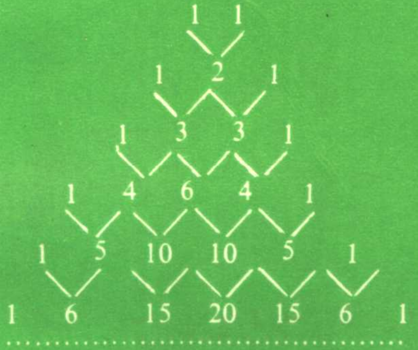
投考國內大學數學叢書

中學代數習題難題

詳解1200例（下册）



廖碧華編

科進出版社出版

投考國內大學數學叢書

中學代數習題難題
詳解1200例（下册）

廖碧華編

科進出版社出版

中學代數習題難題
詳解1200例（下册）　廖碧華編

科進出版社出版　電話3-457842
香港九龍官塘康寧道41號十五樓第五座

嶺南印刷公司印刷　電話3-497470
香港德輔道西西安里13號地下

　1980年1月初版

前　言

本書是以教育部制訂的中學代數教學大綱爲依據，參考了全國高等學校招生考試複習大綱，並照顧到了目前國內和香港代數教學的實際情況而編寫的。本書主要爲國內和香港中學師生教學和學習之用，同時可作爲畢業總複習的參考。

爲使學生比較系統地掌握進一步學習科學技術所需要的代數知識，瞭解這些知識的實際應用，培養學生的思維能力和應用代數知識解決實際問題的能力。本書每一章都包括三個內容：一、基本概念和公式。二、典型的例題分析和解。三、習題和複習題並附答案或提示。

本書所選之習題都具有代表性、全面性、廣泛性和綜合性，並加强了難題部份的數量，是中學師生尤其是應屆高考生的最佳參考書。

本社爲方便中學師生全面學習和複習數學之用，共出版了《中學代數習題難題詳解1200例》上、下册，《中學平面幾何習題難題詳解五百例》，《中學三角習題詳解五百例》，《中學立體幾何習題詳解三百例》，《中學解析幾何習題詳解 500 例》等數學習題集共六册，共編入了各種數學習題難題三千多例，上述書籍自出版以來深受廣大中學師生、數學愛好者的熱烈歡迎，我們在此向廣大讀者表示衷心感謝。並懇請讀者多多提出寶貴意見。

科進出版社

一九八〇年一月

目　　录

第五章 不 等 式

5.1 不等式的性质

1. 两个数大小的定义

如果 a、b 是实数，若 $a-b$ 是正的，则规定 $a>b$；若 $a-b$ 是负的，则规定 $a<b$；若 $a-b$ 是零，则规定 $a=b$。

2. 不等式的定义

用不等号连结两个代数式组成的式子叫做不等式。

任意两个复数没有大小的规定，所以在比较两个数的大小时，我们所说的数都是实数。

3. 不等式基本性质

根据两个数大小的定义，可证得下列基本性质：

（1） 如果 $a>b$，那末 $b<a$；反过来，如果 $b<a$，那末 $a>b$。

（2） 如果 $a>b$，$b>c$，那末 $a>c$。

（3） 如果 $a>b$。那末 $a+c>b+c$。

（4） 如果 $a>b$，$c>0$，那末 $ac>bc$。

（5） 如果 $a>b$，$c<0$，那末 $ac<bc$。

根据两数大小的定义和上面五个基本性质，还可证得下列性质：

（6） 如果 $a>b$，$c>d$，那末 $a+c>b+d$。

（7） 如果 $a>b$，$c<d$，那末 $a-c>b-d$。

（8） 如果 $a>b$，$c>d$，a、b、c、d 都是正数，那末

$ac > bd$.

(9) 如果 $a > b$，a、b 都是正数，那末 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

(10) 如果 $a > b$，$c < d$，a、b、c、d 都是正数，那末 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

(11) 如果 $a > b$，a、b 都是正数，n 是正整数，那末 $a^n > b^n$.

(12) 如果 $a > b$，a、b 都是正数，n 是正整数，那末 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

不等式的定义和性质不仅对于代数式是适合的，而且对于函数式（在定义域内）也是适合的。

4. 不等式的证明

例1 已知 a、b 为正数，求证

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

证 根据两数大小的定义，得

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{cb}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}.$$

当 $a \neq b$ 时；$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$；

当　$a=b$时，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0$，

∴　当a、b为正实数时，　$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$。

∴　$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0$。

根据两数大小定义可知

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

注意：（1）　当$a=b$时，原式中等号成立。

（2）　此等式还可化成$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$作为公式去用。

例2　已知a、b、c是互不相等的实数，求证：$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac$。

证　因为a、b、c是互不相等的实数，

∴　$(a-b)^2>0$，$(a-c)^2>0$，$(b-c)^2>0$。

∴　$a^2+b^2>2ab$，$a^2+c^2>2ac$，$b^2+c^2>2bc$。

将三个不等式左、右两边分别相加得：

$$2a^2+2b^2+2c^2>2ab+2ac+2bc.$$

两边用2除得

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc.$$

注意：例2也可用两实数大小定义来证、a、b为实数时，$(a-b)^2\geqslant 0$，$a^2+b^2\geqslant 2ab$可作公式用.

例3　设$x>0$，求证：$x+\frac{9}{x}$的最小值为6。

证　x和$\frac{9}{x}$都是正数，根据例1的结论可得：

$$\frac{x+\frac{9}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{9}{x}},$$

$$\frac{x+\frac{9}{x}}{2} \geqslant \sqrt{9}.$$

两边都乘以 2，得

$$x+\frac{9}{x} \geqslant 6.$$

$\therefore$ $x+\frac{9}{x}$的最小值等于 6。

例 4 **求证**：$\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$。

分析法：要证 $\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$，只要证出 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2<4^2$，就是证出 $8+2\sqrt{15}<16$即可；要证 $8+2\sqrt{15}<16$只要证出$2\sqrt{15}<8$即可，而要证出 $2\sqrt{15}<8$，只要证出$\sqrt{15}<4$即可；而要证出$\sqrt{15}<4$只要证出$15<16$ 即可。但已知$15<16$. 所以将上述过程从后顺次推导到前，可证出原式成立。

上面证题方法叫做分析法。本题还可用综合法证之。(在证题时，写出一种证法即可)。

综合法：$\because$ $15<16$.

$\therefore$ $\sqrt{15}<\sqrt{16}$,

即 $\sqrt{15}<4$,

$\therefore$ $2\sqrt{15}<8$,

$\therefore$ $8+2\sqrt{15}<16$.

即 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2<16$,

$\therefore$ $\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$.

例5 求证：$3(1+a^2+a^4) \geqslant (1+a+a^2)^2$ （a为实数）

证 根据两数大小定义来证。

$$3(1+a+a^4)-(1+a+a^2)^2$$
$$=3(1+a^2+a^4)-(1+a^2+a^4+2a+2a^2+2a^3)$$
$$=2(a^4-a^3-a+1)$$
$$=2[a^3(a-1)-(a-1)]$$
$$=2(a-1)(a^3-1)$$
$$=2(a-1)^2(a^2+a+1)$$
$$=2(a-1)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right].$$

∵ a为实数。 ∴ $(a-1)^2 \geqslant 0$，$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$.

∴ $2(a-1)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] \geqslant 0$.

∴ $3(1+a^2+a^4) \geqslant (1+a+a^2)^2$.

例6 已知$a \geqslant 1$、$b \geqslant 1$、$c \geqslant 1$，

求证 $(1+a)(1+b)(a+c)(b+c) \geqslant 16abc$.

证明 ∵ $a \geqslant 1, b \geqslant 1, c \geqslant 1$，$a, b, c$都是正数.

∴ $1+a \geqslant 2\sqrt{a}$,

$1+b \geqslant 2\sqrt{b}$,

$a+c \geqslant 2\sqrt{ac}$,

$b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$.

把以上四式两边分别相乘，得

$$(1+a)(1+b)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc.$$

例7 证明：截面周长相等时，截面为圆的水管比截面为正方形的水管的流水量大.

证 假设截面周长为c，则圆面半径为$\frac{c}{2\pi}$，正方形的边长为$\frac{c}{4}$.

$$\because\quad \pi\left(\frac{c}{2\pi}\right)^2-\left(\frac{c}{4}\right)^2$$

$$=\frac{c^2}{4\pi}-\frac{c^2}{16}$$

$$=\frac{(4-\pi)c^2}{16\pi}>0\quad(\because\ 4>\pi,\ c^2>0)$$

$$\therefore\quad \pi\left(\frac{c}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{c}{4}\right)^2.$$

故截面为圆形的水管比截面为正方形的水管的流水量大.

例8 当$a<3$的时候，比較a^2与$3a$的大小.

解 这里要注意，不能因为$a<3$，而在它的两边各乘以a后，就得出了$a^2<3a$的結論．因为当$a<3$的时候，a可能是正值，也可能是負值；甚至还可能等于零．因此必須根据不同情况分别討論，才能获得正确的解答。

（1）当 $0<a<3$的时候，$a^2<3a$；

（2）当 $a=0$的时候，$a^2=3a$；

(3) 当 $a<0$ 的时候，$a^2>3a$.

例9 若 a、b、c 是不全相等的实数，求証：

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

証 在§3中已指出过，$a^2+b^2>2ab$ 是成立的．于是

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)\geqslant ab; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}(b^2+c^2)\geqslant bc; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}(c^2+a^2)\geqslant ca. \qquad (3)$$

因为 a、b、c 不全相等，所以这三个式中至少有两个是不等式．

把(1)、(2)、(3)式的两边分别相加，得

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

例10 若 a、b 是不等的正实数，求証：

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

分析 关于立方和的不等式問題还沒有学过，对本題就覺得无从下手．但是我們可以先假定原式成立，再逐步推演，直到所得的不等式是一个成立的不等式．然后从这个不等式逐步反推上去，而証出原式成立．例如，

如果 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$，那末 $(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$.

如果 $(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$，那末 $a^2-ab+b^2>ab$.

(因 $a+b$ 是正数)

如果 $a^2-ab+b^2>ab$，那末 $(a-b)^2>0$.

很明显，这个不等式是成立的，于是得到以下的証法．

証　因为 $(a-b)^2>0$，　即　$a^2-ab+b^2>ab$．

$(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$．（因 $a+b$ 为正数）

$$\therefore\quad a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

例11 若$a>b>c>0$，求证$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$．

证　$\because \dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$　$\therefore \dfrac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，

$$\therefore\quad a^a b^b>a^b b^a, \qquad (1)$$

同理可得

$$a^a c^c>a^c c^a, \qquad (2)$$

$$b^b c^c>b^c c^b, \qquad (3)$$

将不等式（1）、（2）、（3）两边相乘，得

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

例12 设 a、b、c 为任意三角形三边长，

$$I=a+b+c,\quad S=ab+bc+ac,$$

证明

$$3S\leqslant I^2<4S.$$

证　首先，对于任意的a、b、c、

$$I^2=(a+b+c)^2=2(bc+ca+ab)+a^2+b^2+c^2$$

$$=2S+a^2+b^2+c^2.$$

故要证明

$$3S\leqslant I^2<4S, \qquad (1)$$

只须证明

$$3S\leqslant 2S+a^2+b^2+c^2<4S,$$

即

$$S\leqslant a^2+b^2+c^2<2S, \qquad (2)$$

为了证明（2），我们首先注意，对于任意的b，c，有

$$0\leqslant(b-c)^2=b^2+c^2-2bc.$$

故

$$2bc\leqslant b^2+c^2. \qquad (3)$$

同样，对于任意的c，a 和a，b

$$2ca \leqslant c^2 + a^2, \tag{4}$$

$$2ab \leqslant a^2 + b^2. \tag{5}$$

由（3），（4），（5），可得$S \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.　　（6）

另一方面，由于三角形任意一边小于其余两边之和，应有　　$a < b + c$.

两边乘以 a，就得 $a^2 < ab + ca$.　　（7）

同样，　　$b^2 < bc + ab$,　　（8）

$$c^2 < ca + bc. \tag{9}$$

由（7），（8），（9），就得

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2S. \tag{10}$$

合并（6）与（10），就得（2）。

因而命题得证。

例13 设 a、b、c 都为正数，且$a+b+c=1$，证明

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 9$.

证 $\because$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-9 = \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}$

$$+\frac{a+b+c}{c}-9$$

$$=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}-6$$

$$=\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)-6abc}{abc}$$

$$=\frac{b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+a^2b+ab^2-6abc}{abc}$$

$$=\frac{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2}{abc} \geqslant 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$$

例14 假设x，y，z都是实数，又知道它们满足

$$x+y+z=a,\ x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}(a>0),$$

试证x、y、z都不能是负数，也都不能大于$\frac{2}{3}a$.

〔证1〕 由$x+y+z=a$得

$$z=a-(x+y).$$

代入第二式，并整理得

$$y^2+(x-a)y+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0.$$

$\because$ y为实数，

$$\therefore \quad (x-a)^2-4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

解得 $\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}a.$

同理可得 $\qquad 0\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}a,$

$$0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}a.$$

〔证2〕 $\because$ $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}(x+y+z)^2,$

$\therefore$ $\qquad x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx),$

即 $\qquad (x-y)^2+z^2=2z(x+y).$

由上式可看出，若$z<0$，

则 $x+y<0$，

那末 $(x+y)+z=a<0$。

这与已知条件矛盾，故 $z\geqslant0$。

同理可证 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$。

令
$$X=\frac{2}{3}a-x,$$
$$Y=\frac{2}{3}a-y,$$
$$Z=\frac{2}{3}a-z.$$

则 $X+Y+Z=2a-(x+y+z)=a$，

$$X^2+Y^2+Z^2=x^2+y^2+z^2-2\cdot\frac{2}{3}a(x+y+z)+3\cdot\frac{4}{9}a^2$$
$$=\frac{a^2}{2}.$$

由上面的证明，知

$$X\geqslant0,\ Y\geqslant0,\ Z\geqslant0.$$

即 $x\leqslant\frac{2}{3}a$，$y\leqslant\frac{2}{3}a$，$z\leqslant\frac{2}{3}a$。

于是有
$$0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}a,$$
$$0\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}a,$$
$$0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}a.$$

例15 设a，b，c是直角三角形的三边，c为斜边，整数$n\geqslant 3$。求证：$a^n+b^n<c^n$。

〔证1〕 (1) 当$n=3$时，

$$a^3+b^3<a^2c+b^2c=(a^2+b^2)\cdot c=c^3,$$

不等式成立。

(2) 设当$n=k$时，不等式成立，即

$$a^k+b^k<c^k.$$

则当$n=k+1$时，

$$a^{k+1}+b^{k+1}<a^kc+b^kc=(a^k+b^k)\cdot c<c^{k+1}.$$

由(1)、(2)知原不等式成立。

〔证2〕 设直角三角形一锐角为A，则

$$\sin A=\frac{a}{c}, \qquad \cos A=\frac{b}{c}.$$

$\because$ $|\sin A|<1$, $|\cos A|<1$,

$\therefore$ 当$n\geqslant 3$时，

$$\sin^n A<\sin^2 A,\ \cos^n A<\cos^2 A.$$

于是 $\sin^n A+\cos^n A<\sin^2 A+\cos^2 A=1$,

即 $$\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<1,$$

故 $$a^n+b^n<c^n.$$

例16 (1) 已知等差数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…的首项$a_1>0$，公差$d>0$，当$n\geqslant 2$时，证明：

$$2(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})<\frac{d}{\sqrt{a_n}}<2(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}).$$