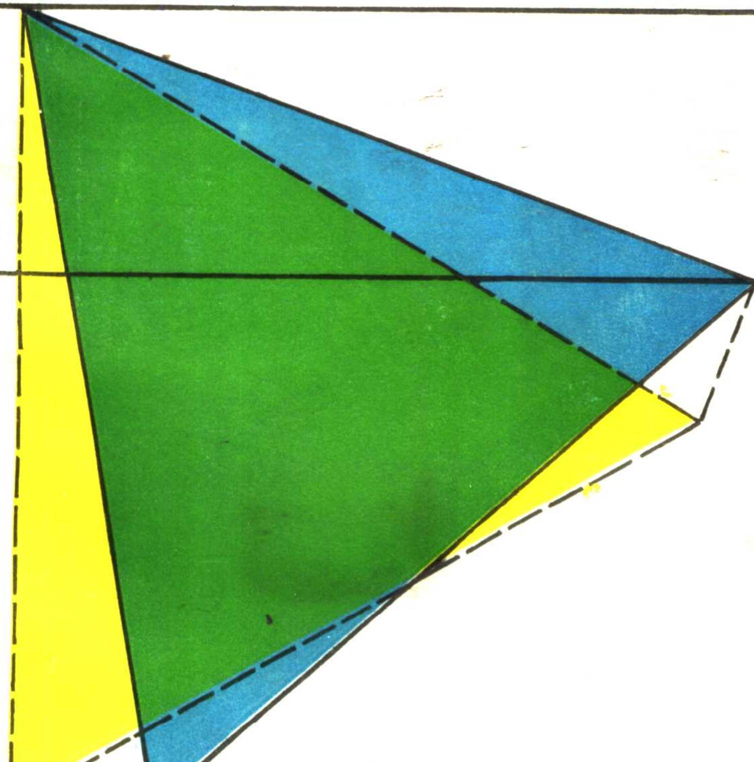
中学课外小组

数学资料集锦

岳建尧 编

北京师范大学出版社



中学课外

数学资料集锦

岳建尧

北京师范大学出版社

中学课外小组

数学资料集锦

岳 建 尧

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京通县印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11.25 字数：240千
1985年8月第1版 1985年8月印第1次刷
印数：1—31,000

统一书号：7243·240 定价：1.50元

前　　言

在全面贯彻党的教育方针的前提下，按照中学数学教学大纲的统一要求，努力提高课堂教学的效率，使学生在增长知识和发展智力上获得普遍的丰收，这是中学数学教学的主要任务。但是在教学实践中，我们常会发现由于学生在掌握基础知识的程度上、发展智力的水平上以及学习方法上存有差异，在统一的教学要求下也很难收到整齐划一的效果，因此要提高数学教学的质量，仍应注意课外富于创造性的辅助作。组织学生参加数学课外活动小组，举办丰富多彩的黑报数学专栏，举行数学竞赛、智力竞赛等等，这一些都是各地普通中学正在进行而且实践已经证明行之有效的活动，这些活动在充实学生的学习内容，提高学生学习数学的兴趣，开拓学生智力，培养优良学风，贯彻因材施教等方面，无疑都起了健康有益的作用。我们编写这一本小册子的目的，是为这些活动提供一些资料，同时也可作为中学生的数学课外读物。

这本小册子的内容，共分四大部分。第一部分是“专题讲座”，共选了与中学数学有密切联系同时在知识性上有所拓广的九个专题，为教师或高年级学生对数学课外小组的辅导或讲授的材料，也可供学生自学之用。

第二部分为“动脑筋的数学问题”，可为智力测验、数学竞赛等活动提供一些资料与题材。

第三部分为“数学黑板报”，包括数学家小传、名人谈数学、中国古代数学的世界之最、错在哪里、数学谜语等内容，适宜于作为编辑黑板报数学专栏时选用的素材。

第四部分是“问题解答”，作为数学课外活动提供解答时的参考，也可供自学者解答问题以后核对正误之用。

当然，课外小组活动的题材，远远不限于此，这里所提供的只是挂一漏万，希望能起抛砖引玉作用的一部分而已。尽管如此，我们认为这本小册子对大多数的读者来说，还是会有一定帮助的。

对本书中存在的不足之处，我们诚恳欢迎读者指正。

岳建尧

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

内 容 提 要

本书以中学数学为基础，而在知识和技能方面都有新的提高和发展，内容丰富，形式多样，既有知识性又有趣味性。

全书共分为四大部分：专题讲座(包括式子的对称性和因式分解，几类数列的求和，数学归纳法，集合代数及其应用，平均值，经典不等式，一些几何不等式，共点性和共线性以及圆的一些性质)；动脑筋的数学问题(包括趣味数学六十题和数学竞赛自我测试五十题)；数学黑板报(包括数学家小传，名人谈数学，中国古代数学的世界之最，错在哪里和数学谜语)；问题解答。

本书可作为中学生的课外读物和中学数学教师组织课外活动的参考书。

目　　录

第一部分　专题讲座

第二部分　动脑筋的数学问题

第三部分　数学黑板报

第四部分　问题解答

第一部分

专题讲座

这一部分共分九个专题，每一专题都是在中学数学的基础上而略有拓广与提高，可以由浅入深，分段进行讲授或辅导，并不是说每一专题只供一次讲座之用。

对于第一个专题：《式子的对称性和因式分解》，一般具有初中数学基础就能接受，可供初中高年级的课外小组作为辅导材料。

《几类特殊数列的求和》、《数学归纳法》、《集合代数及其应用》这三个专题，则只供高中学生课外小组选学。

其余五个专题，牵涉几何知识，其中每一专题中较浅显部分，可作为初中学生课外小组辅导材料，一般仍供高中数学小组选用为宜。

式子的对称性和因式分解

一、对称式、交代式和轮换对称式的概念

包含有字母的代数式(或更一般的函数式)，常常具有一定的对称性。按照式子对于字母对称性的强与弱，我们有对称式、交代式(或称反对称式)和轮换对称式等概念。

1.对称式

将一个式子中的某两个字母互相交换，如果所得的式子和原式恒等，那么就称这个式子关于这两个字母是对称的。如果一个式子，关于它所含的任何两个字母都是对称的，那么这个式子就叫做关于这些字母的对称式。

例如，$x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(z^3-y^3)(x^2+z^2)$

关于字母x和z是对称的，但关于x和y就不对称了。又如式子

$$\frac{x+y+z}{\sin x+\sin y+\sin z} \text{和} \quad 2a^2+2b^2+2c^2-3ab-3bc-3ca,$$

则是关于它们各自所含所有字母的对称式。

2.交代式

将一个式子中的某两个字母互相交换，如果所得式子与原式只相差一个符号，那么就称这个式子为关于这两个字母是反对称的。如果一个式子，关于它所含的任何两个字母都是反对称的，那么就称这个式子是关于这些字母的反对称

式，也称为交代式。

例如，式子$\sin^2x-\sin^2y+z^2(x^3-y^3)$关于文字$x$和$y$是反对称的，但对于式中所有字母却不是反对称的。又如式子a^3-b^3和$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$则关于它们各自的所有字母都是反对称的，所以是交代式。

3.轮换对称式

将一个式子中所含的字母按某种顺序排成一队，并用第二个字母换第一个字母，用第三个字母换第二个字母，如此轮换下去，最后用第一个字母换最末一个字母，如果所得的式子和原式恒等，则称这个式子为所含字母关于这种顺序的轮换对称式。

例如，$ab+bc+ca$和$y^2z+z^2x+x^2y$分别为关于a、b、c和x、y、z的轮换对称式。

二、对称式、交代式、轮换对称式之间的关系

这三种式子之间，有如下的关系：

1.对称式一定是按字母的任何一种排列的轮换对称式，但反过来不一定成立。

以三个字母a、b、c的对称式$f(a,\ b,\ c)$为例，将a和b互换后，式子不变：

$$f(a,b,c)=f(b,a,c);$$

再在此基础上，将a和c互换，式子仍不变：

$$f(a,b,c)=f(b,a,c)=f(b,c,a);$$

从上式容易看出，$f(b,\ c,\ a)$就是在$f(a,\ b,\ c)$中将a换b、b换c、c换a所得的式子，因此它与原式$f(a,\ b,\ c)$相等，故

对称式$f(a, b, c)$也是一个轮换对称式。

但是，反过来就不一定成立，也就是说轮换对称式不一定是对称式。

例如，式子$y^2z+z^2x+x^2y$是一个以x、y、z为顺序的轮换对称式，但显然它不是对称式。

2.所含字母相同的两个交代式的积和商是对称式。

这是因为在两个交代式中，若将两个字母同时互换，它们同时都变了符号，因此它们的积和商就保持不变，仍和原式的积和商恒等。

3.交代式一定不是对称式；对称式一定不是交代式。

因此，对称式全体和交代式的全体，是两个互不相交的集合。

4.轮换对称式可以是交代式，也可以不是交代式；交代式可以是轮换对称式，也可以不是轮换对称式。

例如，a^3-b^3和$(x-y)(x-u)(x-v)(y-u)(y-v)(u-v)$是交代式而不是轮换对称式。

式子$y^2z+z^2x+x^2y$是轮换对称式而不是交代式。

而式子 $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$既是交代式又是轮换对称式。

5.所含字母的个数$n(n>1)$是奇数的交代式，一定是轮换对称式；所含字母个数n是偶数的交代式，一定不是轮换对称式。

例如，当$n=3$时，对三个字母任意编一个次序：a_1, a_2, a_3，设这个交代式为$f(a_1, a_2, a_3)$，将a_2换a_1，a_3换a_2，a_1换a_3，所得式子为$f(a_2, a_3, a_1)$．从a_1，a_2，a_3这个顺序出发，我们可以经过二次的字母互换而达到a_2，a_3，a_1这个顺序，以

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

完成一个轮换。两次改变符号，因此最终式子和原式相等：

$$f(a_1, a_2, a_3) = -f(a_2, a_1, a_3) = f(a_2, a_3, a_1),$$

即$f(a_1, a_2, a_3)$是一个轮换对称式。

一般地说，$n = 2k+1$个字母的轮换，可以通过$2k$次字母互换来完成，经过偶数次的改变符号，所以最终结果不变。因此，当n为奇数时，交代式为轮换对称式。

当n为偶数时，字母的轮换需要通过奇数次的字母互换来完成，经过奇数次的改变符号，故最终结果和原式相差一个负号，因此这种交代式就不是轮换对称式。

总之，对称式、交代式和轮换对称式之间的关系，可以用图1来表示。

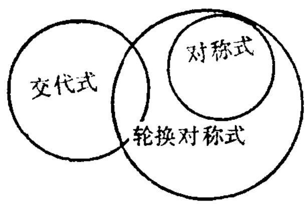


图 1

除了上述的五点关系以外，从对称式、交代式和轮换对称式的定义出发，不难证明它们还有如下一些性质：

6. 字母相同的两个对称式的和、差、积、商仍是对称式；字母相同的两个轮换对称式的和、差、积、商仍是轮换对称式；字母相同的两个交代式的和、差仍是交代式。

7. 若干个字母的整式，它关于这些字母为对称式的充分和必要的条件是：同型项的系数相等。

所谓同型项是指这样的项：当字母两两互换时，可以互相变形。例如，$2x^2y$，$3y^2z$就是同型项，2、3为它们的系数；x^3y^2z，$5z^3x^2y$，$-7y^3z^2x$也为同型项，系数为1、5和-7。因此，如果一个对称式含有某种形式的项，就必

然含有其它的一切同型项，且系数都相等。

例如，要使$ax^2+by^2+cz^2$为对称式，必须有$a=b=c$；又如，当一个含x、y、z的对称式含有一项$-3x^3y$时，它一定同时含有$-3y^3x$、$-3y^3z$、$-3z^3y$、$-3z^3x$、$-3x^3z$.

8. 一个由字母x，y，…，z构成的整式$P(x,y,\cdots,z)$，如果具有如下的性质，就称为是齐次的：存在一个自然数n，当我们分别用tx，ty，…，tz代替x，y，…，z时，所得的式子为原式和t^n的乘积：

$$P(tx,ty,\cdots,tz)=t^nP(x,y,\cdots,z).$$

例如，x^2y+z^3，$x^2+2xy+3xz+z^2$分别称为三次齐次式和二次齐次式，或简称齐三次式和齐二次式。

由上述第7点，我们可得齐次对称式的一般形式为

齐一次对称式：$a(x+y+\cdots+z)=a\sum x$；

齐二次对称式：$a(x^2+y^2+\cdots+z^2)+b(xy+xz+\cdots)$

$$=a\sum x^2+b\sum xy;$$

齐三次对称式：$a\sum x^3+b\sum x^2y+c\sum xyz$；

其它可类推而得，其中a，b，c，…为常数，记号Σx^2，Σx^3，Σxy，Σx^2y，Σxyz等，分别表示所有同型项之和。

例1 求$(\sum a^2)=(a+b+\cdots)^2$

解 Σa是一次齐次对称式，容易证明齐n次和齐m次整式之积是一个齐$m+n$次整式，所以所求结果为一个齐二次对称式，即

$$(\Sigma a)^2=A\Sigma a^2+B\Sigma ab,$$

其中A、B为待定常数，可用下面的方法加以确定：

令$a=1$，$b=c=\cdots=0$，得$A=1$；令$a=b=1$，$c=d=\cdots=0$，得$2A+B=4$，因此$B=2$.

$\therefore \qquad (\sum a)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab.$

例 2 求$(\sum x^2)(\sum x) = (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$。

解 所求的积为齐三次对称式，它只包括两种同型项，即x^3与x^2y的同型项之和，所以

$$(\sum x^2)(\sum x) = x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x+y^2x+ \\ +z^2y+x^2z.$$

例 3 求$(\sum x)^3 = (x+y+z)^3$.

解 所求结果为x，y，z的三次齐次对称式，所以

$(x+y+z)^3 = a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+ +y^2z+z^2y)+cxyz$，其中$a,b,c$为待定常数。由于这是一个恒等式，可以通过给予$x$、$y$、$z$三组值而得到$a$、$b$、$c$、的一个方程组，就可求出$a$、$b$、$c$.

例如，令$x=1$，$y=z=0$，得$a=1$；再使$x=y=1$，$z=0$，得$a+b=4$即$b=3$；然后令$x=y=z=1$，得$3a+6b+c=27$，从而$c=6$，故有

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+y^2x+x^2z+xz^2+ \\ +y^2z+z^2y)+6xyz.$$

三、对称式、交代式和轮换对称式的因式分解

利用这三种式子的性质和余数定理，就可以简化对这三种式子进行分解因式的计算过程，下面先介绍一下余数定理的内容（不予证明）。

余数定理：一个含x的多项式，除以$x-b$时所得的余数，等于以b代替被除式中的x的结果；也就是，如果被除式是$f(x)$，那么$f(b)$就是用$x-b$去除$f(x)$的余数。

由这一定理可知：$x-b$能整除$f(x)$的充要条件是

$f(b)=0$.

下面举例说明这三种式子的因式分解的方法。

例4 分解因式：$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$.

解 当$y=z$时原式为0，故由余数定理可见原式可以被$y-z$整除，即原式有$y-z$的因式。又因原式关于x、y、z的顺序构成轮换对称式，所以用z换y、x换z、y换x，仍得原式，故原式同时有$z-x$的因式；同理，它也含有$x-y$的因式，因此原式含有$(x-y)(y-z)(z-x)$的因式。但原式和$(x-y)(y-z)(z-x)$各为四次和三次的齐次轮换对称式，所以它们的商应是一次轮换对称式，即$k(x+y+z)$，这里k是一个常数。故

$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$，令$x=2$，$y=1$，$z=0$，得$k=-1$，所以

$$原式=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

例5 分解下式的因式：

$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.

解 当$x=0$时，原式$=0$，故原式有x的因子。因原式是对称多项式，所以它同时有y和z的因子。因为原式和xyz分别为五次和三次齐次对称式，所以它们的商为二次齐次对称式，即

$$原式=xyz[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+xz)].$$

在上式中令$x=y=z=1$，得$k+l=80$；

以$x=y=1$，$z=-1$代入，得$3k-l=240$.

解之，得$k=80$，$l=0$，所以

$$原式=80xyz(x^2+y^2+z^2).$$

有时，我们也可用上述方法简化分式。

例6 化简$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

解 原式是关于a、b、c的轮换对称式.公分母是$(a-b)(b-c)(c-a)$；通分后，第一个分式的分子为$-a^3(b-c)$，所以另两个分式的分子各为$-b^3(c-a)$和$-c^3(a-b)$.由例4，

$$-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),$$

$\therefore$ 原式$=a+b+c$.

练 习

1.指出下式关于哪些文字对称？

$$x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(y^3-z^3)(x^2+y^2).$$

2.写出所有关于a,b,c的对称式的各项：

$\sum a^2b^2$，$\sum a^3b^4$，$\sum\frac{a^2}{b}$，$\sum a^2b^3c^5$，$\sum a^2b^2c^4$；

$\sum(a+b)c$，$\sum(a+b^2)c^3$，$\sum(a+2b+3c)$.

3.证明$(a-b)(b-c)(c-a)$关于a，b，c是轮换对称，但不对称；而$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$是对称的。

4.证明下面恒等式：

① $\sum a^3\cdot\sum a=\sum a^4+\sum a^3b$；

② $\sum ab\cdot\sum a=\sum a^2b+3\sum abc$.

5.分解因式：

① $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$；

② $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$；

③ $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$；

④ $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$;

⑤ $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$;

⑥ $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$;

⑦ $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$;

⑧ $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$;

⑨ $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$;

⑩ $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.

6. 化简:

① $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$;

② $\dfrac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}$;

③ $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$;

④ $\dfrac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com