

竞赛论与经济行为

約翰·馮·諾依曼 著
奧斯卡·摩根斯特恩

科學出版社

竞赛论与经济行为

約翰·馮·諾依曼 奧斯卡·摩根斯特恩 著

王建华 顧璋琳 譯

科学出版社

1963

John von Neumann and Oskar Morgenstern
THEORY OF GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR
Princeton University Press, Third Edition
Sixth Printing, 1955

內 容 簡 介

这本书是策略竞赛論的世界名著。原作者之一(J. von Neumann)是竞赛論的奠基人;竞赛概念的建立以及发展成为一套数学理論,主要的工作都是他开創的。

这本书首先从討論經濟行为出发,說明了建立竞赛論的必要性。通过細致的分析,引出策略竞赛概念的严格的公理化描述。在系統而全面地建立了竞赛理論以后,又回过来研究經濟行为以及一些其它方面的問題,作为理論的直接应用。

理論的建立程序如下: 首先,建立零和二人竞赛的全部理論;其次,在零和二人竞赛理論的基础上,建立零和 n 人竞赛的理論;最后,証明一个一般的非零和 n 人竞赛可化为一个零和 $n + 1$ 人竞赛。这样,就在理論上解决了一切有穷竞赛的問題。

作者对經濟問題的一些看法是錯誤的,讀者应当批判地看待。

竞赛論与經濟行为

約翰·馮·諾依曼 著
奧斯卡·摩根斯特恩

王建華 顧瑋琳 譯

*

科學出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963 年 6 月第 一 版

书号: 2742 字数: 724,000

1963 年 6 月第一次印刷

开本: 787×1092 1/18

(京) 0001—2,400

印张: 32 1/9 插圖: 3

定价: 5.00 元

譯 者 前 言

策略競賽論，簡稱競賽論（也有譯作“博奕論”或“對策論”的，但“競賽論”這一譯名更符合原義，能夠更好地表達這個理論所研究的基本概念和有關的問題），是最近十多年間發展起來的，它是運籌學的一個重要分支。這本書就是競賽論的奠基著作。

按照作者的看法，競賽論是唯一適合於經濟問題研究的數學方法。在這裡，作者所論及的經濟問題是經濟學的一些基本問題，如商品價格的確定問題。應當指出，競賽論並沒有能夠幫助作者解決這些基本的經濟學問題。

毫無疑問，經濟現象的數量方面的研究是必要的。為了進行量的研究而應用一定的數學方法，也是必要的。但是，對經濟現象的量的研究，必須以對經濟現象的質的分析為基礎。如果對經濟現象所進行的質的分析是錯誤的，那麼，量的研究也不可能得到正確的結論，而在量的研究中所應用的任何數學方法，在某種意義上都會成為一種誤用。譬如說，關於商品價格的確定問題，正確的研究途徑應當是從商品的內含勞動量引出價值規律，這樣就能得出一切商品的价格都圍繞其價值波動的正确結論。如果不從勞動價值學說出發，而只是象本書的作者那樣，把價格的確定看作只是賣者與買者之間的鬥爭，那麼，不論採取什麼樣的數學方法，都不能真正理解商品的价格問題。

競賽論雖然未能幫助作者完成他們自己提出的任務，然而，這個數學理論的建立是有十分重要的意義的。由於競賽論研究鬥爭模型，因此，在人向自然索取財富的鬥爭中，在人对自然災害、疾病的鬥爭中，在人向未知知識領域探索的鬥爭中，以及在軍事鬥爭中等等，競賽論都有可能被應用來解決有關的技術性問題，它能夠幫助人們在規定的條件和要求下，在複雜的數量關係中，找出最合理、最有效的方案。

為了保持這本競賽論奠基著作的完整，儘管書中對經濟問題的一些看法是錯誤的，仍將它全部譯出，其中關於經濟學的基本問題以及關於競賽論與經濟學的關係問題的討論，應當批判地對待。

原书第一版序

这本书包含竞赛数学理論的說明和各方面的应用。这个理論是1928年以来由我們中間的一人发展起来的,現在第一次完整地予以出版。它有两方面的应用:一方面它应用于竞赛本身;另一方面它应用于經濟学和社会学問題,这些問題,正如我們所希望証明的,最好是沿着这个途径来进行研究。

我們將要作出的对竞赛的应用,至少可以在对这些竞赛的研究中印証这个理論。随着我們的研究工作的进展,这种相互关系的性質将更加明显。当然,我們的主要兴趣是在經濟学和社会学方面。在这里,我們只能研究一些最簡單的問題。然而,这些問題は帶有根本性的。更进一步,我們的目的本来就是要証明:我們可以有一个精确的方法来研究这些論題,它們实际上包括平行或相反利益問題、完全或不完全情报問題、自由的合理的决定或机会影响問題。

約翰·馮·諾依曼

奧斯卡·摩根斯特恩

普林斯頓,紐杰西 1943 年 1 月

原书第二版序

第二版只是在一些次要方面与第一版不同。我們已經尽可能完全地消除了印刷上的錯誤；这要对在这方面帮助我們的几个讀者表示感謝。我們增加了一个附录,它包含数量效用的公理的推演。这个論題在第3节中討論得相当詳細,但主要是定性討論。在第一版中,我們曾經允諾过,这个問題的証明将在一本期刊上发表,但我們发现:把它作为附录是更为方便的。关于在工业区位理論問題上的应用、在四人和五人竞赛問題上的应用,我們也曾打算写成附录,但由于其他工作很忙,不得不放弃了这个打算。

第一版出版后,出現了几篇討論本书主題的文章。

对数学問題感兴趣的讀者,主要注意以下一些方面: A. Wald 发展了一个新的統計估算基礎的理論,这个理論与零和二人竞赛理論有着密切的联系,并以它为基础 (“Statistical Decision Functions Which Minimize the Maximum Risk”, *Annals of Mathematics*, **46** (1945), 265—280)。他又把零和二人竞赛的主要定理(參看 17.6)推广到某些連續的、无穷的情形 (“Generalization of a Theorem by von Neumann Concerning Zero-Sum Two-Person Games”, *Annals of Mathematics*, **46** (1945), 281—286)。这个定理的一个新的、很簡單的初等証明(这个証明也适用于 17.6 的第二个注中所述的更有一般性的定理)是 L. H. Loomis 提供的 (“On a Theorem of von Neumann”, *Proc. Nat. Acad.*, **32** (1946), 213—215)。此外, I. Kaplanski 取得了关于零和二人竞赛中純策略和混合策略的作用的有趣的結果 (“A Contribution to von Neumann's Theory of Games”, *Annals of Mathematics*, **46** (1945), 474—479)。我們也想要回过来討論这个問題的各个数学方面。28.1.4 的附注所提到的羣論的問題已由 C. Chevalley 解决。

对經濟学問題感兴趣的讀者可以从 L. Hurwicz (“The Theory of Economic Behavior”, *American Economic Review*, **35** (1945), 909—925) 和 J. Marschak (“Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics”, *Journal of Political Economy*, **54** (1946), 97—115) 的文章中找到一个对本书的問題的較淺的說明。

約翰·馮·諾依曼

奧斯卡·摩根斯特恩

普林斯頓,紐杰西 1946 年 9 月

原书第三版序

第三版不同于第二版的，只在于繼續消除了目前我們已經发现的一些印刷上的錯誤。我們要對在這方面給予我們幫助的幾位讀者表示感謝。

第二版出版以來，出現了大量有關本書主題的文獻。在我們寫這篇序的時候，全部文獻已有數百篇之多。因此，我們不打算在這里給出文獻目錄。我們只在下面列出有關這一主題的幾部書名：

(1) H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), "Contributions to the Theory of Games, I", *Annals of Mathematics Studies*, No. 24, Princeton (1950), 書中包含十三名作者的十五篇文章。

(2) H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), "Contributions to the Theory of Games, II", *Annals of Mathematics Studies*, No. 28, Princeton (1953), 書中包含二十二名作者的二十一篇文章。¹⁾

(3) J. McDonald, *Strategy in Poker, Business and War*, New York (1950).

(4) J. C. C. McKinsey, *Introduction to the Theory of Games*, New York (1952).

(5) A. Wald, *Statistical Decision Functions*, New York (1950).

(6) J. Williams, *The Compleat Strategyst, Being a Primer on the Theory of Games of Strategy*, New York (1953).

除(6)以外，在以上各書中都可以找到關於本書主題的文獻目錄。在過去幾年中，位於加利福尼亞州聖塔·摩尼加的國防研究協會的工作人員在這方面做了大量的工作。在國防研究協會的出版物 RM-950 中可以查到這些工作的目錄。

在 n 人競賽理論中，在“非合作的競賽”方面有了一些進一步的發展。在這方面，必須特別提到的是 J. F. Nash 的工作：“Non-Cooperative Games”，*Annals of Mathematics*, 54 (1951), 286—295。這方面工作的其它文獻的目錄，可在上列(1),(2)和(4)各書中找到。

關於經濟學中的許多發展，我們特別提一下“綫性規劃”和“分派問題”，看來它們也都是越來越多地同競賽論發生了聯繫。讀者也可以在(1),(2)和(4)中找到有關的文獻目錄。

本書第二版的 1.3 節和附錄中所建議的效用理論已在理論上以及實驗上有了相當大的發展，而且是在許多不同的討論中出現的。關於這一方面，讀者可以參看下面幾篇文章：

1) 譯者注：第三卷和第四卷現亦已出版。

M. Friedman and L. J. Savage, "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy*, **56** (1948), 279—304.

J. Maschak, "Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility", *Econometrica*, **18** (1950), 111—141.

F. Mosteller and P. Nogee, "An Experimental Measurement of Utility", *Journal of Political Economy*, **59** (1951), 371—404.

M. Friedman and L. J. Savage, "The Expected Utility Hypothesis and the Measurability of Utility", *Journal of Political Economy*, **60** (1952), 463—474.

也可参看 *Symposium on Cardinal Utilities in Econometrica*, **20** (1952):

H. Wold, "Ordinal Preferences or Cardinal Utility?"

A. S. Manne, "The Strong Independence Assumption—Gasoline Blends and Probability Mixtures".

P. A. Samuelson, "Probability, Utility, and the Independence Axiom".

E. Malinvaud, "Note on von Neumann-Morgenstern's Strong Independence Axiom".

上述论文集的某些撰稿人曾在方法论方面提出过批评。对于这些批评,我们愿意指出:我们是按照惯常的方式,以惯常的审慎态度应用公理化的方法的。在效用概念的严格的、公理化的处理(在3.6节和附录中)之前,首先补充了启发式的描述(在3.1—3.5节中)作为准备。后者的作用在于给读者以这样的观点,使他对以后的公理化程序的正确性能够加以估价和认识。特别是,在那些章节里我们对“自然的运算”的讨论和选择,包含了我们认为 Samuelson-Malinvaud 的“独立公理”的有关内容。

约翰·冯·诺依曼

奥斯卡·摩根斯特恩

普林斯顿, 纽杰西 1953 年 1 月

方 法 說 明

这本书所研究的問題的性質和所用的方法,需要采用这样一种程序,这种程序在許多場合下完全是数学的。在本书中不出現高等代数或微积分等,在这个意义上,我們說,所使用的数学方法是初等的。(有两个不很重要的例外:在对 19.7 及以下的的一个例子的討論中和在 A. 3.3 中用到了一些簡單的积分。)起源于集合論、綫性几何和羣論的概念,在本书中占重要地位,但是,它們无例外地取自这些課程的前几章,并且还在專門說明的章节中加以分析和解释。尽管如此,这本书并不真正是初等的,因为本书中的数学推理常常是复杂的,而且广泛地利用了邏輯上的可能情形。

因此,閱讀本书,并不需要高等数学的任何部分的專門知識。然而,如果讀者要想更透彻地了解这里所闡明的論題,就必須肯定地超越常規和初級阶段来熟悉数学推理方法。本书所采用的程序的性質,主要属于数理邏輯、集合論和泛函分析。

我們尽力以这样一种形式来提出这个論題,这种形式能够使一个粗通数学的讀者在学习过程中获得必要的熟練。我們希望,在这方面所作的努力不完全是白費的。

与此相适应,問題的表述形式并不严格遵照数学論文的要求。所有的定义和推論都比数学論文的要求粗略一些。此外,純粹的文字形式的討論和分析,占去了相当的篇幅。凡是在有可能的地方,我們对每一个主要的数学推理,都特地同时試作文字說明。我們希望,这种做法将以非数学的語言說明数学方法所表述的內容——同时也表明:在何处采用文字說明要比不采用文字說明更为合适。

在这一点上,正如在我們的方法論观点問題上,我們要想仿照理論物理学的一些最好的例子。

对数学并不是特別感兴趣的讀者,最初应当按照他自己的判断,略去本书中数学性太強的各节。我們不打算明确地列出它們的名单,因为这种判断必須是主觀的。然而,在目录中有星号的各节,对于一般讀者來說,非常可能是属于这种性質的。無論如何,他将发现,略去这些节,对于理解前几部分很少妨碍,虽然在严格的意义上,前后貫串的邏輯綫索可能遭到中断。当他繼續讀下去的时候,他所略去的各节将逐漸具有更加严肃的性質,推理中的空缺将显得越来越重要。我們建議讀者在这时重新从头开始閱讀,因为已获得的熟悉越大,大概会使讀者更加容易理解本书的內容。

目 录

譯者前言	iii
原书第一版序	iv
原书第二版序	v
原书第三版序	vi
方法說明	viii

第一章 經濟問題的描述

1. 經濟学中的数学方法	1
1.1. 引言	1
1.2. 运用数学方法的困难	2
1.3. 研究任务的必要的限制	5
1.4. 結束語	6
2. 合理行为問題的定性討論	7
2.1. 合理行为的問題	7
2.2. “魯宾逊”經濟和社会性交換經濟	8
2.3. 变量的数目和参加者的数目	10
2.4. 参加者很多的情况: 自由竞争	11
2.5. “罗圣”理論	13
3. 效用概念	13
3.1. 选择和效用	13
3.2. 量度的原則: 引言	14
3.3. 概率和效用的数量概念	15
3.4. 量度的原則: 詳細的討論	18
3.5. 效用的数量概念的公理化方法的概念結構	21
3.6. 公理及其解釋	22
3.7. 关于公理的一般說明	24
3.8. 边际效用概念的作用	26
4. 理論的結構: 解和行为的标准	27
4.1. 一个参加者的解的最簡單概念	27
4.2. 推广至所有的参加者	29
4.3. 作为轉归集合的解	30
4.4. “优越”或“控制”的不可传递性的概念	32
4.5. 解的精确定义	34
4.6. 以“行为标准”来解释我們的定义	35
4.7. 竞赛和社会組織	37

4.8. 結束語	38
----------	----

第二章 策略竞赛的一般描述

5. 緒論	40
5.1. 重点从經济学轉移到竞赛	40
5.2. 分类和討論程序的一般原則	40
6. 簡化的竞赛概念	42
6.1. 术语的解释	42
6.2. 竞赛的基本要素	43
6.3. 情报和预备性	44
6.4. 预备性,传递性,信号	45
7. 竞赛的完全概念	48
7.1. 每一着的特征的多变性	48
7.2. 一般描述	49
8. 集合和分割	53
8.1. 用集合論的方法描述竞赛的优点	53
8.2. 集合,它們的性質和图示法	53
8.3. 分割,它們的性質和图示法	55
8.4. 集合与分割在邏輯上的解释	57
*9. 竞赛的集合論描述	59
*9.1. 用来描述一个竞赛的分割	59
*9.2. 这些分割及其性質的討論	62
*10. 公理化描述	64
*10.1. 公理及其解释	64
*10.2. 公理在邏輯上的討論	66
*10.3. 关于公理的一般說明	67
*10.4. 图示法	67
11. 策略和描述竞赛的最終簡化方式	69
11.1. 策略概念及其形式体系化	69
11.2. 竞赛的描述的最終簡化	72
11.3. 策略在竞赛的簡化形式里的作用	74
11.4. 零和条件的意义	74

第三章 零和二人竞赛:理論

12. 概述	75
12.1. 一般观点	75
12.2. 一人竞赛	75
12.3. 机会和概率	77

12.4. 下一步的任务	77
13. 函项运算	77
13.1. 基本定义	77
13.2. 运算 Max 和 Min	79
13.3. 关于可交换性的问题	81
13.4. 混合情形. 鞍点	83
13.5. 主要事实的证明	85
14. 严格确定的竞赛	87
14.1. 问题的描述	87
14.2. 劣势和优势竞赛	89
14.3. 辅助竞赛的讨论	89
14.4. 结论	93
14.5. 严格确定性的分析	95
14.6. 选手的互换. 对称性	97
14.7. 非严格确定的竞赛	98
14.8. 细致地分析严格确定性的程序	99
*15. 具有完全情报的竞赛	100
*15.1. 讨论的目的. 归纳法	100
*15.2. 精确条件(第一步)	102
*15.3. 精确条件(整个归纳法)	104
*15.4. 归纳法步骤的精确讨论	105
*15.5. 归纳法步骤的精确讨论(续)	108
*15.6. 完全情报情形下的结果	110
*15.7. 对国际象棋的应用	112
*15.8. 文字的讨论	113
16. 线性和凸性	115
16.1. 几何背景	115
16.2. 向量运算	116
16.3. 关于支撑超平面的定理	120
16.4. 关于矩阵的定理	123
17. 混合策略. 一切竞赛的解	127
17.1. 两个初等例子的讨论	127
17.2. 上节观点的一般化	128
17.3. 上述程序应用到单独一局上的可能性	130
17.4. 劣势和优势竞赛(混合策略情形)	132
17.5. 一般严格确定性	133
17.6. 主要定理的证明	135
17.7. 用纯策略和用混合策略处理的比较	137
17.8. 一般严格确定性的分析	139

17.9. 好策略的其它特征.....	141
17.10. 犯錯誤及其后果. 永久最优性.....	142
17.11. 选手的互换. 对称性.....	145

第四章 零和二人竞赛: 例子

18. 一些初等竞赛	148
18.1. 最简单的竞赛.....	148
18.2. 这些竞赛的詳尽的定量討論.....	149
18.3. 定性的說明.....	152
18.4. 一些特殊竞赛的討論(配銅錢的推广形式).....	153
18.5. 一些稍复杂些的竞赛的討論.....	156
18.6. 机会和不完全情报.....	159
18.7. 以上結果的解释.....	161
*19. 扑克和“偷鸡”.....	162
*19.1. 扑克的描述.....	162
*19.2. “偷鸡”.....	164
*19.3. 扑克的描述(續).....	165
*19.4. 規則的精确敘述.....	166
*19.5. 策略的描述.....	167
*19.6. 問題の敘述.....	170
*19.7. 从离散的問題轉到連續的問題.....	171
*19.8. 解在数学上的确定法.....	173
*19.9. 解的詳尽分析.....	177
*19.10. 解的解释.....	178
*19.11. 扑克的更一般的形式.....	181
*19.12. 离散的各手牌.....	181
*19.13. m 个可能的叫价.....	182
*19.14. 輪流叫价.....	184
*19.15. 全部解的数学描述.....	188
*19.16. 解的解释. 結束語.....	190

第五章 零和三人竞赛

20. 概述	192
20.1. 一般观点.....	192
20.2. 合伙.....	193
21. 三人简单多数竞赛	194
21.1. 竞赛的描述.....	194
21.2. 竞赛的分析: “默契”的必要性.....	194
21.3. 竞赛的分析: 合伙. 对称性的作用.....	196

22. 更多的例子	197
22.1. 不对称分配, 补偿的必要性	197
22.2. 强弱不同的合伙. 讨论	198
22.3. 一个不等式. 公式	200
23. 一般情形	201
23.1. 详尽的讨论. 非本质和本质竞赛	201
23.2. 全部公式	202
24. 一个反对意见的讨论	204
24.1. 完全情报的情形及其意义	204
24.2. 详尽的讨论. 补偿在三个或更多个选手之间的必要性	205

第六章 零和 n 人竞赛一般理论

25. 特征函数	208
25.1. 主题和定义	208
25.2. 概念的讨论	209
25.3. 基本性质	210
25.4. 直接推论	211
26. 从已知的特征函数构造竞赛	212
26.1. 构造	212
26.2. 总结	214
27. 策略等价关系. 非本质和本质竞赛	215
27.1. 策略等价关系. 简化形式	215
27.2. 不等式. 量 r	217
27.3. 非本质性和本质性	217
27.4. 各种准则. 不可加的效用	218
27.5. 本质情形里的不等式	220
27.6. 特征函数的向量运算	222
28. 群、对称性和公平性	223
28.1. 排列、排列群、排列对竞赛的影响	223
28.2. 对称性和公平性	226
29. 零和三人竞赛的重新考虑	228
29.1. 定性的讨论	228
29.2. 定量的讨论	229
30. 一般定义的精确定义	231
30.1. 定义	231
30.2. 讨论和反复论述	232
*30.3. 饱和的概念	233
30.4. 三个问题	237

31. 直接推論	238
31.1. 凸部, 平值性, 判断控制性的一些准则	238
31.2. 所有轉归的系统. 单元素的解	243
31.3. 对应于策略等价关系的同构	246
32. 本质零和三人竞赛全部解的确定	247
32.1. 数学問題的敘述. 图示法	247
32.2. 全部解的确定	249
33. 結束語	251
33.1. 解的多重性. 差別待遇及其意义	251
33.2. 静态和动态	253

第七章 零和四人竞赛

34. 概述	254
34.1. 一般观点	254
34.2. 本质零和四人竞赛的形式体系	254
34.3. 选手的排列	256
35. 立方体 Q 中一些特殊的点的討論	258
35.1. 頂点 I (以及 V, VI, VII)	258
35.2. 頂点 $VIII$ (以及 II, III, IV). 三人竞赛和一个“傀儡”	260
35.3. 关于 Q 的内部的一些說明	263
36. 主对角綫的討論	265
36.1. 邻近頂点 $VIII$ 的部分: 启发式的討論	265
36.2. 邻近頂点 $VIII$ 的部分: 精确的討論	268
*36.3. 主对角綫的其它部分	272
37. 中心及其周围	273
37.1. 中心周围的条件初步測定	273
37.2. 两种可能情形和对称性的作用	275
37.3. 中心处第一种情形	276
37.4. 中心处第二种情形	277
37.5. 两个中心解的比較	278
37.6. 不对称的中心解	278
*38. 中心的一个邻域的一族解	280
*38.1. 属于中心处第一种情形的解的变换	280
*38.2. 精确的討論	281
*38.3. 解的解释	287

第八章 关于 $n \geq 5$ 个参加者的一些說明

39. 各类竞赛中参数的数目	289
39.1. $n = 3, 4$ 的情形	289

39.2. 所有 $n \geq 3$ 的情形	289
40. 对称五人竞赛	291
40.1. 对称五人竞赛的形式体系	291
40.2. 两个极端情形	291
40.3. 对称五人竞赛和 1, 2, 3-对称四人竞赛的关系	293

第九章 竞赛的合成与分解

41. 合成与分解	297
41.1. 能够确定全部解的 n 人竞赛的寻求	297
41.2. 第一类型. 合成与分解	298
41.3. 精确定义	299
41.4. 可分解性的分析	301
41.5. 条件的修改的必要	302
42. 理論的修改	303
42.1. 不完全放弃零和条件	303
42.2. 策略等价关系. 常和竞赛	303
42.3. 新的理論里的特征函数	305
42.4. 新的理論里的轉归、控制性和解	307
42.5. 新的理論里的本质性、非本质性和可分解性	308
43. 分解的分割	310
43.1. 分裂集合. 組成部分	310
43.2. 由全部分裂集合組成的系统的性質	310
43.3. 由全部分裂集合組成的系统的描述. 分解的分割	311
43.4. 分解分割的性質	313
44. 可分解的竞赛. 理論的进一步扩充	315
44.1. (可分解的)竞赛的解和它的組成部分的解	315
44.2. 轉归与轉归集合的合成和分解	315
44.3. 解的合成与分解. 主要的可能性与推测	317
44.4. 理論的扩充. 外部来源	319
44.5. 过剩額	320
44.6. 过剩額的限制. 新的結構中竞赛的非孤立特性	321
44.7. 新的結構 $E(e_0), F(e_0)$ 的討論	322
45. 过剩額的限制. 扩充的理論的結構	324
45.1. 过剩額的下限	324
45.2. 过剩額的上限. 分离和全分离的轉归	325
45.3. 两个极限值 $ \Gamma _1, \Gamma _2$ 的討論. 它們的比值	327
45.4. 分离的轉归和不同的解. 联系 $E(e_0), F(e_0)$ 的定理	329
45.5. 定理的証明	331
45.6. 总結和結尾	334

46. 在可分解的竞赛中全部解的确定	335
46.1. 分解的初等性质	335
46.2. 分解及分解与解的关系: 关于 $F(e_0)$ 的一些初步结果	337
46.3. 续上节	339
46.4. 续上节	341
46.5. $F(e_0)$ 中全部结果	343
46.6. $E(e_0)$ 中全部结果	345
46.7. 部分结果的图形表示	347
46.8. 解释: 正常地带. 各种性质的可传性	348
46.9. 傀儡	349
46.10. 竞赛的嵌入	350
46.11. 正常地带的意义	353
46.12. 转移现象的第一次出现: $n = 6$	354
47. 新的理论中的本质三人竞赛	355
47.1. 讨论的必要	355
47.2. 预备性的考虑	355
47.3. 这一讨论中的六种情形. 情形(I)—(III)	357
47.4. 情形(IV): 第一部分	358
47.5. 情形(IV): 第二部分	360
47.6. 情形(V)	363
47.7. 情形(VI)	365
47.8. 结果的解释: 解里的曲线(一维部分)	366
47.9. 续上节: 解里的区域(二维部分)	367

第十章 简单竞赛

48. 获胜和失败的合伙以及出现这些合伙的竞赛	369
48.1. 41.1 里的第一类型. 取决于合伙	369
48.2. 获胜和失败的合伙	370
49. 简单竞赛特征的表述	372
49.1. 获胜和失败的合伙的一般概念	372
49.2. 单元集的特殊作用	374
49.3. 真实的竞赛中系统 W, L 的特征的表述	375
49.4. 简单性的精确定义	377
49.5. 简单性的一些初等性质	377
49.6. 简单竞赛和它们的 W, L . 最小获胜合伙: W^m	378
49.7. 简单竞赛的解	379
50. 多数竞赛和主要的解	380
50.1. 简单竞赛的例: 多数竞赛	380
50.2. 齐性	382