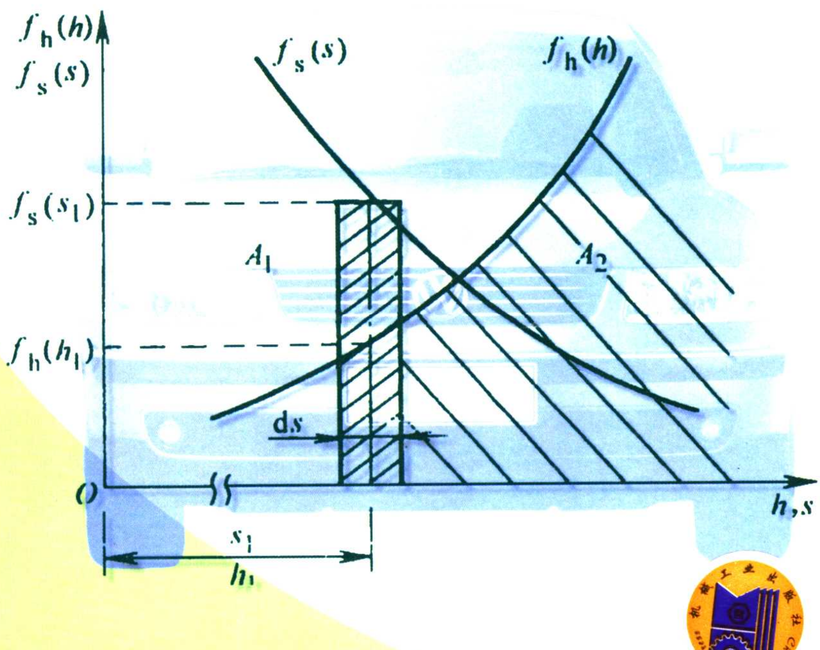
普通高等教育“十五”国家级规划教材

汽车可靠性理论

武汉理工大学 明平顺
长 安 大 学 李晓霞 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

汽车可靠性理论

明平顺　李晓霞　主编

机 械 工 业 出 版 社

本书力求反映汽车工程及汽车运用工程中的新技术，主要介绍汽车可靠性理论基础；汽车可靠性试验、可靠性设计及汽车系统可靠性评价；汽车维修性和汽车失效分析。书中列举了多种类型的工程实例，便于读者了解可靠性的基础和方法，以加深对汽车产品全寿命周期可靠性的全面认识。

图书在版编目（CIP）数据

汽车可靠性理论/明平顺，李晓霞主编. —北京：机械工业出版社，2002. 12

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 7-111-10034-4

Ⅰ. 汽… Ⅱ. ①明… ②李… Ⅲ. 汽车—可靠性理论—高等学校—教材 Ⅳ. U461.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 078853 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

责任编辑：杨民强 王正琼 版式设计：张世琴 责任校对：刘志文

封面设计：姚 毅 责任印制：付方敏

北京市密云县印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2003 年 1 月第 1 版 · 第 1 次印刷

1000mm × 1400mm B5 · 6.625 印张 · 254 千字

0 001—3 000 册

定价：20.00 元

前　言

本书是根据2000年11月在昆明市召开的全国高等学校汽车运用工程专业教学指导委员会第二届五次会议通过的适用于载运工具运用工程学科和车辆工程学科的《汽车可靠性理论》教材编写大纲和交通类“十五”教材规划编写的。2002年5月30日教育部（教高函［2002］17号）将该教材列入“十五”国家级规划教材。它既可以作为高等学校相关学科研究生学位课程教材，又可作为高等学校车辆工程类专业、交通运输类（本科）专业的选修课教材，同时也可作为工程技术人员的参考文献。

本书力求反映汽车工程、汽车运用工程中的新技术，贯彻少而精、理论联系实际的原则，主要介绍了汽车可靠性理论基础、汽车可靠性试验、汽车可靠性设计、汽车系统可靠性评价、汽车维修性和汽车失效分析。书中列举了多种类型的工程实例，使读者了解和熟悉可靠性的基础和方法，拓宽和加深对汽车产品全寿命周期可靠性的全面认识。

本书由武汉理工大学明平顺教授、长安大学李晓霞副教授主编，参加编写者有武汉理工大学余新华讲师（第一章），武汉理工大学明平顺教授（第二章），湖北汽车工业学院肖生发副教授（第三章第一、二节），武汉理工大学余晨光讲师（第三章第三节），长安大学李晓霞副教授（第四、五、六章）。全书由明平顺教授统稿。

为力求全面地阐明汽车可靠性理论，努力反映该领域的最新成果，书中参考了大量文献资料，在此谨向所有这些文献的作者深表谢意。

由于我们的水平有限，本书难免有不妥、甚至错误之处，诚恳欢迎使用本书的师生和广大读者不吝指正。

编　者

2002年10月

参 考 文 献

1 刘惟信．机械可靠性设计．北京：清华大学出版社，1996
2 盛骤．概率论与数理统计（第二版）．北京：高教出版社，1989
3 曹晋华，程侃．可靠性数学引论．北京：科学出版社，1986
4 何国伟主编．可靠性试验技术．北京：国防工业出版社，1995
5 明平顺，杨万福主编．现代汽车检测技术．北京：人民交通出版社，2001
6 朱文予．机械可靠性设计．上海：上海交通大学出版社，1992
7 郦明等著．汽车结构抗疲劳设计．合肥：中国科技大学出版社，1995
8 贺国芳主编．可靠性数据的收集与分析．北京：国防工业出版社，1995
9 肖德辉．可靠性工程．北京：宇航出版社，1985
10 张义民．汽车零部件可靠性设计．北京：北京理工大学出版社，2000
11 周玉明．汽车可靠性设计概念．重庆：重庆大学出版社，1988
12 E·B毫根．机械概率设计．北京：机械工业出版社，1985
13 R. 别林登 R.N. 阿伦．工程系统可靠性评估——原理和方法．重庆：科学技术出版社重庆分社，1988
14 戴冠军主编．汽车维修工程．北京：人民交通出版社，1999
15 王少萍．工程可靠性．北京：北京航空航天出版社，2000
16 刘品主编．可靠性工程基础．北京：中国计量出版社，1995
17 蒲维达．汽车可靠性工程．北京：机械工业出版社，1998
18 王秉刚．汽车可靠性工程方法．北京：机械工业出版社，1991
19 陈南平，顾守仁，沈万慈．机械零件失效分析．北京：清华大学出版社，1988
20 田蔚风，金志华．可靠性技术．上海：上海交通大学出版社，1996
21 孙桂林．可靠性与安全生产．北京：化学工业出版社，1996
22 陆廷孝，郑鹏洲主编．可靠性设计与分析．北京：国防工业大学出版社，1995
23 洪基麟主编．机械结构可靠性．北京：航空工业出版社，1993

目　　录

第一章　汽车可靠性理论基础

第一节　常用的可靠性理论分布

一、可靠性的基本概念

人们经常评价某一事物可靠、不可靠或某产品耐用、不耐用等。这是简单的评价和比较，它是表面的定性认识，给人的印象是模糊的。随着科学技术的发展，设备和系统越来越复杂，简单定性可靠性评价已不能满足需要，用现代科技理论和计算手段进行科学的定量可靠性分析，是历史的必然。

1. 可靠性的定义

元件、设备和系统等在规定的条件和预定的时间内完成规定功能的概率，定义为可靠性。由此可知，可靠性是以概率来衡量的，可见概率统计是可靠性分析的基础。

设元件或系统的寿命为随机变量 X（时间），X 的分布函数为 $F(t)$，X 的密度函数为 $f(t)$，下面定义几个重要的可靠性的基本概念。

2. 可靠度函数

分布函数 $F(t)=P(X\leqslant t)$，当 t 不变时，$F(t)$ 越大，寿命小于 t 的概率越大，那么寿命大于 t 机会越小。所以 $F(t)$ 越大对元件的寿命越不利，因此定义 $F(t)$ 为不可靠度函数。

设 $R(t)=P(X>t)=1-F(t)$，当 t 不变时，$R(t)$ 越大，寿命大于 t 机会越大。所以 $R(t)$ 越大对元件的寿命越有利。因此，定义 $R(t)$ 为可靠度函数。

3. 平均寿命

平均寿命：
$$EX=\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$$

产品分为可修复与不可修复产品，其平均寿命含义不同。对不可修复产品平均寿命是指从开始到发生故障的平均时间，记为 MTTF（Mean Time To Failure）；对可修复产品平均寿命是指一次故障到下一次故障的平均时间，即平均故障间隔里程，记为 MTBF（Mean Time Between Failure）。

4. 条件可靠度函数

条件可靠度函数 $h(t)$：已知寿命大于 t 的条件下，在 t 处单位时间内失效

的概率。

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X < t + \Delta t / X > t)}{\Delta t}$$

根据 $h(t)$ 的定义

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X < t + \Delta t / X > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X < t + \Delta t)}{\Delta t\, P(X > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t\, P(X > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{P(X > t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned}$$

$h(t)$ 也称为故障率或失效率。

二、可靠性分析中常用的分布

1. 正态分布

在研究随机现象的概率分布中，最普通和应用最广的分布就是正态分布。

若寿命 X 为正态分布，则概率密度函数为：

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[- \frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

μ 和 σ 为常数　　　　$\mu = EX; \sigma^2 = DX$

正态分布由 μ 和 σ^2 唯一确定，因此正态分布可记为 $N(\mu, \sigma^2)$。

$N(0, 1)$ 称为标准正态分布，概率密度函数为：

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{1}{2} t^2 \right)$$

分布函数记为 $\Phi(t)$：　$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{1}{2} t^2 \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$。

正态分布有以下性质：

1）任意有限个正态分布的线性组合为正态分布。

2）任何随机变量 X 不论什么分布，只要期望 EX、方差 DX 已知，在某种条件下，可以认为随机变量 X 近似服从正态分布 $N(EX, DX)$。二项分布、泊松分布、样本均值都可用正态分布进行近似计算。

2. 对数正态分布

若寿命 X 的自然对数 $\ln X$ 为正态分布，即 $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则称 X 服从对数正态分布，记 $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$。下面，求其概率密度函数：

因　　$Y = \ln X \sim f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[- \frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$

$$X = e^y; x = g(y) = e^y; g^{-1}(t) = \ln t$$

根据公式 $X \sim f(t) = f_Y(g^{-1}(t))\,|g^{-1}(t)'|$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad t>0$$

此时
$$EX = \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$DX = (e^{\sigma^2}-1)\exp(2\mu+\sigma^2)$$

3. 指数分布

若寿命 X 的概率密度函数为:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t>0 \\ 0 & t\leqslant 0 \end{cases} \qquad (\lambda>0)$$

称 X 服从指数分布，指数分布由参数 λ 唯一确定。

随着 t 的增加，$f(t)$ 成几何速度减少，这是寿命的基本特征，因此指数分布是典型的寿命分布函数。

此时，期望 $EX=\frac{1}{\lambda}$，方差 $DX=\frac{1}{\lambda^2}$。

指数分布的分布函数即不可靠度函数为:

$$F(t) = P(X\leqslant t) = 1-e^{-\lambda t}$$

可靠度函数为:

$$R(t) = P(X>t) = 1-F(t) = e^{-\lambda t}$$

故障率或失效率函数为:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

4. 威布尔分布:

若寿命 X 的概率密度函数为:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\beta t^{\beta-1}\exp(-\lambda t^{\beta}) & t>0 \\ 0 & t\leqslant 0 \end{cases} \qquad (\lambda>0,\beta>0)$$

称 X 服从威布尔分布，威布尔分布由参数 λ，β 唯一确定。

威布尔分布的分布函数为:

$$F(t) = 1-\exp(-\lambda t^{\beta})$$

故障率或失效率函数为:

$$h(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$$

显然:　$\beta>1$，则 $h(t)$ 是 t 的增函数;

$\beta=1$，则 $h(t)=\lambda$，威布尔分布变为指数分布;

$\beta<1$，则 $h(t)$ 是 t 的减函数。

β、λ 取不同值时威布尔分布的密度函数如图 1-1 所示。

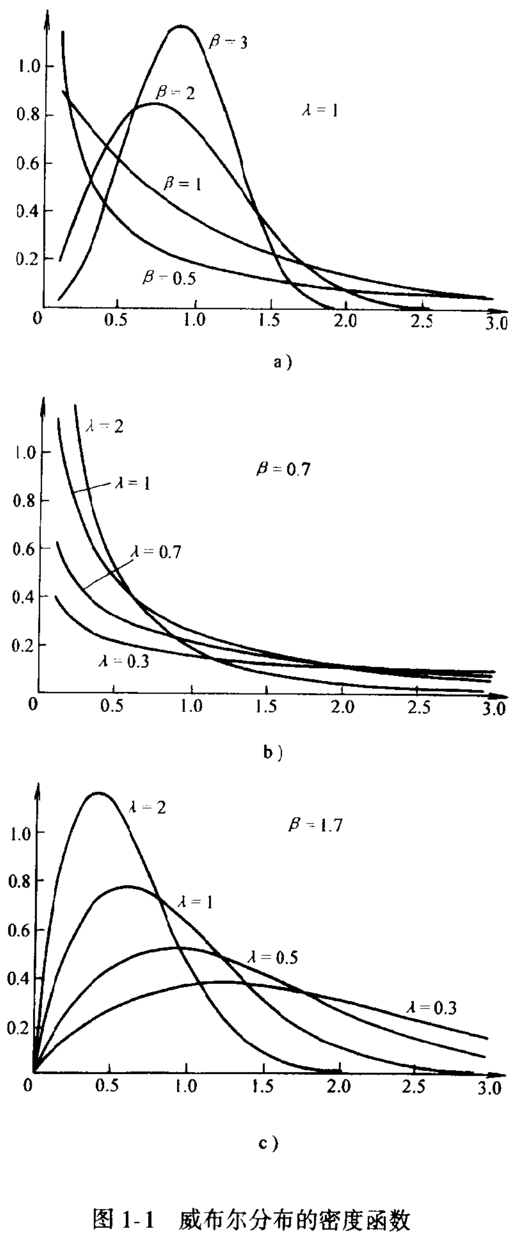


图 1-1 威布尔分布的密度函数

a) $\lambda=1$ b) $\beta=0.7$ c) $\beta=1.7$

因此，威布尔分布既能适用于各种形态的寿命分布，又兼容于典型的寿命分布——指数分布。

第二节　可靠性数据采集与分析

一、可靠性试验与样本

可靠性试验的目的是评价产品可靠性水平，测定产品可靠性指标，从而为产品的研制、设计、开发提供依据。

可靠性试验的种类很多，但基本可分成为现场使用试验与模拟试验两大类。

现场使用试验是最符合实际情况的试验。例如汽车样机研制完成后，应送使用现场进行实际运行考验；当满足要求后，才能正式成批生产。现场使用试验是设备研制过程中的一个不可缺少的环节。成批生产后，还应与使用单位协作，记录设备完整的使用报告和故障报告，这是现场使用试验数据的主要来源。

模拟试验是在实验室中模拟产品的实际工作状况的一种试验方法。模拟试验又可分为破坏性试验和非破坏性试验。

可靠性试验中，所要研究对象的全体称为**总体**或**母体**，每一个对象称为**个体**。当对总体进行研究时，需要对其个体进行试验，但并不是对所有个体进行试验，而是从中抽取少数个体试验，取得数据，然后用统计分析方法推断总体的特征。这是从总体中抽取少数的个体，就是可靠性研究的**样本**或**子样**。

一般，假设样本中每个个体相互独立且有相同的分布，这个分布就是**总体的分布**。

设总体服从密度函数 $f(t)$，从中随机抽取 n 个个体作为样本，称样本**容量**为 n。样本中有 n 个随机变量，通常以大写字母 X_1，X_2，…，X_n 表示。这里 X_1，X_2，…，X_n 相互独立且都有相同的密度函数 $f(t)$，及分布函数 $F(x)$。

对抽取的样本进行一次可靠性试验，得 n 个**试验值** x_1，x_2，…，x_n，即在本次可靠性试验中，

$$X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \cdots,\ X_n = x_n$$

试验值也称为**观察值**。可靠性试验中往往得不到 n 个观察值，而只能得到一部分观察值，这样的样本称为**截尾样本**。在实际工作中可根据不同要求采用不同的**截尾试验**。

(1) 定时截尾试验　n 个个体试验独立进行，对每个个体，预定 τ 时刻停止试验，结果有 r 个完成试验，得 r 个试验值 x_1，x_2，…，x_r $(0<r<n)$，这种试验称为定时截尾试验。随机样本 X_1，X_2，…，X_r 称为定时截尾样本。

(2) 定数截尾试验　n 个个体试验独立且同时进行，预定正整数 r $(r<n)$，当有 r 个完成时停止试验，得 r 个试验值 x_1，x_2，…，x_r，这种试验称为定数截尾试验。随机样本 X_1，X_2，…，X_r 称为定数截尾样本。

(3) 混合截尾试验　预定 τ 时刻和正整数 r（$r<n$），两者只要有一个达到要求就停止试验，这种试验称为混合截尾试验。

二、统计量及其分布

统计量是样本 X_1，X_2，…，X_n 的函数，函数中不含未知参数，对于样本 X_1，X_2，…，X_n 可构造许多统计量，最常用的有样本均值和样本方差。

样本均值　$$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

样本方差　$$S^2=\frac{1}{n-1}[(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_n-\bar{X})^2]$$

统计量是随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的函数，其分布可由 X_1，X_2，…，X_n 的联合分布推导出来。下面讨论与可靠性有关的统计量。

顺序统计量：设 X_1，X_2，…，X_n 为样本，将 X_1，X_2，…，X_n 按其大小排列为

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$$

将随机变量 $X_{(1)}$，$X_{(2)}$，…，$X_{(n)}$ 称为**顺序统计量**，将 $X_{(i)}$ 称为第 i 个顺序统计量。

设总体密度函数为 f（t，θ），分布函数为 F（t，θ），θ 为分布参数，则样本 X_1，X_2，…，X_n 都服从 f（t，θ），分布函数都为 F（t，θ）。

1. 最大顺序统计量 $X_{(n)}$ 的分布

$X_{(n)}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(t,\theta)=P(X_{(n)}\leqslant t)$$

所以
$$\begin{aligned}F_{X_{(n)}}(t,\theta)&=P(X_{(n)}\leqslant t)=P(X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,\cdots,X_n\leqslant t)\\&=P(X_1\leqslant t)P(X_2\leqslant t)\cdots P(X_n\leqslant t)\\&=F(t,\theta)F(t,\theta)\cdots F(t,\theta)=[F(t,\theta)]^n\end{aligned}$$

$X_{(n)}$ 的密度函数为：

$$F_{X_{(n)}}(t,\theta)=([F(t,\theta)]^n)'=n[F(t,\theta)]^{n-1}\mathrm{f}(\mathrm{t},\theta)$$

2. 最小顺序统计量 $X_{(1)}$ 的分布

$X_{(n)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为：

$$F_{X_{(1)}}(t,\theta)=P(X_{(1)}\leqslant t)$$

所以
$$\begin{aligned}F_{X_{(1)}}(t,\theta)&=P(X_{(1)}\leqslant t)=1-P(X_{(1)}>t)\\&=1-P(X_1>t,X_2>t,\cdots,X_n>t)\\&=1-P(X_1>t)P(X_2>t)\cdots P(X_n>t)\\&=1-[1-F(t,\theta)][1-F(t,\theta)]\cdots[1-F(t,\theta)]\end{aligned}$$

$$= 1 - [1 - F(t,\theta)]^n$$

$X_{(1)}$的密度函数为

$$F_{X_{(1)}}(t,\theta) = (1 - [1 - F(t,\theta)]^n)' = n[1 - F(t,\theta)]^{n-1} f(t,\theta)$$

3. 第 i 个顺序统计量$X_{(i)}$分布

$X_{(i)}$分布函数为 $F_{X_{(i)}}(t,\ \theta)$，则密度函数为

$$f_{X_{(i)}}(t,\theta) = (F_{X_{(i)}}(t,\theta))' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_{X_{(i)}}(t + \Delta t,\theta) - F_{X_{(i)}}(t,\theta)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X_{(i)} \leqslant t + \Delta t)}{\Delta t}$$

以下求 $P(t < X_{(i)} \leqslant t + \Delta t)$，这个概率用一般语言可表示为：随机变量 X_1，X_2，…，X_n 中，恰有 $i-1$ 个随机变量小于等于 t；恰有 1 个在（t，$t+\Delta t$]中；恰有 $n-i$ 个大于$t+\Delta t$。

最简单情况：随机变量 X_1，X_2，…，X_{i-1}都小于等于 t，概率为$[F(t,\theta)]^{i-1}$；X_i在$(t, t+\Delta t]$中，概率为$f(t,\theta)\Delta t$；X_{i+1}，…，X_n都大于$t+\Delta t$，概率为$[1 - F(t + \Delta t,\theta)]^{n-i}$。

最简单情况的概率为 $[F(t,\theta)]^{i-1}[1 - F(t + \Delta t,\theta)]^{n-i} f(t,\theta)\Delta t$

共有多少类似情况，这是一个组合问题，共有

$$C_n^{i-1} C_{n-i+1}^1 C_{n-i}^{n-i} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!}(n-i+1)1 = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$$

所以

$$P(t < X_{(i)} \leqslant t + \Delta t) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(t,\theta)]^{i-1}[1 - F(t + \Delta t,\theta)]^{n-i} f(t,\theta)\Delta t$$

$$f_{X_{(i)}}(t,\theta) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X_{(i)} \leqslant t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(t,\theta)]^{i-1}[1 - F(t,\theta)]^{n-i} f(t,\theta)$$

4. $X_{(i)}$和 $X_{(j)}$的联合密度函数（$i<j$）

与上述方法同样，因 $X_{(i)}$和 $X_{(j)}$为顺序统计量设 $X_i \leqslant X_j$ 计算：

$$P(x_i < X_{(i)} \leqslant x_i + \Delta x_i, x_j < X_{(j)} \leqslant x_j + \Delta x_j)$$

此概率用一般语言可表示为：随机变量 X_1，X_2，…，X_n 中，恰有 $i-1$ 个随机变量小于等于x_i；恰有1个在$(x_i, x_i + \Delta x_i]$中；恰有$j-i-1$个在$(x_i + \Delta x_i, x_j]$；恰有1个在$(x_j, x_j + \Delta x_j]$中；恰有$n-j$个大于$x_j + \Delta x_j$。所以：

$$P(x_i < X_{(i)} \leqslant X_i + \Delta x_i, x_j < X_{(j)} \leqslant x_j + \Delta x_j)$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!1!(j-i-1)!1!(n-j)!} \times [F(x_i,\theta)]^{i-1}$$
$$\times f(x_i,\theta)\Delta x_i \times [F(x_j,\theta) - F(x_i+\Delta x_i,\theta)]^{j-i=1}$$
$$\times f(x_j,\theta)\Delta x_j \times [1 - F(x_j+\Delta x_j,\theta)]^{n-j} \quad (x_i \leqslant x_j)$$

$X_{(i)}$和 $X_{(j)}$的联合密度函数

$$f_{X_{(i)}X_{(j)}}(x_i,x_j,\theta) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \times [F(x_i,\theta)]^{i-1}$$
$$\times [F(x_j,\theta) - F(x_i,\theta)]^{j-i=1} \times [1 - F(x_j,\theta)]^{n-j}$$
$$\times f(x_i,\theta) \times f(x_j,\theta) \qquad (x_i \leqslant x_j)$$

三、各种截尾样本的联合分布

1. 定时截尾的联合密度函数

定时截尾样本 $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(r)} \leqslant \tau$ 的联合密度函数为

$$f_{X_{(1)}X_{(2)}\cdots X_{(r)}}(x_1,x_2,\cdots,x_r,\theta,\tau) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-r)!}[f(x_1,\theta)\times f(x_2,\theta)\times\cdots\times f(x_r,\theta)][1-F(\tau,\theta)]^{n-r} & x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_r \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

2. 定数截尾的联合密度函数

定数截尾样本 $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(r)}$的联合密度函数为（$r\leqslant n$）

$$f_{X_{(1)}X_{(2)}\cdots X_{(r)}}(x_1, x_2, \cdots, x_r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-r)!}[f(x_1,\theta)\times f(x_2,\theta)\times\cdots\times f(x_r,\theta)][1-F(x_r,\theta)]^{n-r} & x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_r \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

若 $r = n$ 即为n个顺序统计量$X_{(1)}$，$X_{(2)}$，…，$X_{(n)}$的联合密度函数

$$f_{X_{(1)}X_{(2)}\cdots X_{(n)}}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta) = \begin{cases} n!f(x_1,\theta)\times f(x_2,\theta)\times\cdots\times f(x_n,\theta) & x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

显然 $X_{(1)}$，$X_{(2)}$，…，$X_{(n)}$不独立。

第三节　可靠性数据的统计推断

一、点估计

在可靠性研究中，如果分布已知但参数未知，通过可靠性数据对未知参数进行估计称为参数估计。参数估计有两种方法，值估计和范围估计，分别称为点估计和区间估计。

设 θ 为未知参数，X_1，X_2，…，X_n 为样本。

作 X_1，X_2，…，X_n 的统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}$（$X_1$，$X_2$，…，$X_n$），用随机变量 $\hat{\theta}$ 来估计 θ，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量。

如果进行一次可靠性试验，得结果：

$$X_1=x_1,\ X_2=x_2,\ \cdots,\ X_n=x_n$$

用统计值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 来估计 θ，称为 θ 的估计值。

对于未知参数 θ，可以给出很多估计量，这样就有一个问题，那一个估计量好，那一个估计量不好，有没有评价准则，以下介绍几种点估计评价准则。

1. 无偏性

如果 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 满足

$$E\hat{\theta}=\theta$$

称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。

例如，设总体为 X，$EX=\mu\quad DX=\sigma^2$，X_1，X_2，…，X_n 为样本

样本均值 $$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

样本方差 $$S^2=\frac{1}{n-1}[(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_n-\bar{X})^2]$$

计算可知：

$$E\bar{X}=\mu\quad ES^2=\sigma^2$$

所以 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计量，S^2 是 σ^2 的无偏估计量。

2. 有效性

如果 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量，并且 $\hat{\theta}$ 的方差最小，称 $\hat{\theta}$ 为有效的，或称最小方差无偏估计量。$\hat{\theta}$ 的方差越小，表明数据越集中在 θ 附近当然越好。

3. 常用的点估计方法

(1) 图分析法　利用概率纸进行点估计，此法简单、直观但精度差，可作为初始估计。

(2) 矩估计法　用各阶矩进行估计，这种方法简单，是一种常用方法。

(3) 极大似然估计法　利用密度函数或分布函数进行估计，这也是一种常用方法。

二、区间估计

对未知参数 θ 的范围估计，称为区间估计。

设 X_1，X_2，…，X_n 为样本；α 为一给定量，称为显著性水平；$1-\alpha$ 称为置信度，通过一定方法求得两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}$（$x_1$，$x_2$，…，$x_n$），$\bar{\theta}=\bar{\theta}$（$x_1$，$x_2$，…，$x_n$），使得：

$$P(\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}) = 1 - \alpha$$

区间（$\underline{\theta}$，$\bar{\theta}$）称为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$，$\bar{\theta}$ 分别称为置信下限和置信上限。

$1-\alpha$ 由设计人员事先给定，$1-\alpha$ 越大，置信区间（$\underline{\theta}$，$\bar{\theta}$）越长，θ 估计精度会降低；反之，$1-\alpha$ 越小，置信区间（$\underline{\theta}$，$\bar{\theta}$）越短，θ 落在置信区间（$\underline{\theta}$，$\bar{\theta}$）的概率越小，即置信区间（$\underline{\theta}$，$\bar{\theta}$）可信程度越低。所以 $1-\alpha$ 不能太小，一般取 $1-\alpha$ 为0.9、0.95、0.975、0.99。

确定置信区间的方法：

1）找一随机变量函数 $\nu=\nu$（x_1，x_2，…，x_n，θ），使 ν 只含一个未知参数 θ，且 ν 的分布是确定的，不含未知参数。

2）取 $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 1$，使 $\alpha_2-\alpha_1=1-\alpha$。

3）查表得 ν 的上侧分位点 ν_{α_1}，ν_{α_2} 即

$$P(\nu > \nu_{\alpha_1}) = \alpha_1 ; P(\nu > \nu_{\alpha_2}) = \alpha_2$$

则 $$P(\nu_{\alpha_2} < \nu \leqslant \nu_{\alpha_1}) = P(\nu > \nu_{\alpha_2}) - P(\nu > \nu_{\alpha_1}) = \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \alpha$$

所以从不等式 $\nu_{\alpha_2} < \nu(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta) \leqslant \nu_{\alpha_1}$，可解出 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

三、假设检验

前面讨论的参数估计问题，是在假设总体服从某一分布的前提下进行的。总体是否真的服从某一分布，还需要适当的方法进行检查和验证，这就是假设检验问题。

假设检验分为参数的假设检验和非参数的假设检验。总体分布的假设检验是非参数的假设检验，下面讨论这一问题。

设 X_1，X_2，…，X_n 为一样本，具体检验方法如下：

1）建立待检假设 H_0，总体 X 的分布函数为 F（x）。

2）在实数轴上取 $k-1$ 个点 $t_1 < t_2 < \cdots t_{k-1}$，将数轴分成 k 个区间：

$$(-\infty, t_1], (t_1, t_2], \cdots (t_{k-2}, t_{k-1}], (t_{k-1}, +\infty)$$

3）记 m_i 为观察值落在第 i 个区间的个数；记 p_i 为 X 落在第 i 个区间的概率，则 np_i 为观察值落在第 i 个区间的理论个数，求 p_i 时要用到 $F(x)$。若 F（x）有未知参数，全部用估计值代替。

4）取统计量

$$\chi^2 = \frac{(m_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(m_2 - np_2)^2}{np_2} + \cdots + \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$$

当 H_0 成立时，$\chi^2 \sim \chi^2(k-1-\gamma)$。$\gamma$ 为 F（x）中未知参数的个数。