山东省教育委员会“九五”立项教材

中学数学教材教法

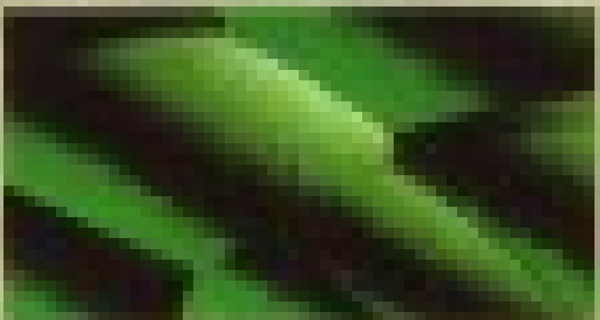
总主编　王兴志 张建华 王全友

初等代数解题研究

主编　卞文进 姜玉武 郑 强

石油大学出版社

初等代数解题研究



山东省教育委员会“九五”立项教材

中学数学教材教法

王兴志 张建华 王全友 总主编

初等代数解题研究

主　编：卞文进　姜玉武　郑　强

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等代数解题研究/卞文进等主编．—东营：石油大学出版社，1999.7
(中学数学教材教法/王兴志等主编)
ISBN 7-5636-1250-5

Ⅰ．初… Ⅱ．卞… Ⅲ．代数课-中学-解题 Ⅳ．G634.625

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 30954 号

初等代数解题研究

卞文进 姜玉武 郑强 主编

出版者：石油大学出版社(山东 东营，邮编 257062)
印刷者：山东东营新华印刷厂
发行者：石油大学出版社(电话 0546—8392563)
开　本：850×1168 1/32 印张：9.25 字数：240 千字
版　次：1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月第 1 次印刷
印　数：1—3050 册
定　价：12.00 元(全三册：44.60 元)

序

“中学数学教材教法”是我国高等师范院校数学系的一门重要的专业基础必修课程，它直接为培养合格的中学数学教师服务．近20年来，随着教育改革的深入发展和科技、经济的发展，这门课程的内容、体系也在不断更新发展，但其基本点仍是围绕教与学而展开的教学、教材研究，其学科理论体系仍属于数学教育学 范畴．它是数学教育学科的一门基础教程．

山东省高等师范院校在数学教育方面的力量是雄厚的，早在80年代就组织起研究会，建立了数学教学论、学习论、方法论、思维论、课程论和数学史等专题组，开展了多种形式的学术研究、学术交流和教学实验，并发表了一批学术论文，出版了一批教材、专著，取得了丰硕的成果，在全国处于领先地位，从而有力地推动了数学教育的发展．

雄厚的学术力量、团结实干的研究气氛、丰富多样的教学实践、科学深入的探究、蓬勃的创新精神，必然会结出丰硕的成果，山东省12所高等师范院校合编的《中学数学教材教法》(上、中、下三册)就是在这样的背景下形成的．它的出版是我国数学教育界的一件值得庆贺的大事，这必定会促进数学教育事业的进一步繁荣昌盛．

这套教材属于山东省教委“九五”立项的科研成果，其基本指导思想是：面向21世纪、面向现代化、面向世界；重视素质教育和创新能力的培养；重视学生的全面发展；重视教学内容的科学性和改革；注重处理好知识、能力与素质，传统内容与现代内容的继承和创新，统一性与多样化，理论学习与教学实践等辩证关系．这套教材立足于高等师范教育的教学实际，强调教学的实践，突出学生

在学习中的主体地位，倡导开放式的教学研究．

这套教材汇集了群体智慧，不仅体系严谨、脉络清晰、立论精要、叙述简明，而且注重实践、要点突出，有许多独到之处：教学引论一册，在更新观念的基础上，增添了“课堂教学的基本技能”、“学法指导”和“教师素质”等内容，这将有利于学生教学能力和自我素质的提高；初等数学研究两册，突破了传统的思维模式，调整了知识结构，改进了教学手段，以数学思想方法为主线，同时注重应用意识的培养和适应素质教育的要求，全面对代数、几何进行了开放式的研究．这样加大了研究的深度和广度，避免了重复，有利于引发学生的学习动力和兴趣，促进学生数学能力的提高和创新能力的培养．

作为数学教育战线上的一名老兵，我看到这样一套在观点、内容和体系上都有创新的教科书问世，感到由衷地欣慰和振奋，这套书的出版发行一定会受到欢迎，借此也特表祝贺．同时，对山东省高等师范院校同行们的同心协力、精心实干和敬业精神也深表敬意．

我坚信，全国同行们在改革开放的大好形势下，只要合力同心、持续进取，百家争鸣、百花齐放，立足国情、放眼世界，不断精化、勇于创新，具有中国特色的数学教育学将会日趋充实、完善、建成．

李建才

1999.7.12于首都师范大学

前　言

《中学数学教材教法》是山东省教育委员会“九五”立项教材．在省教委高教处的领导和关怀下，由省内师范院校数学专业从事中教研究方面的专家、教授和教师所编写．本教材坚持“三个面向”，围绕师范数学教育专业的培养目标和学科特点，重视高等师范学校学生的教师职业技能训练，符合省教委教学内容和课程体系改革的通知精神，适应于21世纪人才培养的需要．

这套教材分三册：《中学数学教学引论》、《初等几何解题研究》、《初等代数解题研究》．在《初等代数解题研究》中，包括初等代数的常用解题方法、应用题的分类和解法两部分内容．本书的特点是：突破传统的思维模式，更新教育观念，吸收现代教育理论，以数学思想方法为主线对初等代数进行全面、开放式、跳跃式、非严格化的解题教学研究，并重视问题解决，重视高观点下的初等数学研究，重视应用题的趣味性、实用性、开放性、科学性，重视数学解题方法的通法和技巧的训练，重视学生应用数学的意识和创新能力的培养．适应于数学教育改革和全面推行素质教育的需要．

本书由济宁师专卞文进，菏泽师专姜玉武，山东省教育学院郑强同志任主编；菏泽教育学院袁宝琮，青岛大学李明兰，德州高专刘耀斌，泰安师专郝永清，聊城师院谷焕春，烟台师院吕朝阳，胜利油田师专李汉丰、王庆义同志任副主编．各篇的作者为：姜玉武、郑强、刘耀斌、谷焕春、李汉丰、王庆义——第一篇；袁宝琮、卞文进、李明兰、郝永清、吕朝阳、王兴志、王收——第二篇．

全书由姜玉武、王兴志负责总体构想并拟定编写提纲．初稿形成后，由主编、副主编在多次修改、统稿的基础上定稿．最后由王振鸣、倪炳华教授审阅了全部书稿．

本书在编写过程中，先后请教并得到李建才、李玉琪、牛家骥、殷建忠等先生的指导和帮助，并提出了许多宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢.

本书在编写过程中，学习、参阅了许多数学教育文献资料，谨向这些文献的作者表示诚挚的谢意. 由于编者水平有限，本书缺点和不足在所难免，敬请专家和广大读者指正、见谅.

本书可作为高师院校数学教育专业专(本)科的教材或选修课教材，也可作为中学数学教师继续教育的教材或教学参考书. 恳请广大师生能在使用过程中提出意见和建议，以便进一步修改.

编　者

1999 年 6 月

目　　录

第一篇　初等代数的常用解题方法

第二篇　应用题的分类和解法

第一篇　初等代数的常用解题方法

第一讲　配 方 法

一、配方法

通过把解析式的某些项化为二项式的完全平方的形式之和，例如 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，或化为若干个完全平方式之和，例如 $x^2+y^2+2x+2y-1=(x+1)^2+(y+1)^2-3$，从而使问题获得解决的方法叫作配方法.

根据公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，配方时有以下两种情况：

第一，缺中间项的配方，形如 a^2+b^2；

第二，缺第三项的配方，形如 $a^2\pm 2ab$.

因此，配方的过程就是凑成 $a^2\pm 2ab+b^2$ 的过程.

一个实数的完全平方是非负的，这个性质在证明不等式、求函数最值、解二次方程、化简二次根式等方面有着广泛的应用.

二、应用举例

1. 在因式分解中的应用

例 1　分解因式

(1) $x^2-4xy+3y^2+2yz-z^2$；

(2) $4x^4+1$.

分析：(1)中含有 x^2、y^2、z^2 项，又含有 xy、yz 项，应考虑配方，利用平方差公式进行因式分解；

(2)中缺少中间项，添上 $4x^2$ 即可.

解：(1) $x^2-4xy+3y^2+2yz-z^2$

$=x^2-4xy+4y^2-y^2+2yz-z^2$

$=(x-2y)^2-(y-z)^2$

$=(x-2y+y-z)(x-2y-y+z)$

$=(x-y-z)(x-3y+z)$.

(2) $4x^4+1=4x^4+4x^2+1-4x^2$

$=(2x^2+1)^2-(2x)^2$

$=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$.

评注：利用配方法进行因式分解，常采用加项、减项和拆项等技巧.

2. 在根式化简中的应用

例 2 化简下列各式：

(1) $\sqrt{19+4\sqrt{12}}$；　　(2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

分析：由于$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=a+b\pm2\sqrt{ab}$，所以对 $A+2\sqrt{B}$ 进行配方时，应由$\pm2\sqrt{B}$入手，变形为$\pm2\sqrt{ab}$的形式，使 $ab=B$.

由 $a+b=A$ 确定 a 与 b.

解：(1) $\sqrt{19+4\sqrt{12}}=\sqrt{19+2\sqrt{48}}$

$=\sqrt{(\sqrt{16}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}+\sqrt{3}=4+\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$.

评注：为了便于配方，应先把复合二次根式化为$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$的形式，若$\sqrt{B}$的系数不是 2，应设法转化为 2.

3. 在求值中的应用

例 3 已知 $x^2+x-1=0$，求 $x^8+\frac{1}{x^8}$的值.

分析：由已知 $x\neq 0$，故已知条件化为 $x-\frac{1}{x}=-1$．再把待求式变形与之联系．

解：$x^8+\frac{1}{x^8}=(x^4+\frac{1}{x^4})^2-2=[(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2]^2-2$

$=\{[(x-\frac{1}{x})^2+2]^2-2\}^2-2$

$=\{[(-1)^2+2]^2-2\}^2-2=47$.

4．在解方程（组）中的应用

例 4　解方程　$x^2-5x-1=0$.

解：$x^2-5x+(\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2-1=0$,

$(x-\frac{5}{2})^2=\frac{29}{4}$,　$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{29}{4}}$,

$x_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$,

$x_2=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$.

例 5　**解方程组**

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2-19(x+y)=0, & ① \\ xy+6=0. & ② \end{cases}$$

分析：由②求出 $y=-\frac{6}{x}$ 代入①会出现高次方程，若将①中的二次项配成 $(x+y)^2$，则方程①可变形为关于 $x+y$ 的二次方程．

解：①＋②×3，得

$x^2+2xy+y^2-19(x+y)+18=0$,

$(x+y)^2-19(x+y)+18=0$,

$(x+y-18)(x+y-1)=0$,

原方程组可化为下面两个方程组：

$$\begin{cases} x+y=18, \\ xy=-6; \end{cases}\qquad \begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=-2,\\ y_1=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=9-\sqrt{87},\\ y_2=9+\sqrt{87};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=3,\\ y_3=-2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_4=9+\sqrt{87},\\ y_4=9-\sqrt{87}.\end{cases}$$

评注：解某些方程组，应用配方法可以化难为易，化繁为简.

5. 在解不等式中的应用

例 6 解不等式

(1) $x^2+3x-4<0$；　　(2) $4x^2>4x-1$；

(3) $-x^2+2x-3>0$.

解：(1)原不等式左边配方得

$$(x+\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}<0,$$

移项，得　$(x+\frac{3}{2})^2<\frac{25}{4}$,

两边开方得　$|x+\frac{3}{2}|<\frac{5}{2}$,

∴　$-\frac{5}{2}<x+\frac{3}{2}<\frac{5}{2}$,

即　　$-4<x<1$.

(2)原不等式可化为

$$4x^2-4x+1>0,$$

化为　　$(2x-1)^2>0$,

∴　$2x\neq 1$，　　即 $x\neq\frac{1}{2}$.

故原不等式的解集为不等于$\frac{1}{2}$的实数.

(3)原不等式可化为　$x^2-2x+3<0$,

左边配方得　$(x-1)^2+2<0$.

∵　$(x-1)^2\geqslant 0$,

$\therefore\quad (x-1)^2+2>0$ 对任意实数 x 都成立,故原不等式的解集为空集,即任意实数 x 都不能满足原不等式.

评注:用配方法解二次不等式思路简捷,但要注意避免出现 $a^2<b^2 \Rightarrow a<b$ 的错误.

6. 在证明题中的应用

例 7 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,且 $ab+bc+ca=1$,求证:$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

证明:$\because\quad (a+b+c)^2-3$

$$\begin{aligned}
&=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\\
&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\
&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\
&=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0.
\end{aligned}$$

$\therefore\quad (a+b+c)^2\geqslant 3.$

又 $\because\quad a$、b、$c\in\mathbf{R}^+$,$\therefore\quad a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

例 8 在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,斜边 AB 上的高为 h,三边长分别是 a、b、c. 求证:$a+b<c+h$.

证明:在 $Rt\triangle ABC$ 中,$ab=ch$,$a^2+b^2=c^2$,于是

$$a^2+b^2+2ab=c^2+2ch.$$

$\therefore\quad (a+b)^2=c^2+2ch<c^2+2ch+h^2=(c+h)^2.$

由 a、b、c、$h\in\mathbf{R}^+$,$\therefore\quad a+b<c+h$.

评注:利用代数知识进行配方,证法简捷明快,需注意应用.

7. 在函数方面的应用

例 9 求函数 $y=2x^2-12x+19$ 的最值.

解:$y=2x^2-12x+19$

$=2(x^2-6x+9)+1=2(x-3)^2+1.$

$\because\quad 2>0,$

$\therefore$ 当 $x=3$ 时,函数 y 有最小值 1.

例 10　已知 $a+b=6$，求 $y=ab$ 的最值.

解：∵ $a+b=6$， ∴ $b=6-a$，

$$y=ab=a(6-a)=-a^2+6a-9+9$$
$$=-(a-3)^2+9,$$

∴ 当 $a=b=3$ 时，$y=ab$ 有最大值 9.

8. 在解三角形中的应用

例 11　在△ABC 中，$\angle A=70°$，其三边 a、b、c 满足

$$(a^2-c^2)^2=b^2(2c^2-b^2).$$

求 $\angle B$、$\angle C$.

解：∵ $(a^2-c^2)^2=b^2(2c^2-b^2)$，

∴ $a^4-2a^2c^2+c^4=2b^2c^2-b^4$，

即 $a^4-2a^2c^2+c^4-2b^2c^2+b^4=0$.

配方得 $(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2$，

∴ $a^2+b^2-c^2=\pm\sqrt{2}\,ab$， 即 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ $\cos C=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $C=45°$ 或 $135°$ （运用余弦定理）.

∵ $A+B+C=180°$，而 $A=70°$，

∴ $C=135°$ 舍去，∴ $C=45°$，$B=65°$.

例 12　在△ABC 中，若 $b^2(1-\cos^2C)+c^2(1-\cos^2B)=2bc\cos B\cos C$，试判定△$ABC$ 的形状.

解：由已知等式得

$$b^2+c^2=(b\cos C+c\cos B)^2.$$

由射影定理知 $b\cos C+c\cos B=a$，

∴ $b^2+c^2=a^2$.

故△ABC 是直角三角形.