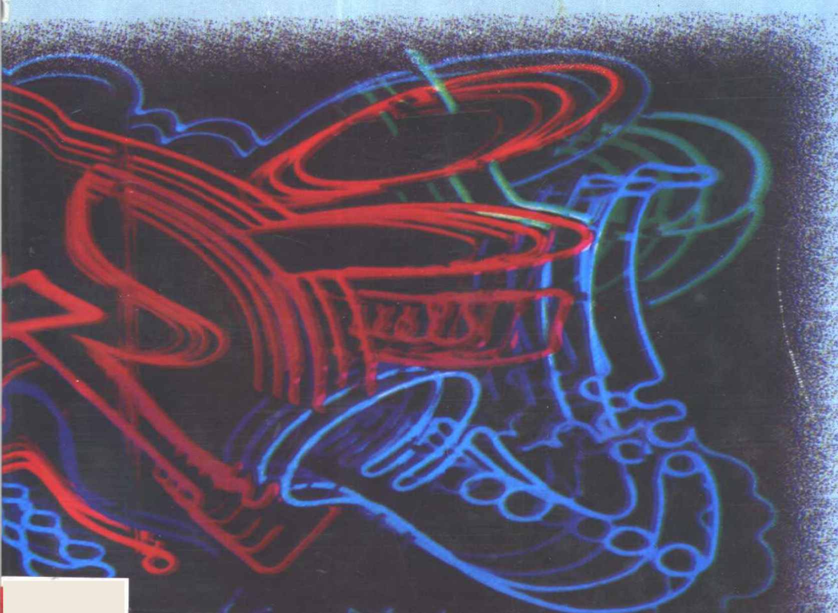
电磁理论的高频方法

DIAN CI LI LUN DE GAO PIN FANG FA



李永俊 编著

武汉大学出版社

电磁理论的高频方法

李永俊　编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁理论的高频方法/李永俊编著. —武汉：武汉大学出版社，1999. 7
ISBN 7-307-02647-3

Ⅰ. 电… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高频—电磁理论—研究生—教材 Ⅳ. O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 23468 号

武汉大学出版社出版
（430072 武昌 珞珈山）
湖北科学技术出版社黄冈印刷厂印刷
（436100 湖北省黄冈市宝塔大道 85 号）
新华书店湖北发行所发行
1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月第 1 次印刷
开本：850×1168 1/32 印张：5.75
字数：145 千字 印数：1—1000
ISBN 7-307-02647-3/O·197 定价：7.00 元

序

电磁场的散射、绕射问题，只有少数几种情况有严格解。对于复杂形体来说，求严格解就更难了，而且，在很多情况下，严格解也不便于应用，其计算工作量太大，于是各种近似方法应运而生。近似方法有解析近似方法和数字方法。与波长 λ 比较，当绕射体线长度 $L \gg \lambda$ 时，称为高频区段；当 L 与 λ 可以比拟时，称为谐振区段；当波长 $\lambda \gg L$ 时，称为低频区段，上述三个区段的理论处理方法有很大的差别。本书所介绍的是高频区段的理论方法。它广泛应用于雷达信号分析、目标雷达散射截面的预估与缩减、目标识别、隐身与反隐身、通信与遥感等技术领域。

作为研究生课程的教材，编者期望它是一段路基，使学生从本科生的水平通过它达到学科的前沿领域，以便学生学完本课后，能具备解决这一领域前沿课题的能力。同时也希望它对从事该领域的科技工作者有一定的参考价值。

本书在编写过程中得到了黄锡文教授、鲁述教授的鼓励与指导，同时，得到了研究生院领导、电信学院李吉星副院长与校出版社的支持，最后承蒙校生命科学院陈宝联、王莉娟两位老师为本书绘制了全部插图，使本书得以顺利出版。在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中定有不少谬误。恳望学界同仁不吝赐教，惠予指正。

李永俊

1997.4.30

目　　录

第一章　电磁理论基础

本章是电磁理论基础，所包含的内容将是以后各章论述的出发点。有些结论和公式将不加证明，而直接引自有关教科书或专著[1][2][3]。

§1.1　场方程

反映电磁场规律的 Maxwell 方程如下：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}_m-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_m\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1}$$

电流密度 $\boldsymbol{J}$、磁流密度 $\boldsymbol{J}_m$、电荷密度 ρ、磁荷密度 ρ_m 是场的源，遵守下列连续性方程：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\\&\nabla\cdot\boldsymbol{J}_m=-\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.2}$$

磁流密度 $\boldsymbol{J}_m$、磁荷密度 ρ_m 这两个量在客观现实中并不存在，引入它们是因为在某些实际问题中会带来方便。令 $\boldsymbol{J}_m=0$，$\rho_m=0$，就得到了符合客观实在的场方程。

方程(1.1.1)中含有电场强度 $\boldsymbol{E}$,磁场强度 $\boldsymbol{H}$,电位移矢量 $\boldsymbol{D}$,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。为了求解方程,计算场值,还必须知道联系这些量的反映媒质特性的本构关系(Constitutive relations)。本书只讨论各向同性线性媒质,本构关系为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.3}$$

式中:ε 为介质的介电常数,μ 为导磁率。

将场方程写成(1.1.1)的形式意味着:

(1) 采用了实用单位制;

(2) 场中所有物体都静止。

此外,还将假设媒质特性不随时间改变;在本书的大部分章节中,还假设 ε、μ 除了一些突变面以外,也不随空间改变,亦即只讨论均匀媒质中存在若干散射体的情况。实际上,本书的主要任务是研究:当存在电大尺寸的障碍物时,电磁场的精确计算问题。所谓电大尺寸是指障碍物的尺度大于波长的意思。

如果只讨论稳态电磁场,则方程中各物理量都含有 $e^{j\omega t}$ 的时间因子。这时方程(1.1.1)可以进一步简化为:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{J}_m - j\omega\mu \boldsymbol{H} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho/\varepsilon \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} &= \rho_m/\mu \end{aligned}\right\} \tag{1.1.4}$$

上述方程中只有第一、二个方程是独立的。第三、四个方程是不独立的。应用连续性方程(1.1.2),它们可以从第一、二个方程中推导出来。

在导电率为 σ 的媒质中,电流 $\boldsymbol{J}$ 包含两部分:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^C + \boldsymbol{J}^S$$

其中 $\boldsymbol{J}^C$ 服从欧姆定律 $\boldsymbol{J}^C = \sigma \boldsymbol{E}$,称为传导电流。$\boldsymbol{J}^S$ 为真正的源。对应地,$\rho = \rho^C + \rho^S$,且有

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{C}&=-\frac{\partial\rho^{C}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{J}^{S}&=-\frac{\partial\rho^{S}}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

将上式代入(1.1.4)式中，且只保留真正的源 $\boldsymbol{J}^{S}$，则有

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{J}^{S}+j\omega\hat{\varepsilon}\ \boldsymbol{E}\\ \nabla\times\ \boldsymbol{E}&=-\boldsymbol{J}_{m}-j\omega\mu\ \boldsymbol{H}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\rho^{S}/\hat{\varepsilon}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}&=\rho_{m}/\mu\end{aligned}\right\}\tag{1.1.5}$$

式中：$\hat{\varepsilon}=\varepsilon-\frac{j\sigma}{\omega}$。

这就是说，如果传导电流不当做源，则其影响是改变了介质的介电特性，介电特性 ε 应当用 $\hat{\varepsilon}$ 去取代，但场方程的形式仍保持不变。以后为了简便，$\boldsymbol{J}^{S}$ 右上角的 S 不再保留，只要方程中用的是 $\hat{\varepsilon}$，则 $\boldsymbol{J}$ 便代表真正的源。

§ 1.2 对偶原则

容易看出，场方程式(1.1.4)对下列变换保持不变：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\boldsymbol{H} &&\boldsymbol{H}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}\\ &\boldsymbol{J}\Leftrightarrow-J_{m} &&\boldsymbol{\rho}\Leftrightarrow\rho_{m}\\ &\varepsilon\Leftrightarrow-\mu &&\mu\Leftrightarrow-\varepsilon\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

如果认为 ε、μ 中包含感应产生的次级源，则上述变换可概括为：场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 互换时不变号，源量 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{J}_{m}$、ρ 与 ρ_{m}、ε 与 μ 互换时变号。

依据对偶原则，如果两种不同物理现象的物理量，遵守相同的方程，则其解亦有相同的数学形式。变换(1.2.1)式可以由已知的有关电场的公式推导出相应的磁场公式来；反之，可以从有关磁场的公式推导出其对偶问题的电场公式来。这为解决某些实际问题

带来了方便,并减少了工作量。

事实上,由于场方程是线性方程,所以场遵守叠加原理,其解可以看成是每组源单独作用所产生的场的叠加。

第一组源为 j、ρ,设它产生的场为 $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$,则 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{H}_1$ 是下列方程的解:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{J}+j\omega\hat{\varepsilon}\,\boldsymbol{E}_1\\
&\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-j\omega\mu\,\boldsymbol{H}_1\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1=\rho/\hat{\varepsilon}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{H}_1=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.2}$$

第二组源为 $\boldsymbol{J}_m$、ρ_m,对应的场为 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{H}_2$,它们是下面方程的解:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\boldsymbol{H}_2=j\omega\hat{\varepsilon}\,\boldsymbol{E}_2\\
&\nabla\times\boldsymbol{E}_2=-\boldsymbol{J}_m-j\omega\mu\,\boldsymbol{H}_2\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{E}_2=0\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{H}_2=\rho_m/\mu
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.3}$$

总场

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\\
&\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.4}$$

由于方程(1.2.2)与(1.2.3)符合对偶原则,则只要实行变换 $\boldsymbol{E}_1\Rightarrow\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_1\Rightarrow\boldsymbol{E}_2$, $\hat{\varepsilon}\Rightarrow-\mu$, $\mu\Rightarrow-\hat{\varepsilon}$,就可以将(1.2.2)变成(1.2.3),这样求得了一个问题的解,便同时也求得了对偶问题的解。

§1.3 求解电磁场的位方法

位的概念、位的理论方法在电磁理论体系中相当重要。由(1.2.2)的第四式引入磁矢位 $\boldsymbol{A}$,有

$$\boldsymbol{H}_1=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

由(1.2.3)的第三式引入电矢位 $\boldsymbol{F}$,有

$$E_2 = -\nabla \times \boldsymbol{F}$$

容易证明，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 是下列非齐次 Helmholtz 方程的解：

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{J} \\ &\nabla^2 \boldsymbol{F} + k^2 \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{J}_m \end{aligned}\right\} \tag{1.3.1}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 = \nabla\nabla\cdot - \nabla\times\nabla\times \\ &k^2 = \omega^2 \mu\hat{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.2}$$

当然，相应地还有标量电位 Φ_e 与标量磁位 Φ_m，它们与 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{F}$ 之间遵守洛伦兹条件：

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{A} + j\omega\hat{\varepsilon}\Phi_m = 0 \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{F} + j\omega\mu\Phi_e = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.3.3}$$

且 Φ_e、Φ_m 满足标量波动方程。

总场(1.2.4)式现在变为：

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E} = -\nabla\times\boldsymbol{F} - j\omega\mu\boldsymbol{A} + \frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \\ &\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A} - j\omega\hat{\varepsilon}\boldsymbol{F} + \frac{1}{j\omega\mu}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) \end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$

由于在写出(1.3.4)式时已经考虑了(1.3.3)式，故 Φ_e 与 Φ_m 没出现在(1.3.4)式中。

这一过程，实质上是将求电磁场的问题转化为先求位，然后再按(1.3.4)式由位求场。

在有些实际问题中引入极化位是很方便的。电极化位 $\boldsymbol{\Pi}$ 由下式引入：

$$\boldsymbol{A} = \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{\Pi}}{\partial t} + \sigma\boldsymbol{\Pi}$$

磁极化位 $\boldsymbol{\Pi}_m$ 由下式引入：

$$\boldsymbol{F} = \mu\frac{\partial\boldsymbol{\Pi}_m}{\partial t}$$

容易证明：它们的源是电极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 与磁化矢量 $\boldsymbol{M}$。由于本书与这部分内容无关，故从略。

在实行对偶变换时，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{F}$ 矢量遵守源的互换规则，互换时变号；$\boldsymbol{\Pi}$ 与 $\boldsymbol{\Pi}_m$ 按场的规则互换，互换时不变号。

§ 1.4　利用矢量 Green 定理解场的方程

这一方法最初由 STRATTON-朱兰成对简谐场的情况给出证明[1]。文献[5]给出了一般情况——瞬态电磁场——下的证明。对证明过程不感兴趣的读者，可直接看它的结果。

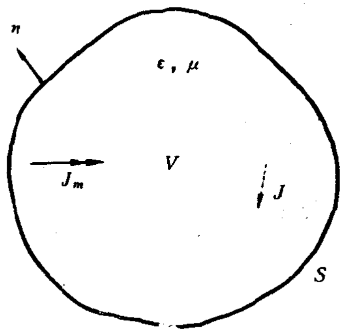


图 1.1

将(1.1.3)代入(1.1.1)，容易求得矢量波动方程：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}\\&\quad=-\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{J}_m}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{J}\\&\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\\&\quad=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}-\nabla\times\boldsymbol{J}_m\end{aligned}\right\}\tag{1.4.1}$$

由矢量 Green 定理，当封闭面 S 包围体积 V 时

$$\int_V\{\boldsymbol{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q}-(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P})\cdot\boldsymbol{Q}\}\mathrm{d}V$$
$$=-\oiint_S\{\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q}+(\nabla\times\boldsymbol{P})\times\boldsymbol{Q}\}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\tag{1.4.2}$$

式中：$\boldsymbol{n}$ 为 S 面的外法线。

$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 为定义于 V 内及 S 面上，且能使(1.4.2)式的各种运算有意义的两个矢量。

令　$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{Q}=\frac{\delta\left(t-t'+\dfrac{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|}{v}\right)}{4\Pi|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|}\boldsymbol{a}=v_1\boldsymbol{a}\tag{1.4.3}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 为任意一常矢量，$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{R}'$ 分别为源点与场点矢径。显然，v_1 是下述波动方程的解[4]：

$$\nabla^2 v_1 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')\delta(t-t') \qquad (1.4.4)$$

而 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 是波的传播速度。于是易证：

$$\nabla \times \boldsymbol{Q} = \nabla v_1 \times \boldsymbol{a}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{Q} &= (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\nabla V_1 - \boldsymbol{a}\nabla^2 v_1 \\ &= \nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1) - \boldsymbol{a}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \boldsymbol{a}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')\delta(t-t')\end{aligned}$$

因为写上式时用到了常矢量 $\boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\nabla v_1 = \nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1)$$

将上述结果代入矢量 Green 定理中，并对 t 积分，有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_v \Big\{\boldsymbol{E}\Big[\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1) - \boldsymbol{a}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \boldsymbol{a}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')\delta(t-t')\Big] \\ &\qquad - v_1\boldsymbol{a}\cdot\Big[-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} - \nabla\times\boldsymbol{J}_m\Big]\Big\}\mathrm{d}V\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\oiint_S \Big\{\boldsymbol{E}\times(\nabla v_1\times\boldsymbol{a}) - \mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\times(v_1\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{J}_m\times(v_1\boldsymbol{a})\Big\}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned} \qquad (1.4.5)$$

又因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1) &= \nabla\cdot\{(\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1)\boldsymbol{E}\} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1)\nabla\cdot\boldsymbol{E} \\ &= \nabla\cdot\{\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1)\boldsymbol{E}\} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1)\frac{\rho}{\varepsilon}\end{aligned} \qquad (1.4.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x = f(x')$$

以及对 v_1 来说有 $\nabla' = -\nabla$，所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \boldsymbol{E}\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1)\mathrm{d}V\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\oiint_S (\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\ &+ \boldsymbol{a}\cdot\nabla'\int_V \frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon\,|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|}\mathrm{d}V\end{aligned} \qquad (1.4.7)$$

为书写简便,上式中已记$|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|=r$.[ ]表示以$t'-\frac{r}{v}$去代换式中的$t$。又因

$$\int f(x)\delta''(x-x')\mathrm{d}x=f''(x') \tag{1.4.8}$$

$$\therefore\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_V v_1\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}V\mathrm{d}t=\int_V\frac{\boldsymbol{a}}{4\pi r v^2}\left[\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}V$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}\frac{1}{v_2}\frac{\delta''}{4\pi r}\mathrm{d}V\mathrm{d}t=\int\frac{\boldsymbol{a}}{4\pi r v^2}\left[\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}V$$

上述结果表明(1.4.5)式中这两项互相抵消,所以(1.4.5)式左方变为

$$\begin{aligned}I_{左}=&\int_{-\infty}^{+\infty}\oiint_S(\boldsymbol{a}\cdot\nabla v_1)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\boldsymbol{a}\cdot\left\{\nabla'\int_V\frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{d}V\right.\\&\left.+\boldsymbol{E}(R'\cdot t')+\int_V\frac{\mu}{4\pi r}\left[\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\mathrm{d}V+\frac{\nabla'\times}{4\pi}\int_V\frac{[\boldsymbol{J}_m]}{r}\mathrm{d}V\right\}\\&+\oiint\left(\boldsymbol{n}\times\frac{[\boldsymbol{J}_m]}{4\pi r}\right)\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

在写出上式时还用到了[2]

$$\nabla'\times[\boldsymbol{J}_m]=[\nabla'\times\boldsymbol{J}_m]-\frac{\nabla' r}{v}\times\left[\frac{\partial\boldsymbol{J}_m}{\partial t}\right] \tag{1.4.10}$$

$$\begin{aligned}\nabla'\times\left[\frac{\boldsymbol{J}_m}{4\pi r}\right]&=\frac{1}{4\pi}\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\times[\boldsymbol{J}_m]+\frac{1}{4\pi r}\nabla'\times[\boldsymbol{J}_m]\\&=\frac{-1}{4\pi}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times[\boldsymbol{J}_m]+\frac{1}{4\pi r}\left\{[\nabla'\times\boldsymbol{J}_m]+\frac{1}{v}\nabla r\times\left[\frac{\partial\boldsymbol{J}_m}{\partial t}\right]\right\}\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

又因$\nabla'\times\boldsymbol{J}_m=0$,所以

$$\begin{aligned}\nabla'\times\frac{[\boldsymbol{J}_m]}{4\pi r}&=-\nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\times[\boldsymbol{J}_m]+\frac{1}{4\pi r}\{[\nabla\times\boldsymbol{J}_m]-\nabla\times[\boldsymbol{J}_m]\}\\&=-\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi r}[\boldsymbol{J}_m]\right)+\frac{1}{4\pi r}[\nabla\times\boldsymbol{J}_m]\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

对(1.4.5)式右边,注意到

$$\nabla v_1 = \delta \nabla \left(\frac{1}{4\pi r}\right) + \frac{\delta' \nabla r}{4\pi v r} \tag{1.4.13}$$

$$\int f(x)\delta'(x - x')\mathrm{d}x = - f'(x') \tag{1.4.14}$$

所以,(1.4.5)式右边应为

$$I_{右} = -\oiint_S \left\{[\boldsymbol{E}] \times \left(\nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right) \times \boldsymbol{a}\right) - \left[\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right] \times \frac{\nabla r \times \boldsymbol{a}}{v 4\pi r} - \right.$$

$$\left. \mu\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right] \times \frac{\boldsymbol{a}}{4\pi r} - \frac{[\boldsymbol{J}_m]}{4\pi r} \times \boldsymbol{a}\right\} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$\because \quad \boldsymbol{n} \cdot \left(\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \times \frac{\boldsymbol{a}}{4\pi r}\right) = \frac{\mu \boldsymbol{a}}{4\pi r} \cdot \left(\boldsymbol{n} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right]\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{[\boldsymbol{E}] \times \left(\nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right) \times \boldsymbol{a}\right\} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \cdot \left\{(\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{E}]) \times \nabla \frac{1}{4\pi r}\right\} \\ \left\{\left[\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}\right] \times \frac{(\nabla r \times \boldsymbol{a})}{4\pi r v}\right\} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \cdot \left(\boldsymbol{n} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right]\right) \times \frac{\nabla r}{4\pi v r}\right) \end{array}\right\} \tag{1.4.15}$$

$$\therefore \quad I_{右} = -\boldsymbol{a} \cdot \oiint \left\{\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{E}] \times \nabla \frac{1}{4\pi r} - \left(\boldsymbol{n} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right]\right) \times \frac{\nabla r}{4\pi v r}\right.$$

$$\left. - \frac{\mu}{4\pi r}\boldsymbol{n} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right] - \frac{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{J}_m}{4\pi r}\right\} \cdot \mathrm{d}S$$

而(1.4.9)式中的

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \oiint_S [\boldsymbol{a} \cdot \nabla v_1]\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

$$= \oiint_S \boldsymbol{a} \cdot \left\{\nabla \frac{1}{4\pi r}\{[\boldsymbol{E}] \cdot \boldsymbol{n}\} - \frac{\nabla r}{v 4\pi r}\left\{\left[\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right] \cdot \boldsymbol{n}\right\}\right\}\mathrm{d}S \tag{1.4.16}$$

综合上述结果,并注意

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}_m}{\partial t}\right] = \frac{\partial [\boldsymbol{J}_m]}{\partial t'},$$

以及考虑到 $\boldsymbol{a}$ 的任意性,最后得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}' \cdot t') = -\frac{\partial}{\partial t'}\int_V \frac{\mu[\boldsymbol{J}]}{4\pi r}\mathrm{d}V - \nabla'\int_V \frac{[\rho]}{4\pi \varepsilon r}\mathrm{d}V - \frac{\nabla'}{4\pi} \times$$

$$\int_V \frac{[J_m]}{r}\mathrm{d}V - \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{(\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{E}]\times\nabla\frac{1}{r} - \left(\boldsymbol{n}\times\left[\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right]\times\frac{\nabla r}{vr}\right.\right.$$

$$\left.+(\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{E}])\nabla\frac{1}{r} - \left(\boldsymbol{n}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right]\right)\frac{\nabla r}{vr} - \frac{1}{r}\boldsymbol{n}\times\left[\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}S$$

(1.4.17)

类似地，可得磁场的表达式：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}',t') = -\frac{\partial}{\partial t'}\int_V \frac{\boldsymbol{\varepsilon}[J_m]}{4\pi r}\mathrm{d}V - \nabla'\int_V \frac{[\rho_m]}{4\pi\mu r}\mathrm{d}V + \nabla'\times$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{[\boldsymbol{J}]}{r}\mathrm{d}V - \frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{(\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{H}]\times\nabla\frac{1}{r} - \left(\boldsymbol{n}\times\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right]\right)\times\right.$$

$$\left.\frac{\nabla r}{vr} + \boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{H}]\nabla\frac{1}{r} - \left(\boldsymbol{n}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right]\right)\frac{\nabla r}{vr} + \frac{1}{r}\boldsymbol{n}\times\left[\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}S$$

(1.4.18)

这就是电磁场的非稳态 Helmholtz 公式。当我们只考虑简谐场时，式中所有各量都含有 $e^{j\omega t}$ 的因子，如

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}',t') = \boldsymbol{E}(R')e^{j\omega t'}$$

再注意到：

$$\frac{\omega}{v} = k \quad \nabla G = \nabla\frac{e^{-jkr}}{r} = e^{-jkr}\quad\nabla\frac{1}{r} - \frac{jk}{r}e^{-jkr}\quad\nabla r \qquad (1.4.19)$$

于是(1.4.17)、(1.4.18)式立刻变为：

$$\boldsymbol{E}(R') = \frac{1}{4\pi}\int_V\left\{-j\omega\mu G\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}_m\times\nabla G + \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla G\right\}\mathrm{d}V$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_S\{j\omega\mu(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})G - (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla G - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla G\}\mathrm{d}S$$

(1.4.20)

$$\boldsymbol{H}(R') = \frac{1}{4\pi}\int_V\left\{-j\omega\varepsilon G\boldsymbol{J}_m + \boldsymbol{J}\times\nabla G + \frac{\rho_m}{\mu}\nabla G\right\}\mathrm{d}V$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_S\{-j\omega\varepsilon(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})G - (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla G - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla G\}\mathrm{d}S$$

与[1]中给出的稳态解完全一致。上式就是 Stratton-朱兰成公式。(1.4.17)与(1.4.18)式可以看做是它的推广。