21世纪高等医学院校教材

主编　张世强

医学高等数学

科学出版社

21世纪高等医学院校教材

医学高等数学

主编　张世强

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书详细阐述了函数与极限、导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、概率论基础和线性代数初步等方面的内容，并在每章后附习题解答与提示。本书起点低、跨度大、主干清晰、层次分明、说理清楚、通俗易懂、便于应用，适合作为医学院校各专业本科及专科学生教材，也可作为医学院校研究生教材及医学工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学/张世强主编．-北京：科学出版社，2001.8

ISBN 7-03-009178-7

Ⅰ．医…　Ⅱ．张…　Ⅲ．医用数学：高等数学　Ⅳ．R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 04027 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2001 年 8 月第 一 版	开本：850×1168 1/16
2001 年 8 月第一次印刷	印张：23
印数：1—5 000	字数：476 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

《医学高等数学》编写人员名单

主　　编　张世强

副主编　姚　莉　罗亚玲

编　　委　陆洪娣　罗亚玲

姚　莉　张世强

前　言

从培养21世纪医学人才的角度看，进一步拓宽医学院校大学生的知识面，增强其创新能力是非常必要的。其中提高医学院校大学生的数学素质应引起重视。在美、英、法等发达国家，理工科大学二年级的优秀生才能进入医学院校；在国内，北京大学医学院从1950年开始即把高等数学定为医学院校学生的必修课。

为了提高医学院校大学生的数学素质，在多年教学经验的基础上，我们编写了这本“医学高等数学”教材。在教材结构上，我们大胆创新，对高等数学的内容进行了大量的精选、优化及浓缩工作。并结合我国国情，将编书的指导思想定为：起点低，跨度大。起点低是指注重内容的实用性，适当兼顾理论体系。对于医药学大学生来说，学习内容的实用性显得更加重要，因此，在选择题材和叙述重点上我们都把实用性放在首位。跨度大是指尽量覆盖医药学领域中常常涉及到的数学知识，让读者能在较少的时间内获得尽可能多的信息量。因此，我们将线性代数、微积分、微分方程、概率论、无穷级数融为一体，着眼于理解概念、掌握方法、学会运用，而且能举一反三。

教材编写的具体分工如下：

主　编　张世强

副主编　姚　莉，罗亚玲

编　委　陆洪娣，罗亚玲，姚　莉，张世强

其中第1章、第2章由罗亚玲执笔；第4章、第7章、第9章由陆洪娣执笔；第5章、第6章由姚莉执笔；第3章、第8章、第10章由张世强执笔。

在本书编写和出版过程中承蒙重庆医科大学教务处、教材科、基础医学院及科学出版社的鼎力支持，在此谨致谢意。

一本好教材理应经得起时间的考验、实践的考验和读者的考验。但愿这本教材会使读者开卷有益。本书的编者也期待得到读者的悉心指教。

编　者

2000年12月

目　　录

第 1 章

函数、极限与连续

现代科学的发展已使各门学科的研究从定性分析阶段发展到定量研究阶段. 当人们从量的角度来描述事物的变化及其规律时,就产生了函数的概念. 函数关系即变量间的依赖关系,它是微积分学的主要研究对象. 极限则是微积分学研究函数的重要方法,即研究变化着的量的方法. 有了它,人们才能够以高于初等数学的观点和技术来研究函数,从而引出了从常量数学到变量数学的飞跃. 而实际问题中出现的函数大多是具有所谓连续性的连续函数.

本章介绍极限的概念及其运算规则,连续函数的概念及其性质.

1.1 函　　数

1.1.1 区间及邻域(interval and neighborhood)

本节首先扼要地介绍一下本书常用的一类数集——区间及其特例邻域.

设 a、b 为实常数,且 $a<b$,则定义如下区间概念:

开区间: $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b, x\in \mathbf{R}\}$;

闭区间: $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$;

半开半闭区间: $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b, x\in \mathbf{R}\}$;

$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$.

以上区间为**有限区间**,下面一类区间统称为**无穷区间**:

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a, x\in \mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqslant a, x\in \mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

邻域是区间的特例. 设 a 为数轴上的某定点,实数 $\delta>0$,则**点 a 的 δ 邻域**指的是数集

$$\{x\,|\,|x-a|<\delta, x\in \mathbf{R}\},$$

记为$\bigcup(a,\delta)$，简记为$\bigcup(a)$. 可见，点a的δ邻域就是区间$(a-\delta,a+\delta)$. 几何上讲，是以点a为中心、以δ为半径的开区间.

1.1.2 函数(function)的定义

定义1 设某一变化过程中存在两个变量x,y，若对于变量x在其变化范围D内的每一个值，按照某个对应法则f，变量y都有惟一确定的值与之对应，则称在法则f下，变量y是确定在D上的**函数**. 记为：

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，称变量x为函数的**自变量**，变量y为函数的**因变量**或**函数变量**. 称D为函数的**定义域**或**存在域**. 当x任取D中的一个值时，与之对应的y值称为**函数值**. 当x遍取D中各值时，相应的y值构成的集合

$$\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**，记为$f(D)$.

决定一个函数的因素是其对应法则f及函数的定义域或存在域D. 一般地，函数的定义域是由数学上函数有无意义来确定的. 当函数关系由实际问题给出时，定义域应由实际问题本身来确定.

例1 求函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$的定义域.

解 欲使函数有定义，必有

$$x^2-4>0,$$

即

$$x<-2 \text{ 或 } x>2,$$

该函数的定义域为$(-\infty,-2)\bigcup(2,+\infty)$.

例2 有人研究20～90岁之间，年龄对肾功能的影响，得出如下经验公式：

$$y=153.2-0.96x,$$

其中x表示年龄(岁)，y表示菊粉清除率[ml/(1.73m². min)]. 则该函数的定义域是[20,90].

1.1.3 函数的表示法

常用的表示函数的方法有3种：

(1) 解析法

解析法即用数学式子表示函数的方法，又称**公式法**. 它是函数表示法中最重要的一种. 其优点在于形式简明，便于用数学分析的方法从理论上研究函数特性，并且可由此得出函数表、函数图形. 但遗憾的是对很多实际问题，要想得到变量间的函数关系并非易事.

有些函数在其定义域的不同范围内必须用不同的数学式子表示. 这种函数被称为**分段函数**.

例 3　静脉注射 G 钠盐 100,000 单位后,血清中的药物浓度 C 为时间 t 的函数 $C(t)$:

$$C(t)=\begin{cases}14.5t, & 0\leqslant t<0.25\\ 4.66-4.26t, & 0.25\leqslant t<1\\ 0.6-0.2t, & 1\leqslant t\leqslant 3\end{cases}$$

其中,时间 t 的单位为 h,$C(t)$的单位为:单位/ml.

上例中 $C(t)$即为一典型的分段函数. 显然 $C(t)$的定义域为[0,3].

在求分段函数的函数值时,应将不同范围的自变量代入相应范围的数学表达式计算;作图时,应在不同分段上根据相应数学表达式作出相应图形. 该例中,可分别计算 $t=0.5$ h 及 $t=2$ h 时的血药浓度如下:

$$C(0.5)=4.66-4.26\times 0.5=2.53 \text{ 单位/ml},$$
$$C(2)=0.6-0.2\times 2=0.2 \text{ 单位/ml}.$$

$C=C(t)$的图像如图 1.1 所示.

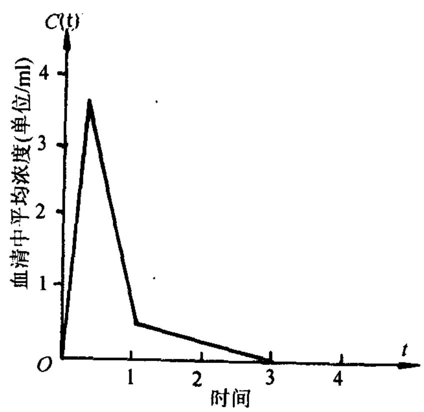


图 1.1

(2) 列表法

列表法是指用表格列出一系列自变量值及其所对应的函数值,以直接显示函数的对应关系的方法. 其特点是简明直接,但难以直接反应出变量间的内在规律. 医学等实验科学中常用此法.

例 4　葡萄糖耐糖试验. 对正常人、轻度糖尿病人及重度糖尿病人,都按1.75 g/kg体重的量口服葡萄糖. 服糖前($t=0$ 时刻)及服糖后 0.5,1,2,3 小时各测一次血糖,有表 1.1 所示的数据.

表 1.1

口服葡萄糖后时刻 t(h)	0	0.5	1	2	3
正常人血糖水平 y_1(mg%)	95	135	150	100	88
轻度糖尿病人血糖水平 y_2(mg%)	115	150	175	165	120
重度糖尿病人血糖水平 y_3(mg%)	200	230	250	255	260

(3) 图像法

图像法是把变量之间的函数关系借助图形表示出来的方法,可形象地表示出函数变化的性状.

如由图 1.1 可分析出,静脉注射使血液中的药物浓度迅速升高(呈直线增加),在 1/4h 左右,血清中的药物浓度达到高峰,但很快消失,3h 后就很难测到了.

图像法在医学上亦经常使用,例如心电图、脑电图等.

1.1.4 函数的几种特性

(1) 单值性与多值性

本书所定义的函数一般称为单值函数,即当自变量 x 在函数定义域 D 内任取一个值时,函数变量 y 只有惟一确定的值与之对应,我们称函数的这一特性为函数的**单值性**.但在另一些情形下,变量 y 有一个以上确定的值与之对应,我们称函数的这一特性为函数的**多值性**.

如 $y=\arcsin x$ 是单值函数,$y=\mathrm{Arcsin}\,x$ 是多值函数.本书涉及的函数主要是单值函数.

(2) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,其中 D 是对称于原点的数集.若对任何 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为**奇函数**;若对任何 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.但大量函数既不是奇函数,也不是偶函数.如函数 $y=\sin x+\cos x$.

(3) 单调性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$.若对 D 中任意两个数 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有:

(i) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调递增**;

(ii) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调递减**.

这时称 $f(x)$ 为**单调函数**.若 $f(x)$ 在某区间内是单调的,则该区间称为 $f(x)$ 的**单调区间**.

若对 $x_1<x_2(x_1,x_2\in D)$,总有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上严格单调递增;读者不难理解严格单调递减.

(4) 周期性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$.若存在某正数 T,使得对 D 内任何 x,关系式

$$f(x+T)=f(x)$$

总成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,并称 T 为 $f(x)$ 的一个**周期**.

显然,若 T 为 $f(x)$ 的一个周期,则 $2T,3T,\cdots$ 均为 $f(x)$ 的周期,故周期函数一定有无限多个周期.

若在周期函数的所有周期中有一个最小周期,则称其为基本周期.

如函数 $y=\sin x$ 为周期函数,其周期为 $2k\pi,k\in\mathbf{N}$,基本周期为 2π.

(5) 有界性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若存在某正数 M,使得对任意 $x\in D$,有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**,并称 $f(x)$ 为 D 上的**有界函数**;否则,称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

有界函数的图像必落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间的带形区域内.

如三角函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的,因为对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,它们的图像均落在 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间的带形区域内.

函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

思考题

1. 下列函数是否恒等?

(i) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$;

(ii) $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$.

2. 比较函数的三种表示法的特点,并思考在何种情形下适用哪种表示法.

3. 分段函数是一个函数还是几个函数? 其定义域如何求?

4. 是否所有周期函数都存在最小正周期?

5. 你能否找到两个区间,使函数 $y=1/x$ 在其中一个区间上有界,在另一个区间上无界?

思考题解答

1. 略.
2. 略.
3. 分段函数是一个函数,其定义域为各分段之和.
4. 不是. 如常数函数 $y=C$,任何正数均为其周期. 它没有最小正周期.
5. 考虑区间 $(1/2,+\infty)$ 与 $(0,1)$.

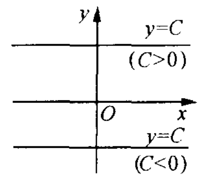
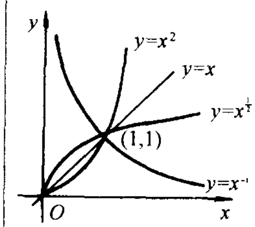
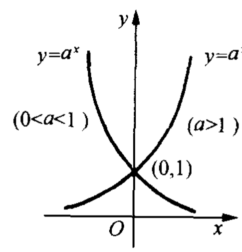
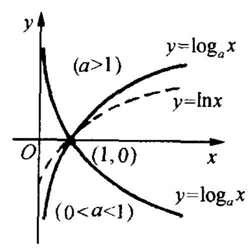
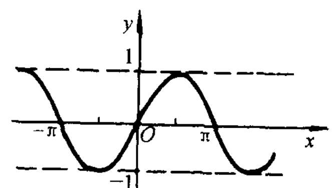
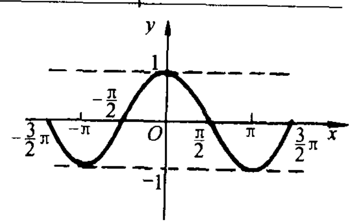
1.2　初等函数

实际问题中常见的函数基本上是初等函数. 而初等函数是以基本初等函数为基础按一定方式构成的. 本节介绍基本初等函数及它们构成初等函数的方式.

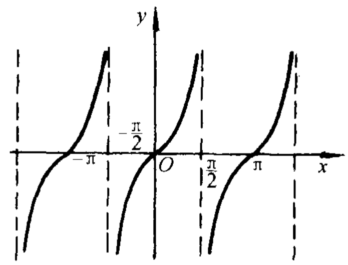
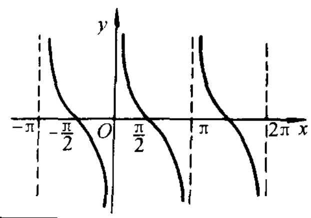
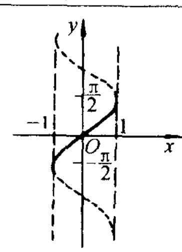
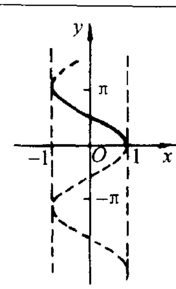
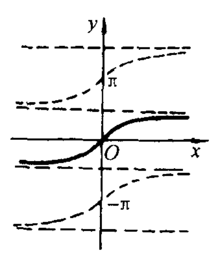
1.2.1　基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六类函数被统称为**基本初等函数**(basic elementary function). 现将这些函数的表达式、定义域、值域、特性及图形列于表 1.2.

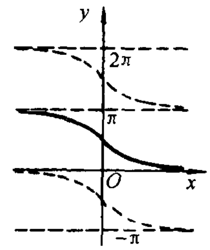
表 1.2

函数名称		表达式	定义域和值域	特性	图形
常量函数		$y=C$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$\{y\mid y=C\}$	偶函数； 不存在最小正周期的周期函数	
幂函数		$y=x^{\alpha}$ （α 为非零实数）	定义域和值域视 α 的取值而定.	奇偶性视 α 的取值而定，图像均过(1，1)点	
指数函数		$y=a^{x}$ （$a>0,a\neq1$）	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$(0,+\infty)$	$a>1$ 时，图像单调递增； $0<a<1$ 时，图像单调递减. 图像过(0,1)点	
对数函数		$y=\log_a x$ （$a>0,a\neq1$）	定义域：$(0,+\infty)$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	$a>1$ 时，图像单调递增； $0<a<1$ 时，图像单调递减. 图像过(1，0)点	
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$[1,-1]$	奇函数； 有界函数； 周期函数（基本周期为 2π）	
	余弦函数	$y=\cos x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$[1,-1]$	偶函数； 有界函数； 周期函数（基本周期为 2π）	

续表 1.2

函数名称		表达式	定义域和值域	特　性	图　形
三角函数	正切函数	$y=\tan x$	定义域： $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in$ **Z** 值域： $(-\infty,+\infty)$	奇函数； 周期函数（基本周期为 π）	
	余切函数	$y=\cot x$	定义域： $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 值域： $(-\infty,+\infty)$	奇函数； 周期函数（基本周期为 π）	
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	定义域： $[-1,1]$ 主值域： $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	主值范围 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$内单调递增	
	反余弦函数	$y=\arccos x$	定义域： $[-1,1]$ 主值域： $[0,\pi]$	主值范围 $[0,\pi]$内单调递减	
	反正切函数	$y=\arctan x$	定义域： $(-\infty,+\infty)$ 主值域： $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	主值范围 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调递增	

续表 1.2

函数名称		表达式	定义域和值域	特　性	图　形
反三角函数	反余切函数	$y=\operatorname{arccot}x$	定义域 $(-\infty,+\infty)$ 主值域: $(0,\pi)$	主值范围 $(0,\pi)$内单调递减	

1.2.2　复合函数

常见函数是由基本初等函数按一定方式构成的,其中最基本的构成方式之一是函数的复合.

定义 1　设函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,D^* 表示 $u=\varphi(x)$的定义域 D 中使得 $y=f(u)$有意义的全体 x 的非空集合.对于函数 $u=\varphi(x)$,当 x 在 D^* 内取值时,所对应的 u 值使得函数 $y=f(u)$有定义,则 y 就通过 u 与 x 建立了函数关系:

$$y=f[\varphi(x)],x\in D^*,$$

这时称 y 为 x 的**复合函数**.其中,称 $y=f(u)$为**外函数**,$u=\varphi(x)$为**内函数**,u 为**中间变量**.

例 1　设 $y=\sqrt{u}$,$u=1-x^2$,求出 y 关于 x 的复合函数.

解　$y=\sqrt{u}$的定义域是$[0,+\infty)$;

$u=1-x^2$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,其中当且仅当 $x\in[-1,1]$时,$u=1-x^2\in[0,+\infty)$.

∴　y 关于 x 的复合函数为:$y=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,1]$.

复合函数概念是为了微积分学中技术上的需要而提出的一个结构性概念.分清复合函数的结构是今后复合函数求导、换元积分的重要基础,也是本门课程的基本功之一.

例 2　试分析下列函数的复合结构:

$$y=a^{x^2},(a>0,a\neq1)$$

解　$y=a^{x^2}$的外函数为 $y=a^u$,令 $u=x^2$ 为中间变量,则 $y=a^{x^2}$可分解为:

$$y=a^u,u=x^2.$$

函数的复合不仅限于两个函数,有时可以由两个以上的函数经过多次复合而构成一个复合函数.请读者参照定义 1 自行定义由 3 个函数复合成一个函数的情况.

例 3　分析 $y=\sqrt[3]{\lg(2x+1)}$ 的复合结构.

解　设 $y=\sqrt[3]{u}$，$u=\lg v$，$v=2x+1$，则 $y=\sqrt[3]{\lg(2x+1)}$ 由上述 3 个基本初等函数复合而成.

1.2.3　反函数

在研究两个变量的函数关系时，若 $y=f(x)$，则认为变量 y 的取值是依赖变量 x 而确定的. 但在实际问题中，有时也需要研究变量 x 对于变量 y 的依赖关系. 例如，在以 v_0 为速度作匀速直线运动的过程中，可以由物体的运动时间 t 来确定物体所通过的路程 s：

$$s=v_0 t, \tag{1.1}$$

但也可以由物体所通过的路程来确定所需的时间：

$$t=\frac{s}{v_0}, \tag{1.2}$$

这时，称函数(1.2)是函数(1.1)的反函数.

定义 2　已知函数

$$y=f(x),x\in D, \tag{1.3}$$

其值域为 $f(D)$. 若对于 $f(D)$ 中每一个值 y_0，D 中只有一个值 x_0，使得

$$f(x_0)=y_0,$$

令 x_0 与 y_0 相对应. 则称由上述法则所确定的函数为函数(1.3)的**反函数**，记为

$$x=f^{-1}(y),y\in f(D).$$

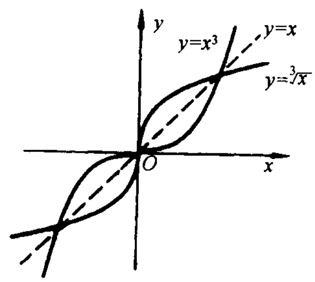


图 1.2

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示函数变量，故(1.3)的反函数通常记为

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D) \tag{1.4}$$

当然，函数(1.3)也是(1.4)的反函数. 故说函数(1.3)和函数(1.4)互为反函数. 函数(1.3)与(1.4)的图像关于直线 $y=x$ 对称. 例如，函数 $y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 与函数 $y=\sqrt[3]{x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 互为反函数. 它们的图像如图 1.2.

下面给出一个反函数存在的充分条件.

定理　严格单调函数必有反函数. 严格递增(减)函数的反函数也严格递增(减).

1.2.4　隐函数

在所讨论的函数中，自变量 x 与函数变量 y 之间的函数关系通常表示为