大于与小于

胡炯涛 编著

中学数学竞赛辅导丛书

DAYU YU XIAOYU

HU JIONG TAO BIANZHU

上海科技教育出版社

SHANGHAI KEJI JIAOYU CHUBANSHE

ZHONGXUE SHUXUE JINGSAI FUDAO CONGSHU

中学数学竞赛辅导丛书

大于与小于

胡炯涛 编著

上海科技教育出版社

(沪)新登字116号

中学数学竞赛辅导丛书
大于与小于
胡炯涛 编著
上海科技教育出版社出版发行
(上海冠生园路393号)
各地新华书店经销 江苏宜兴印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张5.5 字数123000
1993年3月第1版 1993年3月第1次印刷
印数1-2500
ISBN 7-5428-0842-4
G·444
定价：3.70元

引　言

说来令人难以置信，被视为数学最高殿堂的“IMO”，几乎每届都出现与“不等式”有关的试题(第一～三十届中共出现32题，其中第三届的6道试题中，涉及“不等式”的竟占了一半!)，原因实在很简单：数学的基本结果往往是一些不等式而不是等式。

诚如音乐家能以很少几组音符变化发展为美妙动听的旋律那样，数学则往往通过不多几步逻辑推理就揭示出简明优美的结果。这些结果在其来龙去脉未被领悟以前，常常显得莫测高深。数学的魅力之一在于按照一定顺序(用“大于”或“小于”的形式显现)，运用简单的思想，得出一个又一个意外的结果。这本小册子将向你介绍一些这样的结果。

第一章为你提供数与式进行大小比较的基本方法；在这个基础上，演绎出各种类型的不等式——数值不等式、数列不等式、三角不等式、排序不等式(几何不等式不属于本书涉及的领域)。

数学中没有巧遇，重要的结果都有一个合理的解释，要理解一个数学定理、方法或公式的意义有必要“更上一层楼”，这一点极为重要。否则，数学就将退化为一堆内在没有联系的公式堆砌和华而不实的技巧了。

为此，第三章向你展示了几个著名的不等式，其中包括：伯努利不等式、切比雪夫不等式、柯西不等式、赫尔德不等式、三角形不等式以及闵可夫斯基不等式等。它们由基本结果推

出，相互间联系密切。最后穷本溯源，我们发现这些不等式有着共同的来源——琴生不等式。至此，"大于与小于"这一课题就有了一个统一而和谐的结局。

作　者

目　　录

第一章 数与式大小的比较

§ 1.1 基 本 方 法

若a、b是两个任意实数，则当且仅当$a-b$是一个正数时，有$a>b$。

上述定义就是数的大小比较的基本依据，循此即可得到数与式大小比较的基本方法（差值比较法）：

$$A-B\vee 0\Leftrightarrow A\vee B.^{*}$$

例 1 试证：若a、b、c都是正数，则

$$a+b+c\leqslant\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

证明 构思以下不等式

$$(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2\geqslant 0 \quad ①$$

则 $2a^2bc+2ab^2c+2abc^2$

$$\leqslant a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \quad ②$$

又有 $(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\geqslant 0$ ③

$\therefore$ $a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2\geqslant 0$ ④

将不等式②，④两边分别相加，得

$$2a^2bc+2ab^2c+2abc^2\leqslant 2a^4+2b^4+2c^4 \quad ⑤$$

由$2abc>0$，可将⑤式两边除以$2abc$，得

$$a+b+c\leqslant\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

---

* “$\vee$”表示大于或小于。

例 2　试证：对于任意实数a、b，下列不等式成立：

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}.$$

证明　先证下列命题：

若a、b是任意实数，m、n是奇偶性相同的自然数，则

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\leqslant\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2} \qquad ①$$

与上式等价的不等式是

$$2(a^{m+n}+b^{m+n})-(a^m+b^m)(a^n+b^n)\geqslant 0 \qquad ②$$

根据奇偶性的两种情况进行讨论：

(1) 数m，n同为奇数，

则若$a\geqslant b\Rightarrow a^m\geqslant b^m$，$a^n\geqslant b^n$，反之亦然，

即　　$(a^m-b^m)(a^n-b^n)\geqslant 0$，展开即得②式。

(2) 数m，n同为偶数，设$m=2k$，$n=2l$，其中k，l是自然数。

若$a^2\geqslant b^2$，则$(a^2)^k\geqslant(b^2)^k$，$(a^2)^l\geqslant(b^2)^l$，

即　　$a^m\geqslant b^m$，$a^n\geqslant b^n$，则②式成立。

若$a^2<b^2$，则$(a^2)^k<(b^2)^k$，$(a^2)^l<(b^2)^l$，

即　　$a^m<b^m$，$a^n<b^n$，②式也成立。

于是证明了①式成立。

据不等式①，对于任意实数a，b，有

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^4+b^4}{2} \qquad ③$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^4+b^4}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2} \qquad ④$$

将③、④两边相乘即得原不等式成立。

例 3　设$n>2$，$n\in N$，试证明下述论断仅对于$n=3$和$n=5$成立：

对任意实数a_1，a_2，…，a_n都有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0.$$

证明 对于$n=3$的情况变形后用配方法，

$$\because\quad (a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

$$=\frac{1}{2}\{[(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)]+[(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)]+[(a_3-a_1)(a_3-a_2)+(a_1-a_3)(a_1-a_2)]\}$$

$$=\frac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2]\geqslant 0,$$

即证。

当$n=5$时，由于

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\\&+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\\&+(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\\&+(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\\&+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\end{aligned}\tag{1}$$

是关于a_1，a_2，a_3，a_4，a_5的对称式，不妨可设

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant a_5.$$

于是有

$$a_1-a_2=-(a_2-a_1)\geqslant 0,\quad a_1-a_3\geqslant a_2-a_3\geqslant 0,$$

$$a_1-a_4\geqslant a_2-a_4\geqslant 0,\quad a_1-a_5\geqslant a_2-a_5\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad (a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geqslant 0\tag{2}$$

类似地，有

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)$$
$$+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\geqslant 0 \quad ③$$

又 $\because$ $a_3-a_1\leqslant 0$，$a_3-a_2\leqslant 0$，$a_3-a_4\geqslant 0$，$a_3-a_5\geqslant 0$，

$\therefore$ $(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geqslant 0 \quad ④$

将②、③、④相加即知①式非负，即 $n=5$ 时论断成立。

而当 $n=4$ 时，取 $a_1=-1$，$a_2=a_3=a_4=0$，有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)$$
$$+(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)$$
$$+(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=-1<0,$$

即对 $n=4$ 时论断不成立。

最后，当 $n>5$ 时，取

$$a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}=0,\ a_i=1,\ a_{i+1}=\cdots=a_n=2.$$

其中 $3\leqslant i\leqslant n-2$，则有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+\cdots$$
$$+(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})$$
$$\cdots(a_i-a_n)+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$$
$$=(-1)^{n-i}.$$

则当 $n>5$ 为奇数时取 $i=n-3$，有

$$(-1)^{n-i}=(-1)^3=-1<0,$$

当 $n>5$ 为偶数时取 $i=3$，有

$$(-1)^{n-i}=(-1)^{n-3}=-1<0,$$ 即论断不成立。

例 4 若 $x_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，k 为非负整数。求证：

$$\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}\leqslant\frac{x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_n^{k+1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

证明 先证对于任意i，j有

$$x_i^k x_j + x_j^k x_i \leqslant x_i^{k+1} + x_j^{k+1},$$

此式等价于

$$x_i^{k+1} + x_j^{k+1} - x_i^k x_j - x_i x_j^k = (x_i^k - x_j^k)(x_i - x_j) \geqslant 0.$$

$$\therefore \quad \sum_{i,j=1}^{n} (x_i^k x_j + x_i x_j^k) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} (x_i^{k+1} + x_j^{k+1}),$$

即
$$2\sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 2n \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}.$$

$$\therefore \quad \frac{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k}{n} \leqslant \frac{x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + \cdots + x_n^{k+1}}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

由以上所述的差值比较法可直接推得商式比较法：

若A，$B>0$，则有$\frac{A}{B} \vee 1 \Leftrightarrow A \vee B$。

在与指数式或对数式有关的不等式中，常用这种方法。

例 5 已知a，b，c为正数，且$a \neq b \neq c$。

求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c} > a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$。

证明 对商式进行变形。

不妨设$a>b>c>0$，则$2a-b-c>0$，$a+b-2c>0$。

$$\begin{aligned}
\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}} &= a^{2a-b-c} \cdot b^{2b-c-a} \cdot c^{2c-a-b} \\
&> b^{2a-b-c} \cdot b^{2b-c-a} \cdot c^{2c-a-b} \\
&= b^{a+b-2c} \cdot c^{2c-a-b} \\
&> c^{a+b-2c} \cdot c^{2c-a-b} \\
&= c^0 = 1.
\end{aligned}$$

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c} > a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}.$$

例 6　已知$y_n=\dfrac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}{x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n-1}}$，其中$0<x<1$.求证:$\log_x y_{n+1}>\log_x y_n$.

证明　$\because 0<x<1$，$\therefore$只需证 $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}<1$.

由

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{(1+x^2+\cdots+x^{2n+2})}{x(1+x^2+\cdots+x^{2n})}\cdot\frac{x(1+x^2+\cdots+x^{2n-2})}{(1+x+\cdots+x^{2n})}$$

$$=\frac{(1-x^{2n+4})(1-x^{2n})}{(1-x^{2n+2})^2}$$

$$=\frac{1-x^{2n}-x^{2n+4}+x^{4n+4}}{1-2x^{2n+2}+x^{4n+4}}$$

$$=1-\frac{x^{2n}(1-x^2)^2}{(1-x^{2n+2})^2}<1.$$ 即证.

例 7　已知x，y都为正数，且$x\neq y$.求证：

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}>x^y y^x.$$

证明　先利用$x+y>2\sqrt{xy}$（$x,y>0,x\neq y$）把$x+y$转化为xy，以利于商式的比较.

$$\frac{(x+y)^{x+y}}{2^{x+y}x^y y^x}>\frac{(2\sqrt{xy})^{x+y}}{2^{x+y}x^y y^x}\quad(x\neq y)$$

$$=\frac{x^{\frac{x+y}{2}}\cdot y^{\frac{x+y}{2}}}{x^y\cdot y^x}=x^{\frac{x-y}{2}}\cdot y^{\frac{y-x}{2}}.$$

当$x>y$时，　$x^{\frac{x-y}{2}}\cdot y^{\frac{y-x}{2}}>y^{\frac{x-y}{2}}\cdot y^{\frac{y-x}{2}}=1$;

当$x<y$时，　$x^{\frac{x-y}{2}}\cdot y^{\frac{y-x}{2}}>x^{\frac{x-y}{2}}\cdot x^{\frac{y-x}{2}}=1$.

$\therefore\quad \dfrac{(x+y)^{x+y}}{2^{x+y}x^y\cdot y^x}>1$，即 $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{x+y}>x^y\cdot y^x$.

§ 1.2 不等式证明的常用方法

数与式的大小比较，常以不等式证明题的形式出现．证明方法繁多，下面介绍的是一些与竞赛型题目有关的证法．

1．利用基本不等式

当$a_1,a_2,\cdots,a_n\in R^+$时，我们有：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

（等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立），此不等式称为基本不等式．

例 1 设a、b、c、d、m、n都是正数，令

$$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd},\ Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}},$$

求证：$Q\geqslant P$．

证明 因为a、b、c、d、m、n都是正数，对Q进行改写有

$$\begin{aligned}Q&=\sqrt{ab+\frac{mad}{n}+\frac{ncb}{m}+cd}\\&\geqslant\sqrt{ab+2\sqrt{abcd}+cd}\\&=\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}=P.\end{aligned}$$

例 2 设$x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}.$$

证明 我们可以从结论所需的不等式中找出利用基本不等式的途径．

$$\because\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geqslant 2x_1,\ \cdots,\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant 2x_n,$$

把这 n 组不等式相加得

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\right)+\left(\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\right)+\cdots+\left(\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\right)$$
$$\geqslant 2(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

显然此式与待证不等式等价。

例 3 已知三角形的三边长为 a、b、c，面积为 S，试证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$。等号在什么条件下成立？

证明 三角形面积

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}.$$

$$\because\quad (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$
$$\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{(a+b+c)^3}{27},$$

（等号当且仅当 $a+b-c=a+c-b=b+c-a$，也即 $a=b=c$ 时成立）。

$$\therefore\quad 4S=\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$
$$\leqslant\sqrt{(a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)^3}{27}}=\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}}$$
$$\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}},$$

即为 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$（等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立）。

例 4 已知 a，b，c 都是自然数，求证：

$$a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{c}{a+b+c}}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

证明 $\because$ 不等式两边都为正，$\therefore$ 可将其改写成

$$\sqrt[(a+b+c)]{a^a b^b c^c} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$$

后乘正数3 $\sqrt[(a+b+c)]{\left(\frac{1}{a}\right)^a\left(\frac{1}{b}\right)^b\left(\frac{1}{c}\right)^c}$，转而改证等价不等式

$$(a+b+c)\sqrt[(a+b+c)]{\left(\frac{1}{a}\right)^a\left(\frac{1}{b}\right)^b\left(\frac{1}{c}\right)^c} \leqslant 3.$$

注意到 a 个 $\frac{1}{a}$、b 个 $\frac{1}{b}$、c 个 $\frac{1}{c}$ 三者和为 3，由基本不等式知

$$3=\sum_1^a \frac{1}{a}+\sum_1^b \frac{1}{b}+\sum_1^c \frac{1}{c}$$

$$\geqslant (a+b+c)\cdot \sqrt[(a+b+c)]{\left(\frac{1}{a}\right)^a\left(\frac{1}{b}\right)^b\left(\frac{1}{c}\right)^c}，即证.$$

例 5 $n\in N$，试证：$n^n>1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)$.

证明 $\because n=\frac{n^2}{n}=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n}$

$$>[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]^{\frac{1}{n}},$$

$\therefore\ n^n>1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$.

例 6 若 $x>0, n\in N$.

求证 $\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}\leqslant\frac{1}{2n+1}$.

证明 $\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}$

$$=\frac{1}{\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\cdots+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}$$

$$\leqslant\frac{1}{\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n个}+1}=\frac{1}{2n+1}$$ （配成“倒数和”形

式）。

例 7 设m、$n\in N$，且$m>n\geqslant 2$。

求证 $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$。

证明 只要证与之等价的不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} \quad \text{即可。}$$

$$\because \quad \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}$$

$$<\frac{(n-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}{n} \quad \text{（巧妙的一步）}$$

$$=1+\frac{n^{2}+n+1}{n^{3}}=1+\frac{(n-1)(n^{2}+n+1)}{(n-1)n^{3}}$$

$$=1+\frac{n^{3}-1}{n^{3}}\cdot\frac{1}{n-1}<1+\frac{1}{n-1},$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\text{，即证。}$$

下面来看一个关于平均数的一般结论。

例 8 设$a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，引入记号

$$\varphi(n)=n[A(n)-G(n)],$$

其中 $A(n)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$G(n)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$。

求证：$\varphi(n)\geqslant\varphi(n-1)$。

证明 记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i$，$P=\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_i$，则

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)=n\left(\frac{S+a_n}{n}-\sqrt[n]{Pa_n}\right)$$

$$-(n-1)\left(\frac{S}{n-1}-\sqrt[n-1]{P}\right)$$

$$=a_n+P^{\frac{1}{n-1}}(n-1)-\sqrt[n]{Pa_n}\cdot n.$$

$$\because\quad \frac{a_n+(n-1)P^{\frac{1}{n-1}}}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_n\cdot(\sqrt[n-1]{P})^{n-1}}=\sqrt[n]{a_nP}$$

$$\therefore\quad a_n+(n-1)P^{\frac{1}{n-1}}-n\sqrt[n]{a_nP}\geqslant0,$$

即
$$\varphi(n)\geqslant\varphi(n-1).$$

当不等式中涉及的代数式较为复杂时，常常使用变量代换的方法，化简式子后再施以平均值不等式。

例 9 求证：对所有满足条件 $x_1>0, x_2>0, x_1y_1-z_1^2>0$，$x_2y_2-z_2^2>0$的实数$x_1$，$x_2$，$y_1$，$y_2$及$z_1$，$z_2$有不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

证明 令 $a=x_1y_1-z_1^2>0$，$b=x_2y_2-z_2^2>0$，则$x_1y_1=a+z_1^2$，$x_2y_2=b+z_2^2$，于是有

$$\because\quad (x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$$
$$=a+b+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2$$
$$=a+b+\frac{x_1}{x_2}x_2y_2+\frac{x_2}{x_1}x_1y_1-2z_1z_2$$
$$=a+b+\frac{x_1}{x_2}\left(b+z_2^2\right)+\frac{x_2}{x_1}\left(a+z_1^2\right)-2z_1z_2$$
$$=a+b+\left(\frac{x_1}{x_2}b+\frac{x_2}{x_1}a-2\sqrt{ab}\right)+2\sqrt{ab}$$
$$+\left(\frac{x_1}{x_2}z_2^2+\frac{x_2}{x_1}z_1^2-2z_1z_2\right)$$