数

7. 函数 $f(x)=\cos2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 是　(　　)

(A)非奇非偶函数

(B)仅有最小值的奇函数

(C)仅有最大值的偶函数

(D)既有最大值又有最小值的偶函数

8. 对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 当\ \sin x\geqslant\cos x\ 时,\\ \cos x, & 当\ \sin x<\cos x\ 时,\end{cases}$ 下列命题中正确的是　(　　)

(A)该函数的值域是 $[-1,1]$

(B)当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数取得最大值 1

(C)该函数是以 π 为最小正周期的周期函数

(D)当且仅当 $2k\pi+\pi<x<2k\pi+\frac{3}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)<0$

二、填空题

9. 函数 $y=\lg(\cos x-\sin x)$ 的定义域是__________.

10. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则不等式 $2\sin\alpha-\tan\alpha>0$ 的解集是__________.

11. $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}$，且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$__________.

12. 下列命题正确的是__________.（注：把你认为正确的命题序号都填上）

①函数 $y=-\sin(k\pi+x)(k\in\mathbf{Z})$ 是奇函数；

②函数 $y=\tan x(x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z})$，关于点 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$ 对称；

③函数 $y=\sin|x|$ 是最小正周期为 π 的周期函数；

④设 θ 是第二象限的角，则 $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$，且 $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$；

⑤函数 $y=\cos^2x+\sin x$ 的最小值是 -1；

⑥函数 $y=-\log_a(-x)$ 的图象与函数 $y=\log_a x$ 的图象关于原点对称

三、解答题

13. 是否存在角 α、β，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in(0,\pi)$，使等式 $\sin(3\pi-\alpha)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$，$\sqrt{3}\cos(-\alpha)=-\sqrt{2}\cos(\pi+\beta)$ 同时成立，若存在，求出 α、β 的值；若不存在，请说明理由.

14. 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的最小正周期为 $\frac{2}{3}\pi$，最小值为 -2，图象过点 $\left(\frac{5}{9}\pi,0\right)$，求该函数的解析式.

15. 已知 $f(x)=\log_a\left(\sin^2\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}\right)$，$(a>0$ 且 $a\neq1)$，确定函数的奇偶性、单调性.

（四）两角和与差的三角函数

一、概述

三角变换是高考必考内容，考查涉及面广，重点是

运用三角变换公式进行计算求值，化简以及解三角形.

三角变换主要包括角的变换、三角函数名的变换、三角函数次数的变换以及三角函数表达形式的变换.要通过训练，总结规律，准确记忆和应用基本公式.

二、例析

例1 （2002年北京高考试题）

若$\frac{\cot\theta-1}{2\cot\theta+1}=1$，则$\frac{\cos2\theta}{1+\sin2\theta}$的值为 （　）

(A)3　(B)-3　(C)-2　(D)$-\frac{1}{2}$

【解】 由$\frac{\cot\theta-1}{2\cot\theta+1}=1$可得$\cot\theta=-2$，

$$\frac{\cos2\theta}{1+\sin2\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$$

将$\cot\theta=-2$代入上式得：

$$\frac{\cos2\theta}{1+\sin2\theta}=3$$

答案：A

点评：本题主要考查基本公式的运用.根据题目的特点，也可采用万能公式进行求解."给值求角"是常见题型，要注意已知和所求的角的关系，合理选择公式.

例2 （2001年全国高考试题）

若$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，则 （　）

(A)$a<b$　(B)$a>b$

(C)$ab<1$　(D)$ab>2$

【解】 由已知，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，可得：$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=a$，$\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=b$.

又由$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，可得：

$$\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\beta+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$$

由正弦函数的单调性可知：$a<b$.

答案：A

点评：本题主要考查一个重要的公式：

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

其中φ角所在象限由a，b的符号确定，φ角的值由$\tan\varphi=\frac{b}{a}$确定，这也是一种和差化积.在化简、研究三角函数的性质等方面都有重要的作用.

本题也可将a、b两式平方或计算$a-b$的差等方法来进行判断.

例3 （2002年春季高考试题）

在$\triangle ABC$中，已知A、B、C成等差数列，求$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$的值.

【解】 因为A、B、C成等差数列，又$A+B+C=180°$.

所以　$A+C=120°$

从而　$\frac{A+C}{2}=60°$，

故　$\tan\frac{A+C}{2}=\sqrt{3}$

由两角和的正切公式，得：

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}}=\sqrt{3}$$

所以　$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$

$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}$.

点评：本题主要考查等差数列、两角和的三角函数公式等基础知识，在三角形中考查三角变换，是高考试题中经常出现的命题方式.此时常有$A+B+C=180°$、正、余弦定理等隐含条件.

解本题的关键是能根据所求，联想到两角和的正切公式.

练习四

一、选择题

1. 已知$2\sin\theta=1+\cos\theta$，则$\tan\frac{\theta}{2}$等于 （　）

(A)2　(B)$\frac{1}{2}$

(C)$\frac{1}{2}$或不存在　(D)不存在

2. $\triangle ABC$中，已知$\cos A\cdot\cos B>\sin A\cdot\sin B$，则$\triangle ABC$一定是 （　）

(A)锐角△　(B)直角△　(C)钝角△　(D)不确定

3. 设α、β、$\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\sin\alpha+\sin\gamma=\sin\beta$，$\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha$，则$\beta-\alpha$等于 （　）

(A)$-\frac{\pi}{3}$　(B)$\frac{\pi}{6}$

(C)$\frac{\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{3}$　(D)$\frac{\pi}{3}$

4. 函数$f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$的最大值是 （　）

(A)$2\sqrt{3}$　(B)$-2\sqrt{3}$　(C)3　(D)-3

5. 在$\triangle ABC$中，$A>B$，则下列四个不等式恒成立的个数是 （　）

①$\sin A>\sin B$　②$\cos A<\cos B$

③$\sin2A>\sin2B$　④$\cos2A<\cos2B$

(A)1个　(B)2个　(C)3个　(D)4个

6. 在$\triangle ABC$中，若$\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}>1$，则$\triangle ABC$一定是 （　）

(A)锐角三角形　(B)钝角三角形

(C)直角三角形　(D)等腰三角形

7. 一个直角三角形的周长为2，则其斜边长的最小值为 （　）

(A)$\frac{2}{\sqrt{2}+1}$　(B)$\frac{2}{\sqrt{2}-1}$　(C)$\frac{2}{3+\sqrt{3}}$　(D)$\frac{2}{3-\sqrt{3}}$

8. 函数$f(x)=\sqrt{3}\cos(3x-\theta)-\sin(3x-\theta)$是奇函数，则$\theta$等于 （　）

(A)$k\pi$　(B)$k\pi+\frac{\pi}{6}$　(C)$k\pi+\frac{\pi}{3}$　(D)$k\pi-\frac{\pi}{3}$

二、填空题

9. 求值$\frac{\sin39°-\sin21°}{\cos39°-\cos21°}=$________.

第一部分 命题动向

10. 在△ABC中，∠A、∠B、∠C是三个内角，∠$C=30°$，$\sin^2A+\sin^2B-2\sin A\sin B\cos C$的值是______.

11. $y=\dfrac{2-\cos x}{\sin x}(0<x<\pi)$的最小值是______.

12. 已知$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$（$\alpha$、$\beta$、$\gamma$均为锐角），那么$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$的最大值等于______.

三、解答题

13. 已知$\tan\alpha$，$\tan\beta$是关于x的方程$mx^2-2x\sqrt{7m-3}+2m=0$的两个实根，求$\tan(\alpha+\beta)$的取值范围.

14. 已知$f(\theta)=\dfrac{1+\cos\theta-\sin\theta}{1-\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{1-\cos\theta-\sin\theta}{1-\sin\theta+\cos\theta}$

(Ⅰ)化简$f(\theta)$；

(Ⅱ)求使$f(\theta)=4$的最小正角θ

15. 在锐角三角形ABC中，三内角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$\sin^2A-\cos^2A=\dfrac{1}{2}$试比较$b+c$与$2a$的大小.

（五） 平面向量

一、概述

向量是教材中新增内容之一，在思想上和方法上都是对原有知识体系的补充和扩展.

本章的重点是：单位向量，相等向量，共线向量的概念. 向量的加法和减法，向量的坐标运算及数量积公式的应用. 定比分点公式及平移公式的应用.

本章的难点是：向量的坐标表示，向量与数量之间的转换.

二、例析

例1 （2000年高考试题）

设a、b、c是任意的非零平面向量，且相互不共线，则

①$(a\cdot b)c-(c\cdot a)b=0$；

②$|a|-|b|<|a-b|$；

③$(b\cdot c)a-(c\cdot a)b$不与c垂直；

④$(3a+2b)\cdot(3a-2b)=9|a|^2-4|b|^2$

中，是真命题的有（　　）

(A)①②　(B)②③　(C)③④　(D)②④

【解】解法一：因为向量b、c不是共线向量，所以①是假命题；因为③中的两个向量和数量积等于0，所以③是假命题，从而可以排除A、B、C得D.

解法二：因为$a-b$与b不是同向向量，所以

$|a|=|(a-b)+b|<|a-b|+|b|$，

得知②是真命题；又因为

$(3a+2b)\cdot(3a-2b)=9a\cdot a-4b\cdot b$

$=9|a|^2-4|b|^2$

所以④是真命题.

答案：D

点评：本题主要考查平面向量的性质和运算法则，以及基本运算技能.

例2 已知$|a|=6$，$|b|=10$，$|a-b|=4\sqrt{6}$，求a与b的夹角θ的余弦值.

【解】∵　$|a-b|^2=(a-b)^2=a^2-2a\cdot b+b^2$

又∵　$|a|=6$，$|b|=10$

∴　$a^2=36$，$b^2=100$

∴　$96=136-2a\cdot b$，

∴　$a\cdot b=20$

∴　$\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\dfrac{1}{3}$

点评：本题主要考查向量的基本运算，要求概念清晰，运算准确.

例3 若点$P(x,1)$在$A(2,-4)$，$B(5,11)$这两点的连线上，求x值.

【解】$\overrightarrow{AB}=(3,15)$　$\overrightarrow{AP}=(x-2,5)$

∵　$\overrightarrow{AP}$和$\overrightarrow{AB}$共线

∴　$3\times5-15(x-2)=0$

∴　$x=3$

点评：本题主要考查向量的坐标运算及共线向量.

例4 （2003年天津高考题）

O是平面上一定点，A、B、C是平面上不共线的三个点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则$P$的轨迹一定通过△$ABC$的（　　）

(A)外心　(B)内心　(C)重心　(D)垂心

【解】记$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC}}$，则$\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{a}$

∵　$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$与$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$分别是$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$方向的单位向量

∴　由平行四边形法则，$\vec{a}$与$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的夹角相等

又∵　$\overrightarrow{AP}$与$\vec{a}$共线，

∴　$\overrightarrow{AP}$平分∠BAC，故选B.

评析：应当熟练掌握向量的基本运算，灵活应用向量平行、向量垂直的充要条件.

练习五

一、选择题

1. 已知$|a|=3$，$|b|=4$，且$(a+kb)\perp(a-kb)$，那么k的值为（　　）

(A)$\pm\dfrac{3}{4}$　(B)$\pm\dfrac{4}{3}$　(C)$\pm\dfrac{3}{5}$　(D)$\pm\dfrac{4}{5}$

2. 在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则四边形$ABCD$是（　　）

(A)平行四边形

(B)矩形

(C)直角梯形

(D)有一个角为直角的四边形

3. 已知单位向量i，j，若$(2i-\sqrt{3}j)\perp j$，则向量i与j的夹角为（　　）

(A)$\dfrac{\pi}{2}$　(B)$\dfrac{\pi}{3}$　(C)$\dfrac{\pi}{4}$　(D)$\dfrac{\pi}{6}$

4. 将函数$y=x^2$的图象经过怎样一次平移，可得到函数$y=x^2+6x+11$的图象（　　）

(A)(3，2)　(B)(−3，2)

(C)(3，−2)　(D)(−3，−2)

5. 设$a=(x,4)$，$b=(3,2)$，且$a\parallel b$，则x值为（　　）

(A)−6　(B)$-\dfrac{8}{3}$　(C)$\dfrac{8}{3}$　(D)6

二、解答题

6. 已知$P_1(-1,-6)$，$P_2(3,0)$，$P(t,-8)$，求P点分有向线段$\overline{P_1P_2}$所成的比λ及t的值.

7. 在△ABC中，AB，BC，CA的边长分别记作c，a，b，利用向量的有关运算法则证明：$c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot \cos C$.
8. $\boldsymbol{a}=(t,1)$与$\boldsymbol{b}=(4,t)$共线且方向相同，求与$\boldsymbol{a}$垂直、且长度为2和向量.

(六) 不等式

一、概述

不等式作为一种工具，在代数、三角、立几、解几中有广泛应用，同时也是高等数学的基础，所以在高考中一直是重点考察的内容. 在选择题、填空题、解答题中均有各种类型的不等式题，主要考查不等式的性质，解不等式，不等式的证明及不等式的应用.

二、例析

例 1 (2002年北京高考试题)

解不等式$|\sqrt{2x-1}-x|<2$.

【解】原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x-1}-x<2\\ \sqrt{2x-1}-x>-2\end{cases}$

因为$\sqrt{2x-1}-x<2\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}<x+2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\geqslant0\quad x+2\geqslant0\\ 2x-1<(x+2)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{1}{2}\\ x^2+2x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{2}$

又$\sqrt{2x-1}-x>-2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\geqslant0\\ x-2\geqslant0\\ 2x-1>(x-2)^2\end{cases}$或$\begin{cases}2x-1\geqslant0\\ x-2<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant2\\ x^2-6x+5<0\end{cases}$或$\frac{1}{2}\leqslant x<2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant2\\ 1<x<5\end{cases}$或$\frac{1}{2}\leqslant x<2$

$\Leftrightarrow 2\leqslant x<5$或$\frac{1}{2}\leqslant x<2$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant x<5$

所以，原不等式组$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\leqslant x<5\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant x<5$

因此，原不等式的解集为$\{x|\frac{1}{2}\leqslant x<5\}$

点评：本题主要考查不等式的解法，要求要准确、熟练.

例 2 (2002年春季高考试题)

用一张钢板制作一个容积为$4m^3$的无盖长方体水箱，可用的长方形钢板有四种不同的规格(长×宽的尺寸如各选项所示，单位均为m). 若既要够用，又要所剩最少，则应选择钢板的规格是 ( )

(A)2×5 (B)2×5.5
(C)2×2 (D)3×5

【解】设长方体长、宽、高为a、b、c，则 $abc=4$

设水箱表面积为S，则

$S=ab+2ac+2bc\geqslant3\sqrt[3]{4a^2b^2c^2}=12$，

当S取最小值时，$ab=2ac=2bc$，即

$\begin{cases}ab=2ac\\ 2ac=2bc\\ abc=4\end{cases}$ 解得：$a=b=2$，$c=1$.

答案：C

点评：本题是以立体几何为背景的应用题，在求解的过程中应用到了均值定理求极值，这是不等式应用的重要方面.

练习六

一、选择题

1. 若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，
(1)$a^2>b^2$；
(2)$ab>b^2$；
(3)$a+b>2\sqrt{ab}$
(4)$a^2+b^2>|a|+|b|$
这四个式子中恒成立的个数是 ( )
(A)一个 (B)二个 (C)三个 (D)四个
2. 在区间$[\frac{1}{2},2]$上，函数$f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$与$g(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$在同一点取得相同的最小值，那么$f(x)$在区间$[\frac{1}{2},2]$上的最大值是 ( )
(A)$\frac{13}{4}$ (B)2 (C)8 (D)$\frac{5}{4}$
3. 三棱锥O-ABC中，OA、OB、OC两两垂直，$OC=1$，$OA=x$，$OB=y$，$x+y=4$，则三棱锥O-ABC体积的最大值是 ( )
(A)1 (B)$\frac{1}{3}$ (C)$\frac{2}{3}$ (D)$\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. 若实数x，y满足$2x^2+y^2=6x$，则x^2+y^2+2x的最大值为 ( )
(A)14 (B)15 (C)16 (D)17
5. 设集合$A=\{x|\sqrt{x-2}-3<1, x\in\mathbf{N}\}$，则$A$中元素个数是 ( )
(A)13 (B)12 (C)16 (D)10
6. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}>1$的解集是 ( )
(A)$\{x|2<x<4$或$x>20\}$
(B)$\{x|x<4$或$x>20\}$
(C)$\{x|x\geqslant2\}$
(D)$\{x|x>20\}$
7. 若函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+kx+2)$的值域为$(-\infty,+\infty)$，则实数$k$的取值范围是 ( )
(A)$(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$
(B)$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$
(C)$(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$
(D)$(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty)$
8. 若关于x的不等式$|x+2|+|x-1|<a$的解集是Φ，则a的取值范围是 ( )
(A)$(3,+\infty)$ (B)$[3,+\infty)$
(C)$(-\infty,3]$ (D)$(-\infty,3)$
9. 不等式$|2x-\log_2x|<2x+|\log_2x|$成立，则 ( )
(A)$1<x<2$ (B)$0<x<1$
(C)$x>1$ (D)$x>2$
10. 某公司租地建仓库，每月土地占用费y_1与仓库到

车站的距离成反比，而每月库存货物的运费 y_2 与到车站的距离成正比，如果在距离车站 10 公里处建仓库，这两项费用 y_1 和 y_2 分别为 2 万元和 8 万元，那么，要使这两项费用之和最小，仓库应建在离车站（　　）

(A)5 公里处　(B)4 公里处
(C)3 公里处　(D)2 公里处

二、填空题：

11. 使不等式 $a^2>b^2$，$\frac{a}{b}>1$，$\lg(a-b)>0$，$2^a>2^{b+1}$ 同时成立的 a 与 b 的关系是________.
12. 已知 a、b、c 为某一直角三角形的三条边长，c 为斜边，若点 (m,n) 在直线 $ax+by+2c=0$ 上，则 m^2+n^2 的最小值是________.
13. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}ax>-1\\x+a>0\end{cases}$ 的解集不是空集，则实数 a 的取值范围是________.
14. 函数 $y=\sqrt{\frac{1}{\log_a x}-1}\ (0<a<1)$ 的定义域为________.

三、解答题

15. 今有一台坏天平，两臂长不等，其余均精确，有人说要用它称物体的重量，只需将物体放在左右托盘各称一次，则两次称量结果的和的一半就是物体的真实重量，这种说法对吗？并说明你的结论.
16. 解关于 x 的不等式 $\sqrt{4-a^x}>a^x-1\ (a>0$ 且 $a\neq1)$
17. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$，是否存在常数 a、b、c，使不等式 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$（＊）对一切实数 x 都成立
18. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，对一切 $x\in[-1,1]$，都有 $|f(x)|\leqslant1$，求证：对一切 $x\in[-1,1]$ 都有 $|2a+b|\leqslant4$.

（七）数列、极限、数学归纳法

一、概述

数列是高中代数的重点内容之一，在历年高考试题中占有较大的比重，试题不仅考查数列，极限的基础知识，基本运算和数学归纳法这一基本方法，而且考查灵活运用数列的知识和方法.

重点是数列的通项公式，前 n 项和公式，等差及等比数列的有关知识，及数列的极限，数学归纳法.

极限的概念和运算法则是微积分中最重要的工具，也是学好以后知识的基础.

求数列和函数的极限是本章的重点．利用极限来分析和解决相关问题及分类讨论求极限是本章的难点.

二、例析

例 1　(2002 年北京高考试题)

等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，公差不为零，且 a_1，a_3，a_{11} 恰好是某等比数列的前三项，那么该等比数列公比的值等于______.

【解】 设数列 $\{a_n\}$ 公差为 d，由已知有：

$$a_3^2=a_1\cdot a_{11}$$

即：$(2+2d)^2=2(2+10d)$

解得：$d=0$ 或 3，

由已知，$d=3$，$\frac{2+2d}{2}=4$.

故该等比数列公比的值等于 4.

答案：4.

点评：本题考查等差数列和等比数列的基础知识，这是高考中考查的重点内容，对于等差数列、等比数列的定义、通项公式、前 n 项和公式及性质要熟练掌握，并能灵活运用.

例 2　(2001 年全国高考试题)

设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和．若 $\{S_n\}$ 是等差数列，则 $q=$________.

【解】 解法一：

∵　$S_n-S_{n-1}=a_n$

又∵　$\{S_n\}$ 为等差数列，

∴　a_n 为定值.

∴　$\{a_n\}$ 为常数列，$q=1$

解法二：

∵　$\{a_n\}$ 为等比数列，设 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，且 $\{S_n\}$ 为等差数列，

∴　$2S_2=S_1+S_3$

即　$2a_1q+2a_1=a_1+a_1+a_1q+a_1q^2$

解得　$q=0$（舍）$q=1$.

例 3　(2002 年春季高考试题)

已知点的序列 $A_n(x_n,0)$，$n\in\mathbf{N}$，其中 $x_1=0$，$x_2=a(a>0)$，A_3 是线段 A_1A_2 的中点，A_4 是线段 A_2A_3 的中点，…，A_n 是线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点，….

(Ⅰ)写出 x_n 与 x_{n-1}、x_{n-2} 之间的关系式 $(n\geqslant3)$；

(Ⅱ)设 $a_n=x_{n+1}-x_n$，计算 a_1，a_2，a_3，由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，并加以证明；

(Ⅲ)求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

【解】(Ⅰ)当 $n\geqslant3$ 时，$x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$

【解】(Ⅱ)$a_1=x_2-x_1=a$

$$a_2=x_3-x_2=\frac{x_2+x_1}{2}-x_2=-\frac{1}{2}(x_2-x_1)=-\frac{1}{2}a$$

$$a_3=x_4-x_3=\frac{x_3+x_2}{2}-x_3=-\frac{1}{2}(x_3-x_2)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a\right)=\frac{1}{4}a$$

由此推测　$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a\ (n\in\mathbf{N})$

证明：

因为 $a_1=a>0$ 且

$$a_n=x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{2}=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})=-\frac{1}{2}a_{n-1}\ (n\geqslant2)$$

所以

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a$$

【解】(Ⅲ)当 $n\geqslant3$ 时，有：

$x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)$

$+x_1$

$=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1$,

由(Ⅱ)知$\{a_n\}$是公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，所以：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{a_1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}a$$

点评：本题主要考查中点坐标公式，等比数列等基本知识，将解析几何知识与数列知识相结合，体现了在知识网络交汇点命题的方向.

例 4 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n+2^{n-1}}{2^n+a^{n+1}}$

【解】 当$|a|>2$时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+2^{n-1}}{2^n+a^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\left(\frac{2}{a}\right)^{n-1}}{2\left(\frac{2}{a}\right)^{n-1}+a^2}=\frac{1}{a}$$

当$|a|<2$时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+2^{n-1}}{2^n+a^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}+1}{2+a^2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}}=\frac{1}{2}$$

当$a=2$时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+2^{n-1}}{2^n+a^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+2^{n-1}}{2^n+2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

当$a=-2$时，不存在.

综上所述，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+2^{n-1}}{2^n+a^{n+1}}=\begin{cases}\frac{1}{a}(|a|>2)\\ \frac{1}{2}(-2<a\leqslant 2)\\ \text{不存在}(a=-2)\end{cases}$$

点评：本题主要考查$\lim\limits_{n\to\infty}q^n$的运算，要进行分类讨论.

例 5 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}$$

点评：本题易出现下面的错解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+\cdots+0=0$$

错误原因是数列和的极限等于数列极限的和只适用于有穷数列和不能推广到无穷多个数列和的情形.应先求和再求极限.

例 6 已知$f(x)=\begin{cases}a\sin x+b, & x>0\\ 0 & x=0\\ \cos x+1, & x<0.\end{cases}$

问当a，b分别取何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在.

【解】 ∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a\sin x+b)=b$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x+1)=2$

∴ 当$b=2$，$a\in\mathbf{R}$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在

点评：$x=0$是此分段函数的分界点，而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$都存在并且相等，因此求$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$是解题的关键.

练习七

一、选择题

1. 数列$\{a_n\}$中$a_1=1$，对所有的$n\geqslant 2$，都有$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=n^2$，则$a_3+a_5$等于 (　　)

(A)$\frac{61}{16}$　(B)$\frac{25}{9}$　(C)$\frac{25}{16}$　(D)$\frac{31}{15}$

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$3(a_3+a_5)+2(a_7+a_{10}+a_{13})=24$，则数列前13项的和是 (　　)

(A)13　(B)26　(C)52　(D)156

3. 数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$，且$\{a_na_{n+1}\}$是公比为$q(q>0)$的等比数列，满足$a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}>a_{n+2}a_{n+3}(n\in\mathbf{N})$，则公比$q$的取值范围是 (　　)

(A)$0<q<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　(B)$0<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(C)$0<q<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$　(D)$0<q<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

4. 各项都是正数的等比数列$\{a_n\}$的公比$q\neq 1$，且a_3、a_5、a_6成等差数列，则$\frac{a_3+a_5}{a_4+a_5}$等于 (　　)

(A)$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$　(B)$2+\sqrt{5}$

(C)$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　(D)$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，则此数列是 (　　)

(A)等比数列
(B)等差数列
(C)既等差又等比数列
(D)既非等差又非等比数列

6. 若等比数列$\{a_n\}$，对一切自然数n都有$a_{n+1}=1-\frac{2}{3}S_n$，其中S_n是此数列的前n项之和，又$a_1=1$，则公比q为 (　　)

(A)1　(B)$\frac{1}{3}$　(C)$-\frac{1}{3}$　(D)$-\frac{2}{3}$

7. 数列$\{a_n\}$的通项$a_n=2n+1$，则由$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$所确定的数列$\{b_n\}$的前$n$项之和是 (　　)

(A)$n(n+2)$　(B)$\frac{1}{2}n(n+4)$

(C)$\frac{1}{2}n(n+5)$　(D)$\frac{1}{2}n(n+7)$

8. 数列$\{a_n\}$前n项和S_n与通项a_n满足关系式$S_n=na_n+2n^2-2n(n\in\mathbf{N})$，则$a_{100}-a_{10}$的值为 (　　)

(A)-90　(B)-180
(C)-360　(D)-400

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n+2}^{n+1}}=$ (　　)

(A)0　(B)2　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$\frac{1}{4}$