高 等 学 校 教 材

应用数学教程

（经·法专业）

中国政法大学 刘崇丽 主编

化学工业出版社

高等学校教材

应用数学教程

（经·法专业）

化学工业出版社
·北京·

(京)新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

应用数学教程：经·法专业/刘崇丽主编. —北京：化学工业出版社，1998.9
高等学校教材
ISBN 7-5025-2292-1

Ⅰ.应… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 21084 号

高等学校教材
应用数学教程
（经·法专业）
中国政法大学 刘崇丽 主编
责任编辑：程树珍
责任校对：陶燕华
封面设计：田彦文
*
化学工业出版社出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）
新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市延风装订厂装订
*
开本 850×1168 毫米 1/32 印张 12 字数 338 千字
1998 年 9 月第 1 版 1998 年 9 月北京第 1 次印刷
印 数：1—4000
ISBN 7-5025-2292-1/G·620
定 价：20.00 元

前　　言

随着我国法律的不断普及和法律制度的进一步完善，法律与社会各个领域特别是经济领域的关系越来越密切，这就要求法律的研究必然从定性化朝着定量化的方向发展，而作为定量化分析工具的数学方法，就成为法律工作者必须掌握的基础知识。政法院校作为培养法律人才的摇蓝，不仅要让学生具备法律知识及必要的经济知识，还应让学生掌握与法律和经济密切相关的数学知识，使学生成为社会所需要的综合型人才。

为适应法学教育的新发展，中国政法大学开设《应用数学》课程已有多年。本书是在原校内教材的基础上，考虑目前国内外的相关研究成果，针对政法院校学生的特点编写的。教材的主要特点是运用数学方法和经济原理分析研究法律问题，使学生通过学习基础的数学知识，基本掌握数学方法在经济和法律中的应用。根据政法院校学生的特点，本书所介绍数学知识和运用方法都是最基本的，叙述进程尽可能做到由浅入深，通俗易懂，并注意避免了冗长的数学推导和证明。为帮助学生巩固所学的知识，每章后面均附有一定数量的习题。

本书的编写组织工作由刘崇丽负责。参加编写的有：刘崇丽（第一、四、五、六、七、八、十二章），陈培新（第三章），刘淑环（第二、九、十、十一章）。全书的最后定稿工作由刘崇丽完成。

由于时间仓促和我们水平有限，对书中不当之处，恳切希望读者批评指正。

编　者

1998 年 6 月于中国政法大学

目　　录

第一篇　基础知识

第二篇　数学在经济中的应用

第三篇　数学在司法中的应用

第一篇　基础知识

第一章　函　　数

第一节　函数及其性质

函数是一个极其重要的数学概念，它能够反映出事物之间的量的关系和变化规律。在经济管理中涉及的大量数量关系都可以用函数关系来描述。因此，熟悉并掌握这个概念十分重要。

一、函数的概念

（一）函数的定义

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D_x 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D_x$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作：$y=f(x)$。

数集 D_x 叫做函数的定义域。当 x 取值 $x_0 \in D_x$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作：$f(x_0)$。当 x 取遍 D_x 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集：

$$z_y=\{y \mid y=f(x) \quad x \in D_x\}$$

称为函数的值域。

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如：φ, h, g, F, G 等。这时函数就记作：$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等。

以上对一个自变量的情形给出了函数定义，称为一元函数。同样也可给出多元函数的概念。以二元函数为例。

定义 2　设 x、y、z 是三个变量，当 x、y 在其变域内任意取定一对值时，按照某一对应法则，z 有唯一确定的值与之对应，则称 z 是 x、y 的二元函数，记作：

$$z=f(x,y)$$

其中，x、y 是函数的自变量，x、y 的取值相对应的 z 值组成的集合叫做函数的值域。

例 1-1 设长方形的长为 x，宽为 y，那么它的面积 z 为：

$$z=x\cdot y$$

是二元函数，其定义域是 $\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$。

例 1-2 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为 $1-x^2-y^2\geqslant 0$，即 $x^2+y^2\leqslant 1$。

在以后的叙述中，若不特别指出，则指一元函数。

（二）复合函数

定义 3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$。当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分取值时，$\varphi(x)$ 的函数值均落在 $y=f(u)$ 的定义域内，则 y 成为 x 的函数，记为：$y=f[\varphi(x)]$。

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其定义域是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值落在 $y=f(u)$ 的定义域内所对应的 x 取值的全体，u 叫做中间变量。

例 1-3 $y=\sin(4x+6)$ 是由 $y=\sin u$ 及 $u=4x+6$ 复合而成的复合函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

$y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数，其定义域为 $[-1,1]$。

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数。例如：$y=\sqrt{u}$，$u=-1-x^2$ 就不能复合成一个复合函数。

复合函数不仅可以由两个函数，也可以由多个函数复合构成。例如：$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$ 就是由四个函数 $y=\lg u$，$u=1+V$，$V=\sqrt{Z}$，$Z=1+x^2$ 复合构成，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

在函数研究中，若能将一个复杂的函数看成由几个简单函数复合，有利于问题的解决。

（三）分段函数

定义 4 对于定义域内自变量 x 不同的值，函数 $f(x)$ 要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数。

例如：

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases},\quad y=\begin{cases}x^2-1 & x>0\\ x+1 & x\leqslant 0\end{cases}$$

都是定义在$(-\infty,+\infty)$的分段函数，其图象见图 1-1，图 1-2。

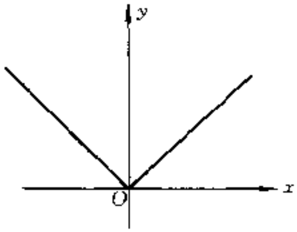

图 1-1

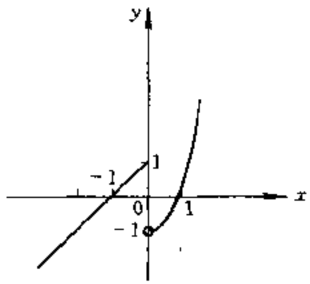

图 1-2

分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数。

例 1-4 （数量折扣与价格差） 设企业对某种商品规定了如下的价格差：购买量不超过 10 公斤的部分，每公斤 10 元；购买量超过 10 公斤且不超过 100 公斤的部分，每公斤 7 元；购买量超过 100 公斤的部分，每公斤 5 元。试求购买量为 x 公斤时的费用函数。

解 设费用函数为 $C(x)$，由有关价格的规定，有

$$C(x)=\begin{cases}10x & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 100+7(x-10) & 10<x\leqslant 100\\ 730+5(x-100) & x>100\end{cases}$$

例 1-5 （税收问题） 个人所得税中工资、薪金所得，适用 5%～45%的九级超额累进税率（税率见表 1-1）。表中“全月应纳税所得额”是指以每月收入额减除费用 800 元后的余额或减除附加费用后的余额。求应纳税所得额为 x 时所得税额。

表 1-1　个人所得税税率表(工资、薪金所得适用)

级　数	全月应纳税所得额	税率/%	速算扣除数
1	不超过 500 元的部分	5	0
2	超过 500～2000 元的部分	10	25
3	超过 2000～5000 元的部分	15	125
4	超过 5000～20000 元的部分	20	375
5	超过 20000～40000 元的部分	25	1375
6	超过 40000～60000 元的部分	30	3375
7	超过 60000～80000 元的部分	35	6375
8	超过 80000～100000 元的部分	40	10375
9	超过 100000 元的部分	45	15375

解　设所得税额为 $f(x)$，

$$f(x)=\begin{cases}0.05x=0.05x-0 & x\leqslant 500\\ 25+0.1(x-500) & 500<x\leqslant 2000\\ 175+0.15(x-2000) & 2000<x\leqslant 5000\\ 625+0.2(x-5000) & 5000<x\leqslant 20000\\ 3625+0.25(x-20000) & 20000<x\leqslant 40000\\ 8625+0.3(x-40000) & 40000<x\leqslant 60000\\ 14625+0.35(x-60000) & 60000<x\leqslant 80000\\ 21625+0.4(x-80000) & 80000<x\leqslant 100000\\ 29625+0.45(x-100000) & x>100000\end{cases}$$

即

$$f(x)=\begin{cases}0.05x-0 & x\leqslant 500\\ 0.1x-25 & 500<x\leqslant 2000\\ 0.15x-125 & 2000<x\leqslant 5000\\ 0.2x-375 & 5000<x\leqslant 20000\\ 0.25x-1375 & 20000<x\leqslant 40000\\ 0.30x-3375 & 40000<x\leqslant 60000\\ 0.35x-6375 & 60000<x\leqslant 80000\\ 0.4x-10375 & 80000<x\leqslant 100000\\ 0.45x-15375 & x>100000\end{cases}$$

此函数为分段函数，可用于计算税额。如某专家月薪 10000 元，应

缴个人所得税为：

（1）根据中国税法规定减除 800 元

$$10000-800=9200(\text{元})$$

（2）按九级超额累进税率计算

$$f(9200)=0.2\times9200-375=1465(\text{元})$$

在税法中有关超额累进制税率的计算与此类似。

（四）初等函数

1. 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数。

（1）常数函数　$y=C\quad x\in R$

（2）幂函数　$y=x^a$　（a 为任何实数）

（3）指数函数　$y=a^x$　（$a>0$ 且 $a\neq1$）

（4）对数函数　$y=\log_a x$　（$a>0$ 且 $a\neq1$）

（5）三角函数

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg} x,$$
$$y=\operatorname{ctg} x,\quad y=\sec x,\quad y=\csc x$$

（6）反三角函数

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg} x,$$
$$y=\operatorname{arcctg} x,\quad y-\operatorname{arcsec} x,\quad y=\operatorname{arccsc} x$$

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除四则运算和复合得到的能用一个式子表示的一切函数统称为初等函数。

初等函数是本书主要研究的对象。注意分段函数不是初等函数。

二、函数的几种简单性质

（一）函数的奇偶性

定义 5　若函数 $y=f(x)$有：$f(-x)=f(x)\quad x\in D_x$，则称 $y=f(x)$为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)\quad x\in D_x$，则称 $y=f(x)$为奇函数。

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

（二）函数的单调性

定义 6　若函数 $y=f(x)$对区间(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当

$x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在 (a,b) 内单调递增；当 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内单调递减。

（三）函数的有界性

定义 7 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个正数 M，对于所有 $x\in D_x$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D_x 上是有界的函数。

（四）函数的周期性

定义 8 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 a，使得 $f(x+a)=f(x)$ 恒成立，则称此函数为周期函数。

第二节 常用经济函数

一、需求函数、供给函数

（一）需求函数

需求是指消费者在一定的价格水平上对某种商品的有支付能力的需要。

由这一定义可知，需求是以消费者的货币购买力为前提，它相对于商品的某一价格水平而言。人们对某一商品的需求受许多因素的影响，如价格、收入、替代品、偏好等等。一般研究中，需求主要是价格的函数，记为 $Q=D(p)$。

例 1-6 市场上小麦的需求量为(每月)如表 1-2 所示。

表 1-2

价格 p/(元/公斤)	5	4	3	2	1
需求量 Q/百万公斤	9	10	12	15	20

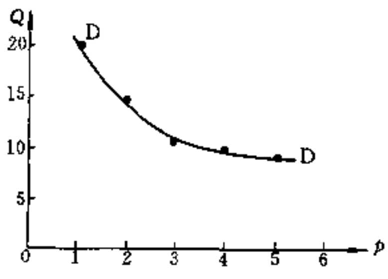

图 1-3

画出需求函数的曲线，见图 1-3。

这条曲线说明，小麦的需求量是价格的减函数，即当 p 增加时，Q 下降。这一性质在经济学中称为需求向下倾斜规律。这一规律适合许多商品。

（二）供给函数

供给是生产者或销售者在一

定价格水平上提供给市场的商品量。

供给量受诸多因素的影响。一般而言，它主要是价格的函数，记为 $Q=S(p)$。

例 1-7 生产者愿意提供的小麦数量如表 1-3 所示(每月)。

表 1-3

价格 p/(元/公斤)	5	4	3	2	1
供给量 Q/百万公斤	18	16	12	7	0

画出供给函数的曲线如图 1-4。

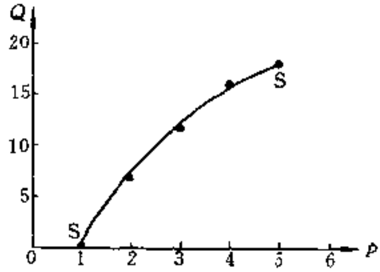

图 1-4

这条供给曲线向上倾斜，说明当小麦的价格较高时，农民愿意并有能力增加小麦的产量。这一规律也适合其他商品。

(三) 均衡价格

现在把例 1-6 和例 1-7 所给需求曲线与供给曲线结合起来分析。如图 1-5。

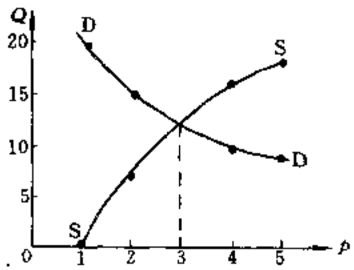

图 1-5

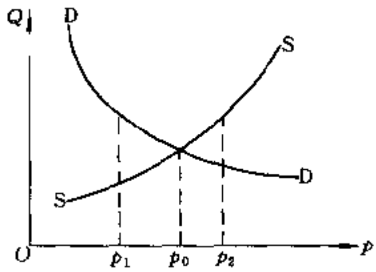

图 1-6

需求曲线 $Q=D(p)$ 与供给曲线 $Q=S(p)$ 相交处的价格 $p_0=3$(元)，在这一价格上，消费者愿意购买的小麦量为 12(百万公斤)，生产者愿意提供小麦的数量为 12(百万公斤)。

一般地，需求曲线 $Q=D(p)$ 与供给曲线 $Q=S(p)$ 相交处的价格 p_0，称为均衡价格(如图 1-6)。

在 p_1 处，商品供不应求，商品的价格将提高。在 p_2 处，供过于求，

商品的价格有下降的趋势。在 p_0 处,供给量等于需求量,价格平衡。

把经济原理用于分析法律,称为法律的经济分析。这一研究领域的代表人物是美国芝加哥大学法学院教授波斯纳。

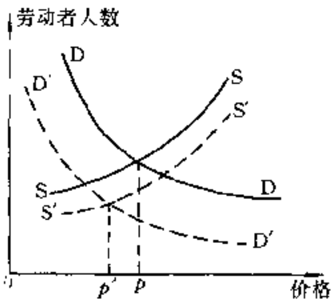

图 1-7

例 1-8 (劳动关系) 用人单位与劳动者通过劳动合同建立了劳动关系。假设用人单位随时都可以解除劳动合同,劳动者的需求量及供给量如图 1-7 所示。现在有一条新法规,要求用人单位解除劳动合同必须提前三个月通知劳动者(既使劳动合同中规定的期限不满三个月)。试分析这条法规。

这条法规的效果是保护劳动者,因为劳动期有了更大的保障,而用人单位要解除劳动合同比过去困难。

在这条法规之下,用人单位的机会成本增加,造成对劳动者需求下降,需求曲线下移 S′S′。另一方面,由于劳动者的劳动期限稳定,一段时期内,劳动者的供给减少,供给曲线下移。结果是劳动者的报酬有下降的趋势,$p'<p$(见图 1-7)。这说明,在其他条件不变的情况下,用人单位解除劳动合同比较困难时,就会以降低劳动者的报酬作为补偿。因此,在制定此条规定的同时,一定要注意制定与之相配套的法规,使对劳动者权益的保护落实到实处。

二、成本函数、销售收入函数

(一) 成本函数

成本是指生产制造产品所投入的原材料、人的劳动等生产资料的货币表现。它是产量的函数,记为 $C(x)$,其中 x 为产量。

在经济学中,把一定时期内的成本划分为固定成本和变动成本来研究。固定成本是指在一定时期和一定业务量范围内,不受产量增减变动影响的成本。例如厂房、机器、管理等费用,记为 F。变动成本是指在一定范围内随产量数量变化而变化的成本。例如,原材料、燃料等费用,记为 $V(x)$,x 为产量。

一定时期的总成本为：

$$C(x)=F+V(x)$$

在法学研究中，也可进行成本研究。例如：在刑事诉讼法学中，有的学者将刑事诉讼活动所需耗费的成本划分为直接成本和错误成本。直接成本是指国家专门机关和当事人及其他诉讼参与人在进行侦查、起诉、审判和执行过程中所直接消耗的费用。它是案件数 x 的函数。错误成本是指由于国家专门机关对被告人的不当追诉或错误判决所耗费的费用。

刑事诉讼中的总成本可表示为：

刑事诉讼成本＝直接成本＋错误成本

直接成本和错误成本，都可以用货币来计量，因而都属于经济成本的范畴。根据经济原则，在不影响收益的情况下，人们应该尽量缩减诉讼程序中的成本。刑事诉讼中的简易程序，辩护制度无疑是直接成本与错误成本的节省。

另外，在数量经济决策中，常用到机会成本。它是指将资源使用于某一方面而不能用于其他方面时所放弃的收益。例如，某人接受较高等教育的机会成本是他可以从事其他工作的所得。

（二）销售收入函数

销售收人是生产者出售一定量产品所得到的全部收入。

销售收入＝单价×销售量

（1）若销售量是单价的函数，设单价为 p，销售量为 Q，即 $Q=D(p)$（需求函数）则销售收人为：

$$R(p)=p\cdot Q=p\cdot D(p)$$

即销售收入是价格的函数。

（2）若单价是销售量的函数，设销售量为 x，单价为 $P(x)$，则销售收入为

$$R(x)=p\cdot x=P(x)\cdot x$$

即销售收人是销售量的函数。

（三）线性盈亏分析

假设单位可变成本为 v（常数），产量为 x，产量的单位价格为 p（常

数)，则总成本和销售收入可表示为：

$$C(x)=F+V(x)=F+V\cdot x$$

$$R(x)=px$$

两函数为 x 的一次函数，其图象如图 1-8 所示。

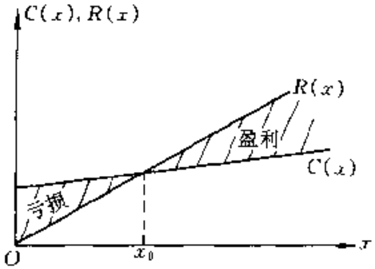

图 1-8

利润是指销售收入减去总成本的差额。记为 $L(x)$，即

$$L(x)=R(x)-C(x)$$

(1) 利润为零的保本产量

令 $L(x)=0$ 得

$$R(x)=C(x)$$

即 $$px=F+vx$$

$$x_0=\frac{F}{p-v}=\frac{\text{固定成本}}{\text{单价}-\text{单位变动成本}}$$

当 $x>x_0$ 时　$L(x)>0$ 企业盈利

当 $x<x_0$ 时　$L(x)<0$ 企业亏损

当 $x=x_0$ 时　$L(x)=0$ 企业保本

(2) 利润为 m 的保本产量

令 $L(x)=m$ 得

$$R(x)-C(x)=m$$

即 $$px-(F+vx)=m$$

$$x_1=\frac{F+m}{p-v}=\frac{\text{固定成本}+\text{目标利润}}{\text{单位价格}-\text{单位变动成本}}$$

例 1-9　某对外经贸公司接受一家外商订货，要签订出口某种新开发产品的合同。该产品经过核算，固定成本为 10 万美元，单位产品的可变成本为 100 美元，外商接受该种产品的售价为 300 美元，试问：

(1) 公司与外商签订合同时，必须签订出口多少件新产品的合同才不会亏本？

(2) 如果公司要争取第一年的盈利为 10 万美元，力争外商第一年订货必须达到多少件？