按教育部新大纲新教材同步编写

黄金搭配

主　编　马　超

撰　文　庞金典

一面讲 一面练

高一数学（下）

龍門書局

www.sciencep.com

黄金搭配

一面讲 一面练

高一数学(下)

主　编：马　超
撰　文：庞金典

龍門書局
北　京

图书在版编目(CIP)数据

黄金搭配·一面讲一面练. 高一数学. 下/马超主编；庞金典编著. —北京：龙门书局，2004. 1

ISBN　7-80191-162-8

I. 黄…　II. ①马…　②庞…　III. 数学课-高中-习题　IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第086772号

责任编辑：吴浩源　魏　华 / 封面设计：耕者设计工作室

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂　印刷

科学出版社发行　各地书店经销

*

2004年1月第一版　开本：787×1092　1/16

2004年1月第一次印刷　印张：8 3/4

印数：1—25 000　字数：200 000

定价：13.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)


黄金搭配
一面讲一面练

前言

亲爱的读者，欢迎你使用《黄金搭配·一面讲一面练》新型练习册！

《黄金搭配·一面讲一面练》高中版共10册，依照教学大纲和人教社高中各科课本编写。为使读者用好这套练习册，下面介绍它的特点。

书名解读

“黄金”是“好”、“最优”的代名词。这套练习册在“讲”与“练”的搭配，同步性与问题分类的搭配，知识点与重难点的搭配，基础题、中等题与难题的搭配，分课讲练与单元综合讲练的搭配，师生共用的搭配等方面的设计都争取最优化，故谓“黄金搭配”。

这套练习册按一面“讲”配一面“练”进行编排，“一面讲一面练”也有一边讲一边练或老师、学生面对面讲练的寓意。

丛书特色

在设计形式上，一面“讲”与一面“练”合成一页，每页均标有剪裁线，页页可撕，互不影响，不是活页胜似活页，学生使用方便，交作业方便，老师批阅方便，家长检查也方便。

在内容策划上，不是单纯的讲完一堂课布置一个练习，因为这种性质的练习在课本上都有课后练习题，我们不拟重复。而目前学生需要的是这样的练习册：在同步的前提下，把一章的知识体系归纳成几类完整的问题(一个完整的问题可能一堂课就能讲完，也可能两三堂课或更多堂课才能讲完)逐一进行讲解，然后根据分类的问题布置练习题。这种形式的练习册在讲解和布题的目的性和综合性、知识的完整性和应试性等方面就提高了一大步。学生使用后，在方法运用和综合能力方面也必然会迅速提高。《黄金搭配·一面讲一面练》就是根据学生的需求策划出来的，这种练习册的优越性是普通练习册所无法比拟的。

完美结合

形式是一面“讲”一面“练”，内容是在同步的前提下按问题分类讲练。所以，这套练习册把二者完美地结合在一起——“以题代讲”，“以讲带练”，“以练为主”。“以题代讲”，就是以“题”讲知识，以“题”讲方法，以“题”讲能力。“以讲带练”，就是以“题”检测知识，以“题”检测方法的运用，以“题”检测能力，通过讲解后练“题”，提高综合能力、创新意识和应试能力。“以练为主”，就是讲解后有同步练习(语文科有分课讲练)、单元综合练习、期中测试、期末测试等练习，可以满足不同程度学生的需求。布题的难度除注意基础题外，中等题和较难题是这套练习册的重点。

使用范围

这套练习册适合中等及中等以上学生使用。由于其同步性强、剪裁方便，可以在课堂教学中使用，也可供学生在课后复习中及家长辅导时使用。由于这套练习册是按问题分类同步编写的，所以也适合使用非人教版教材的地区使用。拥有这套练习册就是拥有一位良师伴读，与良师为伴，将会实现您六月的美好梦想。

圆六月梦，从这里开始；圆六月梦，从拥有《黄金搭配》开始！

编委会

2004年元月于北京

目录

第4章　三角函数 ………… 2

讲　知识结构 / 问题分类　　练

4.1 函数的奇偶性	同步综合训练	3
4.2 函数奇偶性的运用	同步综合训练	5
4.3 角的概念的推广	同步综合训练	7
4.4 弧度制的运用	同步综合训练	9
4.5 任意角的三角函数值的运用	同步综合训练	11
4.6 三角函数线的运用	同步综合训练	13
4.7 任意角的三角函数的综合运用	同步综合训练	15
4.8 同角三角函数的基本关系式运用之一	同步综合训练	17
4.9 同角三角函数的基本关系式运用之二	同步综合训练	19
4.10 正弦、余弦的诱导公式运用之一	同步综合训练	21
4.11 正弦、余弦的诱导公式运用之二	同步综合训练	23
	4.1—4.11 综合能力测试卷	25
4.12 两角和与差的正弦、余弦的运用之一	同步综合训练	27
4.13 两角和与差的正弦、余弦的运用之二	同步综合训练	29
4.14 两角和与差的正切的运用	同步综合训练	31
4.15 两角和与差的正弦、余弦、正切的综合运用	同步综合训练	33
4.16 二倍角的正弦、余弦、正切的运用之一	同步综合训练	35
4.17 二倍角的正弦、余弦、正切的运用之二	同步综合训练	37
	4.12—4.17 综合能力测试卷	39
4.18 正弦、余弦函数图象和性质之一	同步综合训练	41
4.19 正弦、余弦函数图象和性质之二	同步综合训练	43
4.20 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象	同步综合训练	45
4.21 正切函数的图象和性质	同步综合训练	49
4.22 已知三角函数值求角	同步综合训练	51
	4.18—4.22 综合能力测试卷	53

第5章　平面向量 …… 56

讲　知识结构 / 问题分类

练

5.1 向量的概念与性质　◎同步综合训练　57
5.2 向量的加法与减法之一　◎同步综合训练　59
5.3 向量的加法与减法之二　◎同步综合训练　61
5.4 实数与向量的积　◎同步综合训练　63
5.5 平面向量基本定理　◎同步综合训练　65
5.6 平面向量的坐标运算之一　◎同步综合训练　67
5.7 平面向量的坐标运算之二　◎同步综合训练　69
5.8 线段的定比分点及其运用之一　◎同步综合训练　71
5.9 线段的定比分点及其运用之二　◎同步综合训练　73
5.10 平面向量的数量积之一　◎同步综合训练　75
5.11 平面向量的数量积之二　◎同步综合训练　77
5.12 平面向量的数量积的综合运用　◎同步综合训练　81
5.13 平移及其运用　◎同步综合训练　83
◎5.1—5.13 综合能力测试卷　85
5.14 正余弦定理运用之一　◎同步综合训练　87
5.15 正余弦定理运用之二　◎同步综合训练　89
5.16 解斜三角形　◎同步综合训练　91
◎5.14—5.16 综合能力测试卷　93

第二学期期中测试题(三角函数) …… 95

第二学期期末测试题 …… 98

解题思路与答案 …… 101

第4章　101
第5章　119
第二学期期中测试题(三角函数)　131
第二学期期末测试题　133

黄金搭配

学生使用指南

第一步：

上课前，先阅读本单元“知识结构”与“问题分类”，做到对本章内容及结构了然于心。

第二步：

下课后，选择与课堂内容对应的问题，读懂“讲”，仔细体会老师是如何讲题、解题的。

第三步：

读懂“讲”后，可按老师的要求或自己选择与讲对应的“练”——“同步训练”，做题。

第四步：

做完“同步训练”，可交老师批改，或者自己对照本书的“解题思路与答案”，看看答案对了没有，看看解题过程是否规范。

第五步：

本单元所有的问题“讲”、“练”部分都完成了，你就可以做“单元综合能力训练”，看看自己到底掌握了多少。

第六步：

本单元所有的题做完后，你可以再翻到“知识结构”与“问题分类”，进行多方面的记忆与思考。

第七步：

每一单元你都按第一步至第六步学完后，就可以做“期中”或“期末”试题，迎接考试与挑战。

教师使用指南

第一步：

本书内容与教材同步。可通读问题分类的“讲”与“练”，与自己的教学进度相匹配。

第二步：

可选择“讲”中的例题在课堂上讲解。

第三步：

在课堂中或上完 1 ~ 2 节课后，对应“问题分类”中讲完的问题布置“练”，并请学生按剪切线裁下“同步训练”交老师批改。(可要求学生裁下答案部分，交老师保存)

第四步：

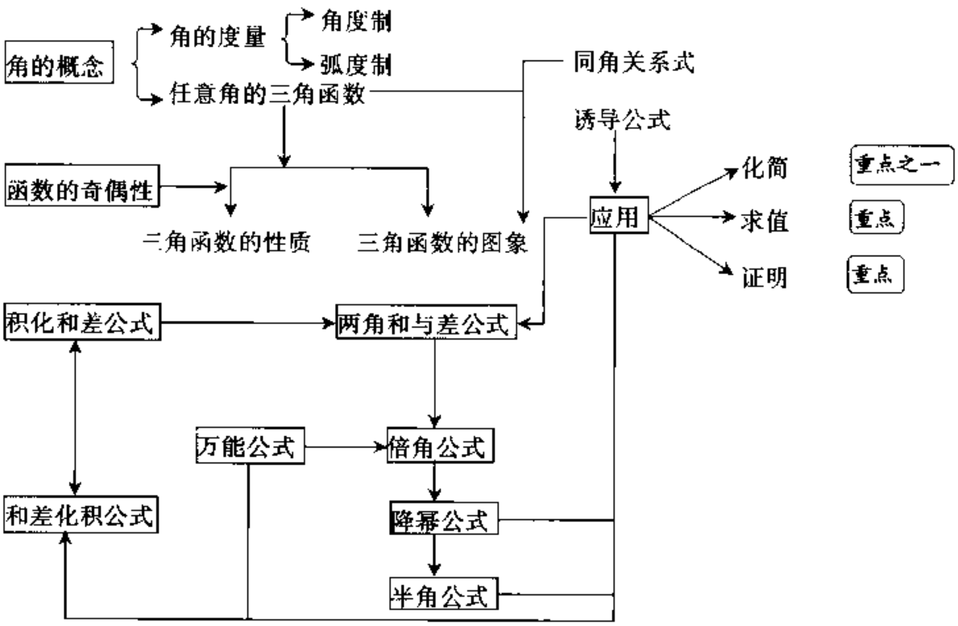
按“思路提示与解答”进行批改。

第五步：

相应的“同步训练”完成后，可布置学生完成“单元综合能力训练”。

第4章 三角函数

知识结构



问题分类

三角函数是中学数学的重要内容之一．研究的方法主要是代数的研究方法．三角函数已初步把代数和几何联系起来．本章主要问题是：

1. 函数的奇偶性
2. 函数奇偶性的运用
3. 角的概念的推广
4. 弧度制的运用
5. 任意角的三角函数值的运用
6. 三角函数线的运用
7. 任意角的三角函数的综合运用
8. 同角三角函数的基本关系式运用之一
9. 同角三角函数的基本关系式运用之二
10. 正弦、余弦的诱导公式运用之一
11. 正弦、余弦的诱导公式运用之二
12. 两角和与差的正弦、余弦的运用之一
13. 两角和与差的正弦、余弦的运用之二
14. 两角和与差的正切的运用
15. 两角和与差的正弦、余弦、正切的综合运用
16. 二倍角的正弦、余弦、正切的运用之一
17. 二倍角的正弦、余弦、正切的运用之二
18. 正弦、余弦函数图象和性质之一
19. 正弦、余弦函数图象和性质之二
20. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象
21. 正切函数的图象和性质
22. 已知三角函数值求角

讲

4.1 函数的奇偶性

例1 判断下列各函数的奇偶性.

(1)$f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$； (2)$f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{|x^2-2|-2}$； (3)$f(x)=\begin{cases}x^2+x & (x<0)\\ -x^2+x & (x>0)\end{cases}$

解析 判断函数的奇偶性，首先应考虑定义域是否关于坐标原点对称.

解 (1) 由 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 得定义域为$[-1,\ 1)$，关于原点不对称，故$f(x)$为非奇非偶的函数.

(2) $\boxed{\text{先求定义域}}\Rightarrow$ 由$\begin{cases}1-x^2>0\\ |x^2-2|-2\neq 0\end{cases}$ 得定义域为$(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$

进一步验证$f(-x)=\pm f(x)$是否成立　　关于原点对称

$\because\ f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{-(x^2-2)-2}=\dfrac{\lg(1-x^2)}{-x^2}$. 又$f(-x)=\dfrac{\lg[1-(-x)^2]}{-(-x)^2}=f(x)$

$\therefore\ f(-x)=f(x)$，即$f(x)$为偶函数.

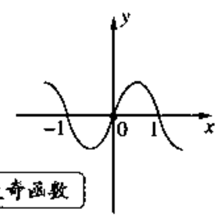
(3) 方法1：当$x<0$时，$-x>0$，则$f(-x)=-(-x)^2-x=-(x^2+x)=-f(x)$

当$x>0$时，$-x<0$，则$f(-x)=(-x)^2-x=x^2-x=-(-x^2+x)=-f(x)$

综上所述，对任意的$x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$都有$f(-x)=-f(x)$

$\therefore\ f(x)$为奇函数.

方法2：　　可先画出对应函数的图象，从图象的形状上可以判定奇偶函数



从图形上可知，函数图象关于原点对称.

$\therefore$ 函数$y=f(x)$是奇函数.　　如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数

归纳 判断函数的奇偶性，首先看函数的定义域是否关于原点对称；在定义域关于原点对称的条件下，再根据$f(-x)$与$f(x)$的关系作出判断. 对于第(1)小题，若先化简$f(-x)=\sqrt{(1-x)^2\dfrac{1+x}{1-x}}=-\sqrt{1-x^2}$，将扩大函数的定义域，作出错误的判断. 对于第(3)小题，可用两种方法来进行判断.

例2 判断函数$f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$的奇偶性.

解析 本题可采用两种方法进行判定.

解 方法1：定义法 $\Rightarrow$ 函数的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$

$$\begin{aligned}\because\ f(-x)&=-x\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=-x\left(\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}\right)\\&=x\left(\frac{2^x}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{2^x-1+1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)\\&=x\left(1+\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=f(x)\end{aligned}$$

$\therefore\ f(x)$为偶函数.

方法2：利用$f(x)\pm f(-x)=0$来判断函数的奇偶性

$\because\ f(-x)-f(x)=-x\left(\dfrac{1}{2^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)-x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)=-x\left(\dfrac{1-2^x}{2^x-1}+1\right)=0$

$\therefore\ f(-x)=f(x)$.

归纳 为便于判断函数的奇偶性，有时用定义的等价形式 $f(-x)=\pm f(x)\Leftrightarrow f(-x)\pm f(x)=0$ $\Leftrightarrow\dfrac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1\quad(f(x)\neq 0)$.

班级______ 姓名______

4.1 同步综合训练

练习

选择题：

1\. 函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$的图象关于（　）

A. x轴对称　　B. y轴对称　　C. 原点对称　　D. 直线$x=1$对称

2\. $F(x)=\left(1+\dfrac{2}{2^x-1}\right)f(x)$ $(x\neq 0)$是偶函数，且$f(x)$不恒等于零，则$f(x)$（　）

A. 是奇函数　　B. 是偶函数

C. 可能是奇函数也可能是偶函数　　D. 不是奇函数也不是偶函数

3\. 对于定义在R上的任何奇函数，均有（　）

A. $f(x)-f(-x)>0$　　B. $f(x)-f(-x)\leqslant 0$

C. $f(x)f(-x)>0$　　D. $f(x)f(-x)\leqslant 0$

4\. 已知$f(x)=\dfrac{a(2^x+1)-2}{2^x+1}$是奇函数，那么实数$a$的值等于（　）

A. 1　　B. −1　　C. 0　　D. ±1

5\. 已知函数$y=f(x)$在R上是奇函数，且当$x\geqslant 0$时，$f(x)=x^2-2x$，则$f(x)$在R上的解析表达式是（　）

A. $f(x)=x(x-2)$　　B. $f(x)=|x|(x-2)$

C. $f(x)=|x|(|x|-2)$　　D. $f(x)=x(|x|-2)$

填空题：

6\. 函数$f(x)=ax^2+bx+c$是奇函数而非偶函数的充要条件是__________.

7\. 已知$f(x)=a_0+a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}(n\in N_+)$，其中，$a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}$为常数. 若$f(1996)=b$，则$f(-1996)=$__________.

8\. 已知偶函数$f(x)$满足$f(x+3)=f(x)$，且$f(1)=-1$，则$f(5)+f(11)$的值为________.

9\. 已知$f(x)$是定义在$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$上偶函数. 当$x>0$时$f(x)=\log_2 x$，则$x<0$时，$f(x)$的表达式为________.

10\. 若$f(x)$是偶函数，$g(x)$为奇函数，且$f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，则$f(x)=$______，$g(x)=$________.

解答题：

11\. 若$f(x)$、$g(x)$都为奇函数，且$F(x)=af(x)+bg(x)+2$在$(0, +\infty)$上有最大值8. 求$F(-x)$的最小值.

12\. 已知函数$f(x)=ax^2+bx+3a+b$为偶函数，其定义域为$[a-1, 2a]$ $(a, b\in R)$，求$f(x)$的值域.

讲

4.2 函数奇偶性的运用

例1 已知函数$y=f(x)$的图象关于原点对称，且当$x>0$时，$f(x)=x^2-2x+3$，试求$f(x)$在R上的表达式，并画出它的图象，再根据图象写出它的单调区间.

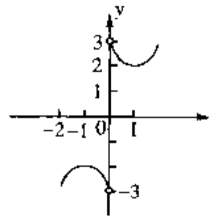
解析 由函数图象关于原点对称可知$y=f(x)$是奇函数，利用奇函数概念可求得解析式.

解 ∵ 函数$f(x)$的图象关于原点对称，∴ $f(x)$为奇函数，则$f(0)=0$

设$x<0$，则$-x>0$，∴ $f(x)=-f(-x)=-(x^2+2x+3)=-x^2-2x-3$

$\boxed{f(-x)=-f(x)\text{中令 }x=0}$

于是有 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2-2x-3 & (x<0)\end{cases}$



先画出函数在y轴右边的图象，再根据对称性画出y轴左边的图象. 由图知，单增区间为$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$，单减区间为$(-1,0)$和$(0,1)$.

例2 设函数$f(x)$是奇函数，对任意x，$y\in$ R都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，且$x>0$时$f(x)<0$，$f(1)=-2$，求$f(x)$在$[-3,3]$上的最大值和最小值.

解 设$x_2<x_1$，则$x_1-x_2>0$，∴ $f(x_1-x_2)<0$ $\boxed{x>0\text{ 时 }f(x)<0}$

又$f(x_1)=f[(x_1-x_2)+x_2]=f(x_1-x_2)+f(x_2)<f(x_2)$

$\boxed{f(x_1-x_2)<0}$

于是有$x_2<x_1$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，∴ $f(x)$是减函数.

∴ $f(x)_{max}=f(-3)=3f(-1)=-3f(1)=6$，$f(x)_{min}=f(3)=-f(-3)=-6$

例3 设a为实数，函数$f(x)=x^2+|x-a|+1$，$x\in$ R. ① 讨论$f(x)$的奇偶性；② 求$f(x)$的最小值. $\boxed{\text{对 }a\text{ 的值分类讨论}}$

解 (1) 当$a=0$时，函数$f(-x)=(-x)^2+|-x|+1=f(x)$. 此时$f(x)$为偶函数；当$a\neq0$时，

∵ $f(a)=a^2+1$，$f(-a)=a^2+2|a|+1$，$f(-a)\neq f(a)$，$f(-a)\neq-f(a)$ $\boxed{\text{取特值法说明不是奇偶函数}}$

此时函数$f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数.

(2) ① 当$x\leqslant a$时，函数$f(x)=x^2-x+a+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+a+\dfrac{3}{4}$

若$a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上单调递减，从而函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上的最小值为$f(a)=a^2+1$. 若$a>\dfrac{1}{2}$，则函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上的最小值为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}+a$，且$f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

② 当$x\geqslant a$时，函数$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-a+\dfrac{3}{4}$； $\boxed{\text{对称轴为 }x=-\dfrac{1}{2}}$

若$a\leqslant-\dfrac{1}{2}$时，则函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上的最小值$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}-a$，且$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

若$a>-\dfrac{1}{2}$时，则函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调递减，从而函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上的最小值为$f(a)=a^2+1$.

综上可知：当$a\leqslant-\dfrac{1}{2}$时，函数$f(x)$最小值$\dfrac{3}{4}-a$；

当$-\dfrac{1}{2}<a\leqslant\dfrac{1}{2}$时，函数$f(x)$最小值为$a^2+1$；当$a>\dfrac{1}{2}$时，函数$f(x)$的最小值为$a+\dfrac{3}{4}$.

归纳 对于求$f(x)=ax^2+bx+c$在闭区间$[m,n]$上的最值问题，应注意讨论对称轴$x=-\dfrac{b}{2a}$与$[m,n]$之间的关系，从而确定单调性，进而求最值点.

班级______ 姓名______

4.2 同步综合训练

选择题：

1. 如果函数 $y=f(x)$是偶函数，其图象与 x 轴有四个交点，则方程 $f(x)=0$ 的所有实根之和是（　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

2. 已知 $f(x)$为偶函数，它的定义域为R，在[0，+∞)上递减，那么一定有（　）

A. $f\left(-\frac{3}{4}\right)>f(a^2-a+1)$　　B. $f\left(-\frac{3}{4}\right)\geqslant f(a^2-a+1)$

C. $f\left(-\frac{3}{4}\right)<f(a^2-a+1)$　　D. $f\left(-\frac{3}{4}\right)\leqslant f(a^2-a+1)$

3. 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，那么（　）

A. $f(2)<f(1)<f(4)$　　B. $f(1)<f(2)<f(4)$

C. $f(2)<f(4)<f(1)$　　D. $f(4)<f(2)<f(1)$

4. 若函数 $y=f(x)$是偶函数，$x\in$ R，在 $x<0$ 时，y 是增函数. 对于 $x_1<0$，$x_2>0$，且 $|x_1|<|x_2|$，则（　）

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$　　B. $f(-x_1)<f(-x_2)$

C. $f(-x_1)=f(-x_2)$　　D. $f(-x_1)\geqslant f(-x_2)$

5. 奇函数 $f(x)$在区间[3，7]上是增函数，且最小值为 5，则 $f(x)$在区间[−7，−3]上是（　）

A. 增函数且最大值−5　　B. 增函数且最小值−5

C. 减函数且最大值−5　　D. 减函数且最小值−5

填空题：

6. 已知函数 $f(x)$为奇函数，并且在区间[0，4]上是减函数，那么 $f(-\pi)$和 $f\left(\log_2\frac{1}{8}\right)$的大小关系是________________.

7. 若 $f(x)$在定义域 R 上是偶函数，且当 $x\geqslant 0$ 时为增函数，那么使 $f(\pi)<f(a)$的实数 a 的取值范围为__________.

8. 函数 $f(x)$是定义域 R 的偶函数，且在(0，+∞)上是减函数，$p=f\left(-\frac{3}{4}\right)$，$q=f(a^2-a+1)$　(a 为任意实数)的大小关系是____________.

9. 设 $f(x)$在(−∞，+∞)上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)=$____________.

10. 若奇函数 $f(x)$在定义域(−1，1)是递减，则满足不等式 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$ 的 a 的取值范围____________.

解答题：

11. 设定义域 R 上的函数 $f(x)$既是单调函数又是奇函数. 若 $f(k\cdot\log_2 t)+f(\log_2 t-\log_2^2 t-2)>0$ 对一切 $t\in \mathrm{R}^+$成立，求实数 k 的取值范围.

12. 已知 $y=f(x)$为(−∞，+∞)上的奇函数，且是(0，+∞)上是增函数.

① 求证：$y=f(x)$在(−∞，0)上也是增函数；② 若 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，解不等式 $-1<f(\log_4 x)\leqslant 0$.

4.3 角的概念的推广

例1 已知α为第二象限角时，求$\dfrac{\alpha}{2}$所在的象限.

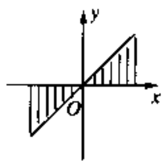
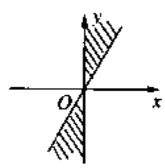
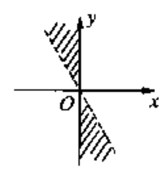
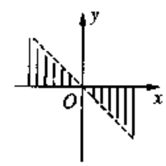
解析 已知α为某象限时，求$\dfrac{\alpha}{2}$所在的象限时应注意对k进行分类讨论.

解 $\because$ α为第二象限的角，$\therefore$ $90^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot360^\circ$ $(k\in Z)$

$\therefore$ $45^\circ+k\cdot180^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<90^\circ+k\cdot180^\circ$ $(k\in Z)$ 对k分类讨论

当k为偶数时，$\dfrac{\alpha}{2}$为第一象限角；当k为奇数时，$\dfrac{\alpha}{2}$为第三象限角；

归纳

α所在象限	I	II	III	IV
$\dfrac{\alpha}{2}$所在象限	I或III	I或III	II或IV	II或IV
$\dfrac{\alpha}{2}$的简图				

例2 已知$\alpha=1690^\circ$，(1) 把α改写成$k\cdot360^\circ+\beta$ $(k\in Z,\ 0^\circ\leqslant\beta<360^\circ)$的形式；(2) 求$\theta$，使$\theta$与$\alpha$的终边相同，且$-360^\circ<\theta<360^\circ$，并判定$\theta$属于第几象限.

解 (1) $\alpha=4\cdot360^\circ+250^\circ$ $(k=4,\ \beta=250^\circ)$

(2) $\because$ θ与α终边相同，$\therefore$ θ角可写成$k\cdot360^\circ+250^\circ$

$\because$ 与α终边相同角都能写成$\beta=\alpha+k\cdot360^\circ$，$k\in Z$，

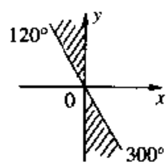
由于$-360^\circ<k\cdot360^\circ+250^\circ<360^\circ$ $(k\in Z)$

解得$k=-1$，0.

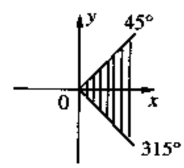
$\therefore$ $\theta=-110^\circ$或250°，故θ属于第三象限.

归纳 (1) 判断一个角属于第几象限，通常表示为$k\cdot360^\circ+\alpha$ $(0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ,\ k\in Z)$，只要判定$\alpha$所在象限即可.

(2) 求符合某条件且与已知角终边相同的角，先写出与已知角终边相同的角的一般式，再依条件讨论k.



(1)



(2)

例3 如图，阴影表示角α的终边所在位置，写出角α的集合.

解 (1) $\{\alpha\mid k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+120^\circ$或$k\cdot360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+300^\circ,\ k\in Z\}$

(2) $\{\alpha\mid k\cdot360^\circ-45^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+45^\circ,\ k\in Z\}$

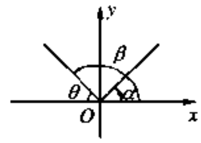
注：(2)易错写为$k\cdot360^\circ+315^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+45^\circ$；象限角、区间角、终边相同的角是三个不同的概念. 如第三象限角表示$k\cdot360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+270^\circ$，当$k$取不同的整数时，产生不同的区间角. 区间$180^\circ<\alpha<270^\circ$是$k=0$时的特殊情况，不能用它表示所有的或任意的第三象限角；等角终边相同，反之不然，终边相同的角有无数多个，它们相差360°的整数倍.

班级______ 姓名______

4.3 同步综合训练

选择题：

1. 如图，若角α 与β 的终边关于y轴对称，则$\alpha+\beta$ 等于（　）



A. $k\cdot360°+180°\quad(k\in Z)$　　B. $k\cdot180°+180°\quad(k\in Z)$

C. $k\cdot360°+90°\quad(k\in Z)$　　D. $k\cdot180°+90°\quad(k\in Z)$

2. 下列正确命题是（　）

A. 终边相同的角相等　　B. 第一象限的角都是锐角

C. 第二象限角比第一象限的角大　　D. 小于 90°的角不一定是锐角

3. 下列角中，终边与 330°相同的角是（　）

A. $-630°$　　B. $-1830°$　　C. $30°$　　D. $990°$

4. 若α 为锐角，$k\cdot180°+\alpha\quad(k\in Z)$所在的象限是（　）

A. 第一象限　　B. 第一、二象限

C. 第一、三象限　　D. 第一、四象限

5. 若角α 与β 的终边垂直，则α 与β 的关系是（　）

A. $\beta=\alpha+90°$　　B. $\beta=\alpha\pm90°$

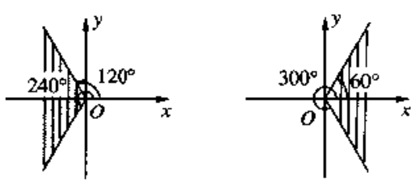
C. $\beta=k\cdot360°+\alpha+90°\quad(k\in Z)$　　D. $\beta=k\cdot360°+\alpha\pm90°\ (k\in Z)$

填空题：

6. 与$-496°$终边相同的角是________，它是第____象限的角；它们中最小正角是_______，最大负角是_______.

7. α 为正角、β 为负角，α、β 终边关于原点对称，则$\alpha-\beta=$________.

8. 终边落在下图阴影部分(包括边界)的角的集合：(1) ______；(2) ______.



(1)　　(2)

9. 终边在第一、第二象限的角的集合是__________，终边在第二、第四象限的角的集合是______________.

10. 若α 为第三象限角，那么$-\alpha$、$\frac{\alpha}{2}$、2α 的终边分别在何处：________，________，________.

解答题：

11. 当 12 点过$\frac{1}{4}$小时的时候，时钟长、短针的夹角是多少度？

12. 若α 角的终边与 60°角的终边相同，在 0° ~ 360°间哪些角的终边与$\frac{\alpha}{3}$角的终边相同？

讲

4.4 弧度制的运用

例1 已知扇形的周长是6cm，面积为2cm^2，则扇形的中心角的弧度数是（ ）

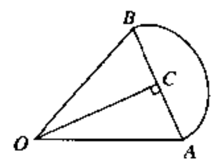
A. 1　　B. 4　　C. 1或4　　D. 2或4

解 设此扇形的半径是r，弧长是l，则$\begin{cases}2r+l=6\\ \dfrac{1}{2}rl=2\end{cases}$　　$\boxed{\because\ l=|\alpha|\cdot r}$

解之得：$\begin{cases}r=1\\ l=4\end{cases}$或$\begin{cases}r=2\\ l=2\end{cases}$

例2 一弧度的圆心角所对的弦长是2，求这个圆心角所对的弧长及圆心角所夹扇形的面积.

解 如图，作$OC\perp AB$于C，则C是AB之中点.



$AC=1$，$\angle AOC=\dfrac{1}{2}$弧度

$r=OA=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$，$\therefore\ L=|\alpha|\cdot r=1\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$，$S_{扇形}=\dfrac{1}{2}L\cdot r=\dfrac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}}$

$\boxed{注意\alpha\ 应为弧度单位}$

注：弧度制下的扇形面积公式为$S=\dfrac{1}{2}L\cdot R=\dfrac{1}{2}\alpha\cdot R^2$.

例3 用弧度制表示终边在直线$y=-\sqrt{3}x$上的角α的集合.

解 终边在$y=-\sqrt{3}x$上的角与$\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$及$2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{3}\pi$的终边相同，从而有：

$$\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=2k\pi+\frac{2}{3}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=2k\pi+\frac{5}{3}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$$

$$=\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=(2k)\pi+\frac{2}{3}\pi 或\alpha=(2k+1)\pi+\frac{2}{3}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=n\pi+\frac{2}{3}\pi,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$$

例4 把下列角化成$2k\pi+\alpha$ $(0\leqslant\alpha<2\pi,\ k\in\mathbf{Z})$的形式，并指出它们是第几象限角.

(1) $-1500°$；(2) 1999π；(3) -4.

解 (1) $-1500°=-1500°\cdot\dfrac{\pi}{180°}=-\dfrac{25}{3}\pi=-10\pi+\dfrac{5}{3}\pi$　　$\boxed{写为\ 2k\pi+\alpha}$

$\boxed{1°=\dfrac{\pi}{180}(弧度)}$

$\therefore$ $-1500°$为第四象限角.

(2) $1999\pi=2\cdot999\pi+\pi$，$\therefore$ 1999π不属于任何象限. (4) $-4=-2\pi+(2\pi-4)$，$\therefore$ -4为第二象限角.

归纳 在此类问题中应由题设条件选择相应的角的度量单位，同一问题中单位制度要统一. 如$-1500°=-10\pi+300°$这种写法是错误的；注意题设所要求的条件，弄清用弧度制表示终边相同的角的方法，以防出错.

例5 已知一扇形的周长为$c\,(c>0)$. 当扇形的中心角为多少弧度时，它有最大的面积？

解 设扇形半径为r，中心角为$\alpha\,(\alpha>0)$，扇形的面积为S，则$c=2r+\alpha r$　$\boxed{\alpha\ 为弧度}$

$\Rightarrow r=\dfrac{c}{2+\alpha}$，故：$S=\dfrac{1}{2}\alpha r^2=\dfrac{c^2\alpha}{2\alpha^2+8\alpha+8}$，整理，得：$2S\alpha^2+(8S-c^2)\alpha+8S=0$　　①

由$S\neq0$及$\Delta\geqslant0$知：$-16Sc^2+c^4\geqslant0$，又$\because$ $c\neq0$，$\therefore$ $S\leqslant\dfrac{c^2}{16}$，即扇形有最大面积$\dfrac{c^2}{16}$.

$\boxed{利用判别式法}$

将$S=\dfrac{c^2}{16}$代入①式检验，解之得$\alpha=2$（弧度）. 故当扇形中心角为2弧度时，扇形有最大面积$\dfrac{c^2}{16}$.

班级______ 姓名______

4.4 同步综合训练

选择题:

1. 已知集合 $P=\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z\right\}$，下列集合中与 P 相等的是（　）

A. $\left\{\alpha \middle| \alpha=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in Z\right\}$　　B. $\{\alpha|\alpha=n\pi,\ n\in Z\}$

C. $\left\{\alpha \middle| \alpha=2n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in Z\right\}$　　D. $\left\{\alpha \middle| \alpha=n\pi\text{或}\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in Z\right\}$

2. $\alpha=-2$，则α 的终边在（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列关系式中，正确的是（　）

A. $\cos 1<\cos 1^\circ$　　B. $\cos 1>\cos 1^\circ$　　C. $\cos 1=\cos 1^\circ$　　D. $\pi=\pi^\circ$

4. 集合 $P=\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi,\ k\in Z\}$

$Q=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$，则 $P\cap Q=$（　）

A. $\varnothing$　　B. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi\text{或}0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

C. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$　　D. $\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

5. 一圆内切于中心角为 $\frac{\pi}{3}$，半径为 R 的扇形，则该圆的面积与该扇形的面积之比为（　）

A. 3 : 4　　B. 2 : 3　　C. 1 : 2　　D. 1 : 3

填空题:

6. 若两个角的差是 1°，它们的和是 1 弧度，则这两个角的弧度数分别是________.

7. 一个扇形的面积为 1，周长为 4，则中心角的弧度数为________.

8. 与 $-\frac{25}{6}\pi$ 终边相同的角α 是__________，其中绝对值最小的角是______.

9. 集合 $A=\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ k\in Z\right\}$与 $B=\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}$之间的关系是________________.（填$\supsetneqq$、$\subsetneqq$、=）

10. 一个半径为 R 的扇形，它的周长是 $4R$，则这个扇形中所含弓形的面积是__________.

解答题:

11. 以 x 轴的正向为始边的角的终边 OP 过点$(-\sqrt{3},\ -1)$.

(1) 写出以 OP 为终边的所有角的集合；(2) 写出 OP 在区间$(-5\pi,\ 5\pi)$上对应的角的集合.

12. 如图，圆周上点 A 依逆时针方向做匀速圆周运动. 已知 A 点 1 分钟转过 $\theta(0<\theta<\pi)$角，2 分钟到达第三象限，14 分钟后回到原来的位置. 求θ.