

电磁理论的高频方法

DIAN CI LI LUN DE GAO PIN FANG FA

李永俊
编著



武汉大学出版社

电磁理论的高频方法

李永俊 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁理论的高频方法/李永俊编著. —武汉: 武汉大学出版社, 1999. 7

ISBN 7-307-02647-3

I. 电… II. 李… III. 高频—电磁理论—研究生—教材 IV. O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 23468 号

武汉大学出版社出版

(430072 武昌 珞珈山)

湖北科学技术出版社黄冈印刷厂印刷

(436100 湖北省黄冈市宝塔大道 85 号)

新华书店湖北发行所发行

1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月第 1 次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 5.75

字数: 145 千字 印数: 1—1000

ISBN 7-307-02647-3/O · 197 定价: 7.00 元

本书如有印装质量问题, 请寄承印厂调换

序

电磁场的散射、绕射问题,只有少数几种情况有严格解。对于复杂形体来说,求严格解就更难了,而且,在很多情况下,严格解也不便于应用,其计算工作量太大,于是各种近似方法应运而生。近似方法有解析近似方法和数字方法。与波长 λ 比较,当绕射体线长度 $L \gg \lambda$ 时,称为高频区段;当 L 与 λ 可以比拟时,称为谐振区段;当波长 $\lambda \gg L$ 时,称为低频区段,上述三个区段的理论处理方法有很大的差别。本书所介绍的是高频区段的理论方法。它广泛应用于雷达信号分析、目标雷达散射截面的预估与缩减、目标识别、隐身与反隐身、通信与遥感等技术领域。

作为研究生课程的教材,编者期望它是一段路基,使学生从本科生的水平通过它达到学科的前沿领域,以便学生学完本课后,能具备解决这一领域前沿课题的能力。同时也希望它对从事该领域的科技工作者有一定的参考价值。

本书在编写过程中得到了黄锡文教授、鲁述教授的鼓励与指导,同时,得到了研究生院领导、电信学院李吉星副院长与校出版社的支持,最后承蒙校生命科学院陈宝联、王莉娟两位老师为本书绘制了全部插图,使本书得以顺利出版。在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中定有不少谬误。恳望学界同仁不吝赐教,惠予指正。

李永俊

1997.4.30

目 录

第一章 电磁理论基础	1
§ 1.1 场方程	1
§ 1.2 对偶原则	3
§ 1.3 求解电磁场的位方法	4
§ 1.4 利用矢量 Green 定理场的方程	6
§ 1.5 推广的 Stratton-朱兰成公式	11
§ 1.6 无源区的标量位	14
§ 1.7 边界条件	16
§ 1.8 柱面波	17
§ 1.9 三维问题化为二维问题	19
第二章 几何光学场的计算与射线追踪	21
§ 2.1 程函方程	21
§ 2.2 各向同性媒质中的射线	23
§ 2.3 两种特殊情况下的光线	25
§ 2.4 几何光学的几个定律	27
2.4.1 折射定律和反射定律	27
2.4.2 Lagrange 积分不变式	28
2.4.3 Fermat 原理	29
2.4.4 光线和它们的焦点特性	30
2.4.5 Malus 和 Dupin 定理	31
§ 2.5 射束的性质与强度定律	32

§ 2.6 介质特性突变面对像散射束的影响	
——射线追迹	34
第三章 场的积分方程与物理光学法	42
§ 3.1 求解散射场的积分方程	42
§ 3.2 物理光学法	44
§ 3.3 例:平面波垂直入射时劈的绕射场的物理 光学近似	46
第四章 边缘绕射场的计算	
——几何绕射理论(一)	52
§ 4.1 垂直入射时直劈对平面波的绕射	53
4.1.1 本征级数解	53
4.1.2 解的路积分形式	55
4.1.3 绕射项与几何光学项的分离	57
4.1.4 绕射场的近似表达式	61
4.1.5 影界上的场和几种特殊情况	64
4.1.6 绕射射线与绕射系数	67
§ 4.2 直劈斜投射	70
§ 4.3 边缘绕射的理论计算公式	
——像散波束照射下的曲边绕射	75
4.3.1 Keller 定律	76
4.3.2 像散波束照射下的边缘绕射场的表达式	77
4.3.3 一致性与非一致性绕射系数	79
§ 4.4 等效边缘电(磁)流法	82
第五章 曲面绕射场的计算	
——几何绕射理论(二)	85
§ 5.1 无限长理想导电圆柱对平面波的绕射	85
5.1.1 电极化波	86
5.1.2 磁极化波	103
§ 5.2 斜入射的情况	107
§ 5.3 射线坐标系	113

§ 5.4 曲面绕射的 G.T.D 计算公式	115
第六章 凸曲面上口径天线的辐射场	
——几何绕射理论(三)	121
§ 6.1 定解问题	121
§ 6.2 无限长导电圆柱上磁振子辐射场 的 UTD 近似	122
6.2.1 圆柱面上的轴向磁振子	122
6.2.2 圆柱面上的周向磁振子	128
§ 6.3 任意凸曲面上磁振子的辐射场的 UTD 解	131
第七章 物理绕射理论	136
§ 7.1 引言	136
§ 7.2 直劈对平面波的绕射	138
7.2.1 垂直入射时的严格解	138
7.2.2 附加电流辐射的绕射场	141
7.2.3 斜投射时,直劈对平面波的绕射	143
§ 7.3 应用实例:圆盘对电磁波的绕射	144
7.3.1 物理光学场的计算	145
7.3.2 附加电流辐射场的计算	146
7.3.3 垂直入射时圆盘的总散射场	150
附 录	152
参考文献	173

第一章 电磁理论基础

本章是电磁理论基础,所包含的内容将是以后各章论述的出发点。有些结论和公式将不加证明,而直接引自有关教科书或专著^{[1][2][3]}。

§ 1.1 场方程

反映电磁场规律的 Maxwell 方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

电流密度 $\mathbf{J}$ 、磁流密度 $\mathbf{J}_m$ 、电荷密度 ρ 、磁荷密度 ρ_m 是场的源,遵守下列连续性方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_m &= -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

磁流密度 $\mathbf{J}_m$ 、磁荷密度 ρ_m 这两个量在客观现实中并不存在,引入它们是因为在某些实际问题中会带来方便。令 $\mathbf{J}_m = 0$, $\rho_m = 0$, 就得到了符合客观实在的场方程。

方程(1.1.1)中含有电场强度 E , 磁场强度 H , 电位移矢量 D , 磁感应强度 B 。为了求解方程, 计算场值, 还必须知道联系这些量的反映媒质特性的本构关系(Constitutive relations)。本书只讨论各向同性线性媒质, 本构关系为

$$\left. \begin{aligned} D &= \epsilon E \\ B &= \mu H \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

式中: ϵ 为介质的介电常数, μ 为导磁率。

将场方程写成(1.1.1)的形式意味着:

- (1) 采用了实用单位制;
- (2) 场中所有物体都静止。

此外, 还将假设媒质特性不随时间改变; 在本书的大部分章节中, 还假设 ϵ 、 μ 除了一些突变面以外, 也不随空间改变, 亦即只讨论均匀媒质中存在若干散射体的情况。实际上, 本书的主要任务是研究: 当存在电大尺寸的障碍物时, 电磁场的精确计算问题。所谓电大尺寸是指障碍物的尺度大于波长的意思。

如果只讨论稳态电磁场, 则方程中各物理量都含有 $e^{j\omega t}$ 的时间因子。这时方程(1.1.1)可以进一步简化为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times H &= J + j\omega\epsilon E \\ \nabla \times E &= -j\omega\mu H \\ \nabla \cdot E &= \rho/\epsilon \\ \nabla \cdot H &= \rho_m/\mu \end{aligned} \right\} \quad (1.1.4)$$

上述方程中只有第一、二个方程是独立的。第三、四个方程是不独立的。应用连续性方程(1.1.2), 它们可以从第一、二个方程中推导出来。

在导电率为 σ 的媒质中, 电流 J 包含两部分:

$$J = J^C + J^S$$

其中 J^C 服从欧姆定律 $J^C = \sigma E$, 称为传导电流。 J^S 为真正的源。

对应地, $\rho = \rho^C + \rho^S$, 且有

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}^c &= -\frac{\partial \rho^c}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{J}^s &= -\frac{\partial \rho^s}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

将上式代入(1.1.4)式中,且只保留真正的源 $\mathbf{J}^s$,则有

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}^s + j\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m - j\omega \mu \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho^s / \hat{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \rho_m / \mu \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

式中: $\hat{\epsilon} = \epsilon - \frac{j\sigma}{\omega}$ 。

这就是说,如果传导电流不当做源,则其影响是改变了介质的介电特性,介电特性 ϵ 应当用 $\hat{\epsilon}$ 去取代,但场方程的形式仍保持不变。以后为了简便, $\mathbf{J}^s$ 右上角的 s 不再保留,只要方程中用的是 $\hat{\epsilon}$,则 $\mathbf{J}$ 便代表真正的源。

§ 1.2 对偶原则

容易看出,场方程式(1.1.4)对下列变换保持不变:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\Leftrightarrow \mathbf{H} & \mathbf{H} &\Leftrightarrow \mathbf{E} \\ \mathbf{J} &\Leftrightarrow -\mathbf{J}_m & \rho &\Leftrightarrow \rho_m \\ \epsilon &\Leftrightarrow -\mu & \mu &\Leftrightarrow -\epsilon \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

如果认为 ϵ 、 μ 中包含感应产生的次级源,则上述变换可概括为:场量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 互换时不变号,源量 $\mathbf{J}$ 与 $\mathbf{J}_m$ 、 ρ 与 ρ_m 、 ϵ 与 μ 互换时变号。

依据对偶原则,如果两种不同物理现象的物理量,遵守相同的方程,则其解亦有相同的数学形式。变换(1.2.1)式可以由已知的有关电场的公式推导出相应的磁场公式来;反之,可以从有关磁场的公式推导出其对偶问题的电场公式来。这为解决某些实际问题

带来了方便,并减少了工作量。

事实上,由于场方程是线性方程,所以场遵守叠加原理,其解可以看成是每组源单独作用所产生的场的叠加。

第一组源为 j, ρ , 设它产生的场为 E_1, H_1 , 则 E_1, H_1 是下列方程的解:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times H_1 &= J + j\omega\hat{\epsilon} E_1 \\ \nabla \times E_1 &= -j\omega\mu H_1 \\ \nabla \cdot E_1 &= \rho/\hat{\epsilon} \\ \nabla \cdot H_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

第二组源为 J_m, ρ_m , 对应的场为 E_2, H_2 , 它们是下面方程的解:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times H_2 &= j\omega\hat{\epsilon} E_2 \\ \nabla \times E_2 &= -J_m - j\omega\mu H_2 \\ \nabla \cdot E_2 &= 0 \\ \nabla \cdot H_2 &= \rho_m/\mu \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

总场

$$\left. \begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ H &= H_1 + H_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

由于方程(1.2.2)与(1.2.3)符合对偶原则,则只要实行变换 $E_1 \Rightarrow H_2, H_1 \Rightarrow E_2, \hat{\epsilon} \Rightarrow -\mu, \mu \Rightarrow -\hat{\epsilon}$, 就可以将(1.2.2)变成(1.2.3), 这样求得了一个问题的解, 便同时也求得了对偶问题的解。

§ 1.3 求解电磁场的位方法

位的概念、位的理论方法在电磁理论体系中相当重要。由(1.2.2)的第四式引入磁矢位 A , 有

$$H_1 = \nabla \times A$$

由(1.2.3)的第三式引入电矢位 F , 有

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \times \mathbf{F}$$

容易证明, $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{F}$ 是下列非齐次 Helmholtz 方程的解:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} &= -\mathbf{J} \\ \nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} &= -\mathbf{J}_m \end{aligned} \right\} \quad (1.3.1)$$

$$\text{式中: } \left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times \\ k^2 &= \omega^2 \mu \hat{\epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

当然,相应地还有标量电位 Φ_e 与标量磁位 Φ_m , 它们与 $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$ 之间遵守洛伦兹条件:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \hat{\epsilon} \Phi_m &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{F} + j\omega \mu \Phi_e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

且 Φ_e 、 Φ_m 满足标量波动方程。

总场(1.2.4)式现在变为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \times \mathbf{F} - j\omega \mu \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega \hat{\epsilon}} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} - j\omega \hat{\epsilon} \mathbf{F} + \frac{1}{j\omega \mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

由于在写出(1.3.4)式时已经考虑了(1.3.3)式,故 Φ_e 与 Φ_m 没出现在(1.3.4)式中。

这一过程,实质上是将求电磁场的问题转化为先求位,然后再按(1.3.4)式由位求场。

在有些实际问题中引入极化位是很方便的。电极化位 Π 由下式引入:

$$\mathbf{A} = \epsilon \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sigma \Pi$$

磁极化位 Π_m 由下式引入:

$$\mathbf{F} = \mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial t}$$

容易证明:它们的源是电极化矢量 $\mathbf{P}$ 与磁化矢量 $\mathbf{M}$ 。由于本书与这部分内容无关,故从略。

在实行对偶变换时, $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{F}$ 矢量遵守源的互换规则, 互换时变号; Π 与 Π_m 按场的规则互换, 互换时不变号。

§ 1.4 利用矢量 Green 定理解场的方程

这一方法最初由 STRATTON-朱兰成对简谐场的情况给出证明^[1]。文献^[5]给出了一般情况——瞬态电磁场——下的证明。对证明过程不感兴趣的读者, 可直接看它的结果。

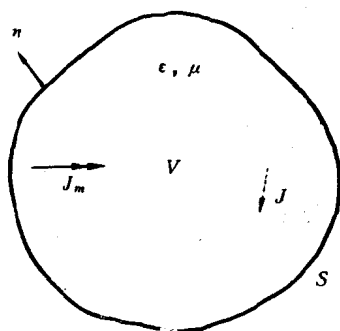


图 1.1

将(1.1.3)代入(1.1.1), 容易求得矢量波动方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \\ = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{J} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ = -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{J}_m \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1)$$

由矢量 Green 定理, 当封闭面 S 包

围体积 V 时

$$\begin{aligned} \int_V \{ \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q} \} dV \\ = - \oint_S \{ \mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} + (\nabla \times \mathbf{P}) \times \mathbf{Q} \} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

式中: $\mathbf{n}$ 为 S 面的外法线。

$\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{Q}$ 为定义于 V 内及 S 面上, 且能使(1.4.2)式的各种运算有意义的两个矢量。

令 $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, 则

$$\mathbf{Q} = \frac{\delta(t - t' + \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}{v})}{4\pi |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \mathbf{a} = v_1 \mathbf{a} \quad (1.4.3)$$

式中 $\mathbf{a}$ 为任意一常矢量, $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{R}'$ 分别为源点与场点矢径。显然, v_1 是下述波动方程的解^[4]:

$$\nabla^2 v_1 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\delta(t - t') \quad (1.4.4)$$

而 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ 是波的传播速度。于是易证:

$$\nabla \times \mathbf{Q} = \nabla v_1 \times \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} &= (\mathbf{a} \cdot \nabla) \nabla v_1 - \mathbf{a} \nabla^2 v_1 \\ &= \nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) - \mathbf{a} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \mathbf{a} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\delta(t - t') \end{aligned}$$

因为写上式时用到了常矢量 $\mathbf{a}$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \nabla v_1 = \nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1)$$

将上述结果代入矢量 Green 定理中, 并对 t 积分, 有

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \left\{ \mathbf{E} \cdot [\nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) - \mathbf{a} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \mathbf{a} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\delta(t - t')] \right. \\ &\quad \left. - v_1 \mathbf{a} \cdot \left[-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{J}_m \right] \right\} dV dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \left\{ \mathbf{E} \times (\nabla v_1 \times \mathbf{a}) - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \times (v_1 \mathbf{a}) - \mathbf{J}_m \times (v_1 \mathbf{a}) \right\} dS dt \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

又因为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) &= \nabla \cdot \{ (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) \mathbf{E} \} - (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \nabla \cdot \{ (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) \mathbf{E} \} - (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x')$$

以及对 v_1 来说有 $\nabla' = -\nabla$, 所以

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{E} \cdot \nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) dV dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS dt \\ &\quad + \mathbf{a} \cdot \nabla' \int_V \frac{[\rho]}{4\pi\epsilon |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} dV \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

为书写简便, 上式中已记 $|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| = r$, $[\]$ 表示以 $t' - \frac{r}{v}$ 去代换式中的 t 。又因

$$\int f(x) \delta''(x - x') dx = f''(x') \quad (1.4.8)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{v}_1 \mathbf{a} \cdot \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) dV dt &= \int_V \frac{\mathbf{a}}{4\pi r v^2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right] dV \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \frac{1}{v_2} \frac{\partial^2}{4\pi r} dV dt &= \int \frac{\mathbf{a}}{4\pi r v^2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right] dV \end{aligned}$$

上述结果表明(1.4.5)式中这两项互相抵消, 所以(1.4.5)式左方变为

$$\begin{aligned} I_{\text{左}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S (\mathbf{a} \cdot \nabla v_1) \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS dt + \mathbf{a} \cdot \left\{ \nabla' \int_V \frac{[\rho]}{4\pi \epsilon r} dV \right. \\ &\quad + \mathbf{E}(\mathbf{R}' \cdot \mathbf{t}') + \int_V \frac{\mu}{4\pi r} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right] dV + \frac{\nabla' \times \int_V \frac{[\mathbf{J}_m]}{r} dV \Big\} \\ &\quad + \oint_S \left(\mathbf{n} \times \frac{[\mathbf{J}_m]}{4\pi r} \right) dS \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

在写出上式时还用到了^[2]

$$\nabla' \times [\mathbf{J}_m] = [\nabla' \times \mathbf{J}_m] - \frac{\nabla' r}{v} \times \left[\frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t} \right] \quad (1.4.10)$$

$$\begin{aligned} \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{J}_m}{4\pi r} \right] &= \frac{1}{4\pi} \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) \times [\mathbf{J}_m] + \frac{1}{4\pi r} \nabla' \times [\mathbf{J}_m] \\ &= \frac{-1}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times [\mathbf{J}_m] + \frac{1}{4\pi r} \left\{ [\nabla' \times \mathbf{J}_m] + \frac{1}{v} \nabla r \times \left[\frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

又因 $\nabla' \times \mathbf{J}_m = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{J}_m}{4\pi r} \right] &= -\nabla \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \times [\mathbf{J}_m] + \frac{1}{4\pi r} \{ [\nabla \times \mathbf{J}_m] - \nabla \times [\mathbf{J}_m] \} \\ &= -\nabla \times \left(\frac{1}{4\pi r} [\mathbf{J}_m] \right) + \frac{1}{4\pi r} [\nabla \times \mathbf{J}_m] \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

对(1.4.5)式右边, 注意到

$$\nabla v_1 = \delta \nabla \left(\frac{1}{4\pi r} \right) + \frac{\delta' \nabla r}{4\pi v r} \quad (1.4.13)$$

$$\int f(x) \delta'(x - x') dx = -f'(x') \quad (1.4.14)$$

所以, (1.4.5) 式右边应为

$$\begin{aligned} I_{\text{右}} = & - \oint_S \left\{ [\mathbf{E}] \times \left(\nabla \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \times \mathbf{a} \right) - \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \times \frac{\nabla r \times \mathbf{a}}{v 4\pi r} - \right. \\ & \left. \mu \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \times \frac{\mathbf{a}}{4\pi r} - \frac{[\mathbf{J}_m]}{4\pi r} \times \mathbf{a} \right\} \cdot \mathbf{n} dS \\ \therefore \quad \mathbf{n} \cdot \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \times \frac{\mathbf{a}}{4\pi r} \right) = & \frac{\mu \mathbf{a}}{4\pi r} \cdot \left(\mathbf{n} \times \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \right) \\ & \left\{ [\mathbf{E}] \times \left(\nabla \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \times \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \left\{ (\mathbf{n} \times [\mathbf{E}]) \times \nabla \frac{1}{4\pi r} \right\} \right\} \\ & \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \times \frac{(\nabla r \times \mathbf{a})}{4\pi r v} \right\} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{n} \times \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \right) \times \frac{\nabla r}{4\pi v r} \right\} \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad I_{\text{右}} = & - \mathbf{a} \cdot \oint_S \left\{ \mathbf{n} \times [\mathbf{E}] \times \nabla \frac{1}{4\pi r} - \left(\mathbf{n} \times \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \right) \times \frac{\nabla r}{4\pi v r} \right. \\ & \left. - \frac{\mu}{4\pi r} \mathbf{n} \times \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{J}_m}{4\pi r} \right\} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

而(1.4.9) 式中的

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S [\mathbf{a} \cdot \nabla v_1] \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS dt \\ & = \oint_S \mathbf{a} \cdot \left\{ \nabla \frac{1}{4\pi r} \{ [\mathbf{E}] \cdot \mathbf{n} \} - \frac{\nabla r}{v 4\pi r} \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n} \right\} \right\} dS \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

综合上述结果, 并注意

$$\left[\frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t} \right] = \frac{\partial [\mathbf{J}_m]}{\partial t},$$

以及考虑到 $\mathbf{a}$ 的任意性, 最后得

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}' \cdot t') = - \frac{\partial}{\partial t'} \int_V \frac{\mu [\mathbf{J}]}{4\pi r} dV - \nabla' \int_V \frac{[\rho]}{4\pi \epsilon r} dV - \frac{\nabla'}{4\pi} \times$$

$$\int_V \frac{[\mathbf{J}_m]}{r} dV - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \times [\mathbf{E}]) \times \nabla \frac{1}{r} - \left(\mathbf{n} \times \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \times \frac{\nabla r}{vr} \right. \right. \\ \left. \left. + (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}]) \nabla \frac{1}{r} - \left(\mathbf{n} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \right) \frac{\nabla r}{vr} - \frac{1}{r} \mathbf{n} \times \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \right\} dS \quad (1.4.17)$$

类似地, 可得磁场的表达式:

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}', t') = -\frac{\partial}{\partial t'} \int_V \frac{\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{J}_m]}{4\pi r} dV - \nabla' \int_V \frac{[\rho_m]}{4\pi \mu r} dV + \nabla' \times \\ \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{J}]}{r} dV - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \times [\mathbf{H}]) \times \nabla \frac{1}{r} - \left(\mathbf{n} \times \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \right) \times \right. \\ \left. \frac{\nabla r}{vr} + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{H}] \nabla \frac{1}{r} - \left(\mathbf{n} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \right) \frac{\nabla r}{vr} + \frac{1}{r} \mathbf{n} \times \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \right\} dS \quad (1.4.18)$$

这就是电磁场的非稳态 Helmholtz 公式。当我们只考虑简谐场时, 式中所有各量都含有 $e^{j\omega t}$ 的因子, 如

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}', t') = \mathbf{E}(\mathbf{R}') e^{j\omega t'}$$

再注意到:

$$\frac{\omega}{v} = k \quad \nabla G = \nabla \frac{e^{-jkr}}{r} = e^{-jkr} \nabla \frac{1}{r} - \frac{j\mathbf{k}}{r} e^{-jkr} \nabla r \quad (1.4.19)$$

于是(1.4.17)、(1.4.18)式立刻变为:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}') = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ -j\omega \mu G \mathbf{J} - \mathbf{J}_m \times \nabla G + \frac{\rho}{\varepsilon} \nabla G \right\} dV \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ j\omega \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) G - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla G - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla G \} dS \quad (1.4.20)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}') = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ -j\omega \varepsilon G \mathbf{J}_m + \mathbf{J} \times \nabla G + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla G \right\} dV \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ -j\omega \varepsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) G - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla G - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla G \} dS$$

与[1]中给出的稳态解完全一致。上式就是 Stratton-朱兰成公式。(1.4.17)与(1.4.18)式可以看做是它的推广。