法国中学数学課本

第四册 下 册

〔法国〕 R. 梅雅尔 主編

法国中学数学課本翻譯小組譯

（內 部 发 行）

人 民 教 育 出 版 社

法　国
中学数学課本

第四册　下　册

R. 梅雅尔 主編
〔法国〕E. 卡拉尔 編
R. 卡　恩

法国中学数学課本翻譯小組譯

人 民 教 育 出 版 社

本书是法国 R. 梅雅尔主编的中学数学課本第四册的譯本. 該书是供法国中学三年級用的（法国中学最低年級是六年級，最高年級是一年級）. 翻譯时分上下两册出版，下册內容包括代数部分（一元一次不等式，一次方程組，一次方程的問題），几何部分（相似三角形，銳角三角函数，直綫和平面的位置关系，向量的投影）和天文部分. 本书系內部参考資料，供研究外国中学数学教学情况用.

法国中学数学課本

第四册　下册

〔法国〕 R. 梅雅尔主編

法国中学数学課本翻譯小組譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店經售

人民教育印刷厂印装

統一书号：13012 · 72　字数：170 千

开本：850×1168 毫米　1/32　印張：$7\frac{1}{2}$

1965 年 8 月第一版

1965 年 9 月第一次印刷

北京：1—2,900 册

*

定价 1.20 元

目　　录

第　八　章
一元一次不等式

Ⅰ. 整式不等式.
Ⅱ. 一元一次不等式.
Ⅲ. 其他不等式举例.

Ⅰ. 整式不等式

預备作业.

1° 在什么条件下我們說，数 a 大于数 b？

两个負数哪个大？

2° 在数值不等式的两边都加上同一数，或者把某一边的一項移到另一边，不等式有什么变化？

在下列不等式中把 -7 移到不等号的另一边：

$$12-7+3>-5+9.$$

3° 一个数值不等式的两边乘以非零的同一数以后有什么变化？

把 2° 中不等式的两边依次乘以 $+3$、-2、-1.

4° 一个不等式的两边平方以后，会得到什么結果？用下列各不等式加以說明：

$$5-9<-2,\quad -5+7>1,\quad 7-9<2+3.$$

135. 含一个未知数的不等式. 1°不等式

$$13+5>20-7 \tag{1}$$

是一个数值不等式. 在不等式的两边进行指定的运算就能证明这一点.

2° 如果我們列出：

$$3(x+5) \geqslant 2x+1, \tag{2}$$

应該說这个式子是不正确的，因为我們原来想的是列出一个数值不等式.

但是，这种写法說明的是下述这样一个問題：

是否至少有一个 x 的值能使 $3(x+5)$ 大于或等于 $2x+1$？

为了說明提出的是这样的問題，我們本来可以写成：

$$3(x+5) \geqslant 2x+1?$$

但是，习惯的写法，同在方程中一样，多半省去問号，不过，我們应該了解，这实际上是問：是否有一个或几个未知的 x 的值能使条件不等式变成数值不等式.

☆**定义. 如果一个条件不等式的两边是含同一变量的代数式，那么这个不等式叫做一元不等式. 解不等式就是：**

1° 求是否有变量的一些值能使不等式成立，就是說，如果用这些值代替該变数，該不等式就变成数值不等式.

2° 求出所有这些值.

这些值(如果它們存在)就叫做不等式的解.

有一些不等式，无論給变量什么值，它們都能成立.

例.

$$x^2+4>0,$$

$$x^2+3 \geqslant 3,$$

无論 x 取什么值，这两个不等式总能成立.

另外，也有一些不等式对 x 的任何值都不可能成立.

例. $$x^2+2x+1<0,$$

因为 $x^2+2x+1 \equiv (x+1)^2$，所以这个不等式对 x 的任何值都不能成立.

最后，有一些不等式只有当 x 取某些值时才能成立.

例 1.
$$x-3\geqslant 0,$$
这个不等式只有当 x 的值大于或等于 3 时才能成立.

例 2.
$$3x-5<x+1$$
是一个不等式. 我們可以看出：当 $x=-1$、$x=1$ 或 $x=2$ 时，不等式成立；当 $x=3$ 或 $x=5$ 时，不等式不成立.

136. 不等式的方向. 我們来看下面四个不等式：

(1) $x+1<2x-3$

(2) $2x-1<2-2x$

(3) $4x^2>2x+1$

(4) $x+1>2x-9$

我們說：(1)和(2)是同向不等式，

(3)和(4)是同向不等式，

(1)和(3)是异向不等式，

(2)和(4)是异向不等式.

137. 整式不等式. 当提出下列問題时，我們就会列出整式不等式.

已知两个 x 的多項式，是否有 x 的一些值能使一个多項式的数值大于(或小于)另一个多項式的数值？

两个多項式叫做不等式的两边.

例. $9x-5>x^2-10$, $4x^2+1<2x-5$ 都是整式不等式.

● **注意.** I. «大于»(或«小于»)这个詞有时是广义的，并且記作$\geqslant$或$\leqslant$.

$$3x-5\geqslant x-1$$
是整式不等式，$x-1\leqslant 3x+2$ 也是整式不等式.

II. 用符号$>$写出的不等式可以被用符号$<$写出的另一不等式来代替.

例如，$x^2+1>3x-5$ 可以写成 $3x-5<x^2+1$.

$-2x+3\leqslant 5+4x$ 可以写成 $5+4x\geqslant -2x+3$.

138. 整式不等式的化簡. 同方程的化簡一样，我們可以证明下列性质：

■ **如果不等式有解，化簡該不等式的两边以后，不等式的解不变.**

例. 設有不等式：

$$(x+1)^2-5(x-3)\geqslant (x+2)(x-1)+6(x-2)+1. \quad (1)$$

在每一边进行指定的运算后，得：

$$x^2+2x+1-5x+15\geqslant x^2+2x-x-2+6x-12+1,$$

$$x^2-3x+16\geqslant x^2+7x-13. \quad (2)$$

■ **如果不等式有解，把一边的某項移到另一边，只要改变該項前面的符号，不等式的解不变.**

例. 在不等式(2)中，把左边的 x^2 和 $-3x$ 移到右边，得：

$$16\geqslant x^2+7x-13-x^2+3x, \quad (3)$$

$$16\geqslant 10x-13,$$

再把右边的 -13 移到左边，得：

$$16+13\geqslant 10x, \quad (4)$$

$$29\geqslant 10x.$$

把右边的各項移到左边后，不等式化成下列形式：

$$P(x)\geqslant 0,$$

(或按不同情况化成 $P(x)>0$, $P(x)\leqslant 0$ 或 $P(x)<0$ 的形式) 其中 $P(x)$ 代表关于 x 的化簡的多項式.

解这样的不等式就是求是否有 x 的一些值能使多項式的数值是正的或者等于零，并且求这些值.

例. 把不等式(2)右边的各項全部移到左边，得：

$$x^2-3x+16-(x^2+7x-13)\geqslant 0. \quad (5)$$

即 $$x^2-3x+16-x^2-7x+13\geqslant 0,$$

或者 $$-10x+29\geqslant 0. \quad (6)$$

139. ☆定义. 化简后的不等式

$$P(x)>0$$

的次数就是多项式 $P(x)$ 的次数.

例 1. $3x+1>0$, $4-3x\leqslant 0$ 都是一次不等式.

例 2. $(x+1)^2\leqslant(x+2)^2-6x$,

可以写成:

$$x^2+2x+1\leqslant x^2+4x+4-6x.$$

把各項移到左边，得:

$$x^2+2x+1-x^2-4x-4+6x\leqslant 0.$$

上式化簡后得:

$$4x-3\leqslant 0,$$

这是一个一次不等式.

只有在把不等式化簡以后才能确定它的次数.

140. 不等式的两边乘以或除以同一非零的数. 設有不等式:

$$7(x-5)-14(x+1)>35(x-1). \quad (1)$$

很明显，各系数都可以用 7 除尽. 如果 x 取某一数值 x_0, 左边的数值 a 大于右边的数值 b:

$$a>b,$$

那么根据不等式的性质可以得出:

$$\frac{a}{7}>\frac{b}{7}.$$

因此，数 x_0 也是不等式

$$(x-5)-2(x+1)>5(x-1) \tag{2}$$

的解.

反过来說，如果数 x_1 是(2)的一个解， 那么(2)式左边的数值 a' 大于(2)右边的数值 b':

$$a'>b',$$

所以
$$7a'>7b'.$$

因此，数 x_1 也是不等式(1)的一个解.

所以，解(1)或解(2)是相同的．不等式两边都除以 7 以后，并不会改变不等式(1)的解；同样，两边都乘以 7 以后，也不会改变不等式(2)的解.

我們也可以用 -7 除不等式(1)的两边，得:

$$a>b \Longleftrightarrow \frac{a}{-7}<\frac{b}{-7}.$$

因此，得到不等式:

$$-(x-5)+2(x+1)<-5(x-1). \tag{3}$$

同样，也可以用 -7 乘不等式(3)的两边，得:

$$a'<b' \Longleftrightarrow -7a'>-7b'.$$

因此，得到不等式:

$$7(x-5)-14(x+1)>35(x-1). \tag{1}$$

所以，解(1)或解(3)是相同的．两边同除以 -7 以后，除了需要改变不等式的方向以外，并不改变不等式(1)的解．同样，两边同乘以 -7 以后，除了需要改变不等式的方向以外，也不会改变不等式(3)的解.

■ **定理．1° 如果不等式有解，两边同乘以或同除以一个正数并且使不等式的方向不变，不等式的解不变.**

2° 如果不等式有解，两边同乘以或同除以一个負数，除了需要改变不等式的方向以外，不等式的解不变.

利用这个定理，我們可以像对方程作去分母的变换(§131)那样，对不等式作同样的变换.

例. 設有不等式

$$\frac{(x+1)^2}{15}-\frac{x(x-3)}{6}\geqslant\frac{(x-4)(1-x)}{10}. \tag{1}$$

两边同乘以15、6和10的最小公倍数30，得:

$$2(x+1)^2-5x(x-3)\geqslant 3(x-4)(1-x). \tag{2}$$

进行指定的运算后，得:

$$2(x^2+2x+1)-5(x^2-3x)\geqslant 3(-x^2+5x-4),$$

$$2x^2+4x+2-5x^2+15x\geqslant -3x^2+15x-12. \tag{3}$$

化簡和移項以后，得:

$$4x+14\geqslant 0. \tag{4}$$

两边同除以2，得:

$$2x+7\geqslant 0. \tag{5}$$

解不等式(1)或解不等方程(5)是完全一样的.

● **注意.** 用同一个非零的数乘或除不等式的两边时，必須弄清这个数的符号，因为我們要依照該数的正、負决定改变或不改变不等式的方向.

● **应用.**

用 $P(x)$ 代表化簡的多項式，把整式不等式化成下列的任一种形式:

$$P(x)>0,\ P(x)<0,\ P(x)\geqslant 0,\ P(x)\leqslant 0,$$

然后說明每一不等式的次数.

540. $3x+13<5x-17$; $4x+1\geqslant x-2$.

541. $5(x-4)+\frac{3}{4}>7(x-3)+\frac{1}{4}-(x+4)$.

542. $(5x+3)+2x-1\leqslant(3x-2)+12$.

543. $x^2+(x-1)^2>2x(x-1)$;

$3x^2-(x^2+4x)\leqslant5(x-3)+x^2$.

544. $4(x^2-5x-1)-3(x^2+x-3)<5(x^2+x+1)-4(x^2-1)$.

545. 证明下列不等式不能成立:

$$4x+3<4x-1;\quad x-1\geqslant x+1;$$

$$x^2+4<0;\quad (x-4)^2\leqslant-1;\quad x^4<-3x^2.$$

546. 证明下列不等式对 x 取任何值都能成立:

$$x-1\leqslant x;\quad 3x-5<3x+7;$$

$$(x-1)^2>x^2-2x;\quad (3x-2)^2-5<3x(3x-4).$$

547. 把不等式的两边同乘以給定的数:

$$-2x+5<-3x-2,\text{ 同乘以}-1;$$

$$\frac{4}{3}x+\frac{2}{9}<\frac{7}{5}x-\frac{2}{15},\text{ 同乘以 }45;$$

$$18x-15<9x+12,\text{ 同乘以}\frac{1}{3}.$$

548. 证明不等式

$$x^2-2ax+a^2>0$$

除了一个值以外,它对于已知数 a 的任何值都能成立,并指出使不等式不能成立的那一个值(注意左边是二数差的平方).

549. 证明如果 a 和 b 是不相等的两个正数,那么不等式 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$ 一定成立.

II. 一元一次不等式

预备作业.

1° 如何选定 x 才能使下列不等式成立?

$$x-3>0;\ \ x-2<0;\ \ x-\sqrt{3}\geqslant 0;$$

$$2x>4;\ \ 5x<3;\ \ 3x\leqslant 1.$$

2° 是否有一个数 x 能使下列不等式同时成立?

$$x-5>0;\ \ x+1>0;\ \ x+3>0.$$

3° 对下列不等式回答同样問題:

$$x-4\leqslant 0;\ \ x-2<0;\ \ x+2\geqslant 0.$$

4° 对下列不等式回答同样問題:

$$x-7\sqrt{2}\geqslant 0;\ \ x-3\sqrt{11}<0.$$

141. 一元一次不等式的解法. 我們先举例說明一下.

I. 假設把各項化简并移到一边以后，我們所得到的不等式是:

$$5x-2>0. \tag{1}$$

1° 假設数 x_0 是这个不等式的解，那么得到数值不等式:

$$5x_0-2>0.$$

根据定义，这就說明 $5x_0$ 大于 2,

$$5x_0>2.$$

两边同除以 5, 得:

$$x_0>\frac{2}{5}.$$

2° 反过来說，如果数 x_1 大于$\frac{2}{5}$，那么有下列推理关系:

$$x_1>\frac{2}{5}\Longrightarrow 5x_1>2\quad (\text{两边同乘以 }5);$$

$$5x_1>2\Longrightarrow 5x_1-2>0\quad (\text{不等式的定义}).$$

因此，不等式(1)的解是任何大于$\frac{2}{5}$的数.

II. 解不等式:

$$-5x+6\leqslant 0. \tag{2}$$

1° 如果 x_0 是一个解，那么有：

$-5x_0+6\leqslant 0 \Longrightarrow -5x_0\leqslant -6$（把 6 移到不等号的另一边）

$-5x_0\leqslant -6 \Longrightarrow x_0\geqslant \frac{-6}{-5}$（两边同除以 -5）.

或者 $x_0\geqslant \frac{6}{5}$.

2° 反过来説，設 x_1 是一个大于或等于 $\frac{6}{5}$ 的数，那么有：

$x_1\geqslant \frac{6}{5} \Longrightarrow -5x_1\leqslant -6$（两边同乘以 -5）

$-5x_1\leqslant -6 \Longrightarrow -5x_1+6\leqslant 0$（把 -6 移到不等号的另一边）.

因此，不等式(2)的解是所有大于或等于 $\frac{6}{5}$ 的数.

142. 一般情形.

一元一次不等式化簡后，都可以写成：

$$ax+b>0, \tag{3}$$

其中 a 和 b 是已知的系数（但沒有具体説明是哪些数），x 是未知数.

我們假設系数 a 不等于零，否則这个不等式就不是一元一次不等式了.

前边那些例子説明了 a 的符号的重要意义，根据所作出的推理，可得下述結論：

$$\boxed{ax+b>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a>0 & x>-\dfrac{b}{a} \\ a<0 & x<-\dfrac{b}{a} \end{cases}}$$

例 1. 解不等式:

$$\frac{x-1}{6}-\frac{2x+1}{4}<\frac{2x}{15}-1.$$

两边同乘以 60, 得:

$$10(x-1)-15(2x+1)<8x-60,$$

或者 $$-20x-25<8x-60,$$

即 $$-28x<-35.$$

因此, $$x>\frac{-35}{-28} \quad 即 \quad x>\frac{7}{4}.$$

例 2. 解不等式:

$$3(x-5)\geqslant x^2-5x+3-(x^2-8x).$$

化簡后, 得:

$$3x-15\geqslant 3x+3.$$

从形式上看, 这个不等式不能成立, 移項后, 得:

$$3x-3x\geqslant 3+15, 即 \ 0\geqslant 18,$$

这是不合理的.

因此, 已知不等式无解.

143. 图解. 設有函数: $y=3x-4$.

这个函数的图象是一条直綫(D). 如图 87, 直綫(D)是利用

A(0, −4) 和 B(2, 2)

两点作出的.

直綫(D)与 $x'x$ 相交于纵坐标为 0 的 C 点, 这点的横坐标是方程

$0=3x-4$ 的根, 因此, $x=\frac{4}{3}$.

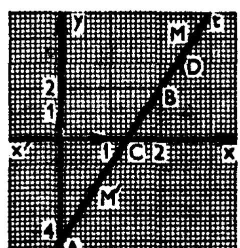

图 87.

C 点把直綫(D)分成两条方向相反的射綫 Ct 和 Ct'. Ct 上的任一点 M 都有正的纵坐标 y，而它的横坐标 x 满足不等式:

$$3x-4>0. \tag{1}$$

所以，Ct 上的点的横坐标是不等式(1)的解.

同样，射綫 Ct' 上的点 M′ 的横坐标是不等式

$$3x-4<0 \tag{2}$$

的解，因为这些点的纵坐标都是負的.

144. 利用数軸表示不等式的解. 在数軸 $x'x$ 上标出原点 O，然后再标出横坐标为 -2 的 A 点(图 88).

設 M 是射綫 Ax 上异于 A 的任何一点. 如果 x 是它的横坐标，那么 x 满足不等式:

$$x>-2.$$

因此，射綫 Ax 上的点(A 除外)的横坐标大于 -2，射綫 Ax' 上的点（A 除外）的横坐标小于 -2. 这样，如果不等式的解是 $x>-2$，就可以用下图来表示这个解:

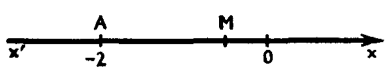

图 88.

图 89.

在图 89 中我們在射綫 Ax' 上画了細斜綫，射綫 Ax 上的点的横坐标組成不等式的解.

如果不等式的解是 $x\geqslant-2$，A 点的横坐标就是解的一部分.

145. 联立不等式. 我們把能用相同的未知数的值来满足的几个不等式叫做联立不等式.

利用 § 144 的方法表示联立不等式的解是很方便的，例如，假