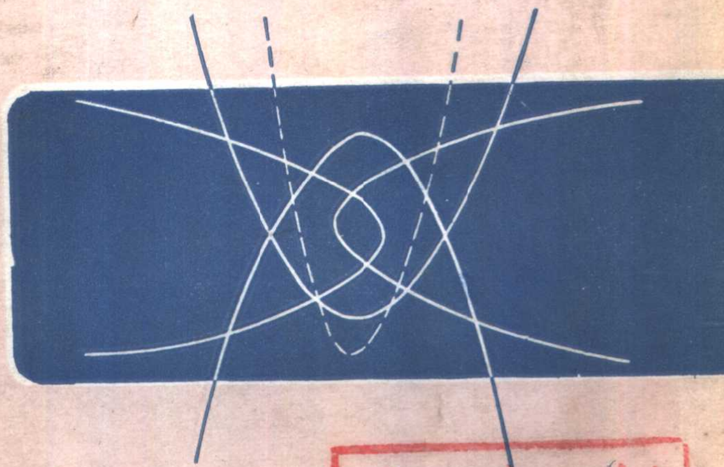
10

高中数学总结辅导

第二版

主 编 翟 连 林



数学自学丛书

中国农业机械出版社

数学自学丛书

高中数学总结辅导

第二版

主编 翟连林
编者 郝雨淋 林聚宝 艾友光
翟录红 甄颖华

中国农业机械出版社

内容简介

本书是第二版“数学自学丛书”之一。

本书第一版出版后，深受广大读者欢迎。为了满足广大读者的需要，作者在第一版的基础上经过认真修改，充实了基础知识的内容，突出了能力的培养与训练，继续出版本书的第二版，主要内容包括：正确理解、准确记忆、灵活运用数学概念、定理、公式和法则；熟练掌握重要数学方法以及掌握正确思维方法，加强综合训练，提高数学能力共三章。在第三章中编拟了十组综合训练题组及解答，供读者检查自己掌握高中数学的实际水平，为使读者了解高等学校招生对数学的要求，还汇集了近几年来高考数学试题及解答。

本书可供自学青年、职工、高中学生以及中学数学教师参考。

高中数学总结辅导

（第二版）

主编　翟连林

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092 1/32 开 24 印张 532 千字

1984年3月北京第一版

1985年6月北京第二版·1985年6月北京第二次印刷

印数：283,001—451,000　定价：3.70 元

统一书号：7216·64

序

为适应我国四化建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急. 从我国广大职工的实际出发，科学水平的提高尤感迫切. 中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的. 但是这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平只是久缓的计议，不是当务之急，这样当然就谈不上有什么迫切感了. 其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背. 中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》(第一版)问世以来，受到极为广泛的读者热烈欢迎，很重要的一个因素，就是因为它适应了当前的迫切需要.

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础. 当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学. 要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎. 所以这套丛书的出版具有极为深远的意义.

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面.

一、取材允当，适用面广泛

事实上，该丛书是根据中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它

不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和大专学生自修参考之用，以及中学数学老师进修提高之用。

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都按基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样。在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练题与综合训练题的配合，从而既能使读者巩固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节。

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学。还通过提示方式，启发读者自行解题。既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考。

以上是概括这套丛书的特点，当然不是说每一本书都一样，更不是说每一本书都是完美无缺。而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国四化建设中继续发挥它的根本性的作用。

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国数学学会副理事长，北京大学数学研究所所长。

编者的话

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学低年级数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套“数学自学丛书”。

这套丛书包括：

一、初中部分

1．《初中代数双基训练》；

2．《平面几何双基训练》；

3．《初中数学总结辅导》。

二、高中部分

1．《高中代数双基训练》；

2．《立体几何双基训练》；

3．《平面三角双基训练》；

4．《平面解析几何双基训练》；

5．《高中数学总结辅导》。

三、大学专科部分

1、《一元微积分双基训练》；

2．《多元微积分双基训练》；

3．《线性代数双基训练》；

4．《概率统计双基训练》；

5．《复变函数双基训练》；

6.《逻辑代数与BASIC语言双基训练》.

为便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识；然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正常易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题（包括解答或提示）的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力.

在本书编写过程中，作者参阅了大量数学书报、杂志以及全国各地高中数学综合练习题，并选用了里面的题目，在此特别说明，并向原作者表示衷心地感谢.

本书第二版的问世，刘尚宽、刘尚田、徐士瑞、刘余、白正红等同志付出了辛勤的劳动，在此一并表示感谢.

由于我们的水平有限，加之时间仓促，不妥和错误之处，敬希读者批评指正.

编　者

1984年11月

目　录

第一章　正确理解、准确记忆、灵活运用数学概念、定理、公式和法则

第一节　正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提

概念是构成判断、推理的要素，是思维的细胞，正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提，是学好定理、公式、法则和数学方法以及提高解题能力的基础．但是，不少同学无论是在平日的学习，还是在复习中，对深刻理解数学概念的重要性认识不足，因此，在作业中出现各种各样概念性错误．

例 1　计算：

$$|2\lg5-0.01^{-\frac{1}{2}}|+\sqrt{4\lg^2 2-\lg16+1}+\omega^{10}.$$

其中
$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

有的同学由于对绝对值的概念、算术根的概念不清楚，以及在复数运算中乱用实数集中只有在 $a\geqslant0$ 时才可应用的根式基本性质 $\sqrt[n]{a^m}=(a^p)^{\frac{m}{np}}$，而得出如下的错误解法：

$$\text{原式}=|2\lg5-0.1^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}|+\sqrt{(2\lg2-1)^2}$$
$$+(\omega^3)^{\frac{10}{3}}\quad\left[\because\omega^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=1\right]$$

$$= 2\lg 5 - 10 + 2\lg 2 - 1 + 1^{\frac{10}{3}}$$

$$= 2(\lg 5 + \lg 2) - 10$$

$$= -8.$$

事实上，

$$|2\lg 5 - 10| = -(2\lg 5 - 10) = 10 - 2\lg 5,$$

$$\sqrt{(2\lg 2 - 1)^2} = -(2\lg 2 - 1) = 1 - 2\lg 2,$$

$$\omega^{10} = \omega^9 \cdot \omega = 1 \cdot \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

最后计算的结果应是

$$8\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

例 2 若 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个根，求动点（a，b）的轨迹.

有的同学由于对函数的定义域和值域的概念理解不深，因此在作题中常常被忽视，导致在解题中出现错误. 对于这个题目有的同学求解如下：

由 $\sin\theta + \cos\theta = a$，$\sin\theta\cos\theta = b$，消去 θ，得

$$b = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}.$$

用 x、y 代换 a、b，得动点的轨迹方程

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

轨迹是抛物线.

这个解法由于忽略"函数的定义域"和"值域"而使最后结果不完善.

事实上，因 $a = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \theta)$，

则 $$-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}.$$

又 $$b=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta,$$

则 $$-\frac{1}{2}\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}.$$

∴ 所求轨迹应是抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ 上点 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 之间的一段弧.

例 3 用反正弦表示

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}.$$

有的同学由于对反三角函数的概念不清，而得出如下的错误解法：

令 $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$，则

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5},\ 且\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2};$$

$\beta=\arcsin\frac{15}{17}$，则

$$\sin\beta=\frac{15}{17},\ \cos\beta=\frac{8}{17},\ 且\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}\right)$$

$$=\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\times\frac{8}{17}+\frac{4}{5}\times\frac{15}{17}=\frac{84}{85},$$

∴ $$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}=\arcsin\frac{84}{85}.$$

我们说，由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{84}{85}$ 不一定能推得 $\alpha+\beta=\arcsin\frac{84}{85}$.

事实上，因为 $0<\alpha+\beta<\pi$，则 $\alpha+\beta$ 可能在第一象限，也可能在第二象限，二者必居其一. 由于反正弦函数 $\arcsin x$ 是增函数，则容易得到 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$，因而有 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，即 $\alpha+\beta$ 在第二象限，而不是在第一象限. 所以正确的答案是：

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}=\pi-\arcsin\frac{84}{85}.$$

例 4　求直线 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t \\ y=8+t \end{cases}$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 相交的弦的长.

我们知道，直线的参数方程有以下两种形式：

$$（1）\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\sin\alpha; \end{cases}\qquad（2）\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt. \end{cases}$$

有的同学不清楚这两种形式的区别与联系，对于参数 t 的意义模糊，因此，得出如下的错误解法：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}t & ① \\ y=3+t & ② \\ x^2+y^2=5 & ③ \end{cases}$$

把①、②代入③，得

$$\left(\frac{1}{2}t\right)^2+(3+t)^2=5$$

$\Rightarrow\quad 5t^2+24t+16=0.$

解之，得

$$t_1=-4,\ t_2=-\frac{4}{5},$$

故所求弦长

$$d=|t_2-t_1|=\frac{16}{5}.$$

事实上，本题给出的参数方程是第（2）种形式，其中参数 t 不表示定点到动点的有向距离．正确的解法是：

在解得$t_1=-4$，$t_2=-\frac{4}{5}$以后，代入直线的参数方程，得直线与圆的两个交点：

$$(-2,-1)、\left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right).$$

所以，弦长

$$d=\sqrt{\left(-2+\frac{2}{5}\right)^2+\left(-1-\frac{11}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

上述这类概念性错误，在高考或数学竞赛的答卷中反映得也很突出．请看下面的例题：

例 5 数集$X=\{(2n+1)\pi,\ n$是整数$\}$与数集$Y=\{(4k\pm1)\pi,\ k$是整数$\}$之间的关系是

（A）$X\subset Y$．（B）$X\supset Y$．

（C）$X=Y$．（D）$X\neq Y$．

答：（C）

这是 1984 年高考的一道选择题．不少同学由于对奇数

的概念、奇数的各种表达形式不清楚，对子集与真子集、集合相等的概念含混，造成选（A）、选（B），甚至有的选（D）的错误.

例 6 对任何 $\phi\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，都有

（A） $\sin\sin\phi<\cos\phi<\cos\cos\phi$.

（B） $\sin\sin\phi>\cos\phi>\cos\cos\phi$.

（C） $\sin\cos\phi>\cos\phi>\cos\sin\phi$.

（D） $\sin\cos\phi<\cos\phi<\cos\sin\phi$.

这是 1982 年二十八省、市、自治区联合数学竞赛的一道选择题. 许多同学由于对三角函数的增减性不清楚，更被重叠的三角函数符号所迷惑而束手无策或乱猜选错.事实上，当 ϕ 由 0 增至 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\phi$ 由 1 减至 0，而 $\sin\phi$ 则由 0 增至 1，因此，$\sin\sin\phi$ 既不能恒小于 $\cos\phi$，也不能恒大于 $\cos\phi$，故（A）、（B）都是错的.

又，$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x$.

则令 $x=\cos\phi$，有 $\sin\cos\phi<\cos\phi$.

因此（C）也不能成立.

故选（D）(因为原题告诉四个答案中，有一个且只有一个答案是正确的).

例 7 证明：对数换底公式 $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

其中 a、b、N 都是正数，$a\neq1$，$b\neq1$.

这是 1980 年高考理工农医类试题. 不少同学对于论证的概念含混，对证明的规则不清楚，逻辑思维混乱，写出了如下的“证明”：

$$左边=\frac{\lg N}{\lg b},$$

$$右边=\frac{\lg N}{\lg a}\bigg/\frac{\lg b}{\lg a}=\frac{\lg N}{\lg b},$$

$\therefore$ 左边=右边.

这是用换底公式证明换底公式，犯了循环论证错误.

在 1979 年高考曾出了一道“叙述并证明勾股定理”的试题. 不少同学用解析法，根据两点间的距离公式进行证明，这种证明也是犯了循环论证的错误. 因为两点间距离公式是由勾股定理推证出来的. 也有的同学利用余弦定理进行证明：

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 90^\circ=a^2+b^2.$$

还有的同学利用锐角三角函数进行证明：

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(c\sin A)^2+(c\cos A)^2\\&=c^2(\sin^2 A+\cos^2 A)\\&=c^2.\end{aligned}$$

这两种证明也都犯了循环论证的错误. 因为作为论据的余弦定理和 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 都是由勾股定理推证出来的.

例 8 证明：对于任意实数 t，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的模 $r=|z|$ 适合 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$.

这是 1983 年高考理工农医类的一道试题.

同学们对于复数及其模的概念，以及算术根、绝对值的概念，一般是清楚的. 但当这些概念综合交织在一起时，就糊涂了. 拿这个题目来说，由于实部和虚部都以根式同绝对值的形式出现，许多同学把 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的模错写成 $r=\sqrt{\cos t+\sin t}$ 或 $r=|\cos t|+|\sin t|$ 而使整个证明一错到底.

事实上，只要深刻理解复数模的概念以及绝对值、算术根的概念，很容易得到

$$r=|z|=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}.$$

这样，就把待证的结论转化成

$$\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}\leqslant\sqrt[4]{2}$$

或 $|\cos t|+|\sin t|\leqslant 2$.

亦即只需证明

$$|\cos t|^2+2|\cos t||\sin t|+|\sin t|^2\leqslant 2,$$

或 $|\sin 2t|\leqslant 1$.

而对任意实数 t 来说，$|\sin 2t|\leqslant 1$ 恒成立.

$\therefore$ 可逆地证得对任意 t，$r\leqslant\sqrt[4]{2}$ 成立.

例 9 在 $120°$ 的二面角 $P—a—Q$ 的两个面 P 和 Q 内（如图 1-1），分别有点 A 和点 B. 已知点 A 和点 B 到棱的距离分别为 2 和 4，且线段 $AB=10$.

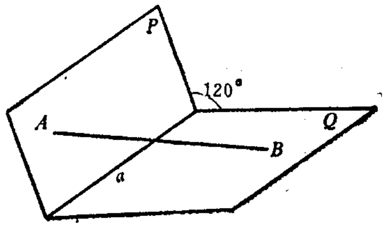


图 1-1

（1）求直线 AB 和棱 a 所成的角；

（2）求直线 AB 和平面 Q 所成的角.

这是 1981 年高考理工农医类的一道试题.

解这个题目涉及到异面直线的概念、异面直线所成角的概念、二面角平面角的概念、直线和平面所成角的概念以及直线和平面、平面和平面垂直的概念和性质. 许多同学由于没有深刻理解这些概念而不能作答. 即使某一个概念不清，也会造成全题解错. 拿（2）小题来说，尽管同学们知道 AB 与平面 Q 所成的角是 AB 与它在平面 Q 内的射影所夹的